I. Теория систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Матрицы, действия с матрицами, обратная матрица. Определители матрицы и их свойства, обратная матрица. Элементарные преобразования матриц. Квадратные системы линейных алгебраических уравнений, метод Крамера. Простые матричные уравнения и их решения.

Линейная зависимость и независимость столбцов (строк) матрицы. Критерий линейной зависимости, достаточные условия линейной зависимости столбцов (строк) матрицы. Критерий равенства нулю определителя матрицы.

Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Вычисление ранга матрицы методом элементарных преобразований. Вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований.

Системы линейных алгебраических уравнений, основные свойства СЛАУ, однородность и неоднородность, совместность и несовместность, определённость СЛАУ, матричная форма записи СЛАУ и её решения.

Элементарные преобразования СЛАУ. Метод Гаусса исследования СЛАУ.

Критерий совместности СЛАУ, теорема Кронекера-Капелли, геометрическая интерпретация возможного множества решений на примере 2-х уравнений с 2-мя неизвестными.

Однородные СЛАУ. Свойство решений, фундаментальная система решений (ФСР), теорема об общем решении однородной системы. Критерий существования нетривиального решения.

Неоднородные СЛАУ. Теорема о структуре решения неоднородной СЛАУ. Алгоритм решения неоднородной СЛАУ.

II. Линейные пространства (ЛП)

Определение линейного (векторного) пространства. Примеры ЛП.

Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Критерий линейной зависимости. Достаточные условия линейной зависимости и линейной независимости систем векторов ЛП. Примеры линейно независимых систем в пространствах строк, многочленов, матриц.

Базис и размерность ЛП. Свойство базисных элементов, координаты суммы двух векторов и произведения вектора на число. Теорема о связи базиса и размерности ЛП. Примеры базисов в ЛП строк, многочленов, матриц.

Изоморфизм ЛП. Критерий изоморфности ЛП.

Подпространство ЛП и линейные оболочки систем векторов. Размерность линейной оболочки. Теорема о пополнении базиса.

Пересечение и сумма подпространств, прямая сумма подпространств. Теорема о размерности суммы подпространств.

Подпространство решений однородной СЛАУ, его размерность и базис. Выражение общего решения однородной СЛАУ через ФСР.

Матрица перехода от одного базиса ЛП к другому и её свойства. Преобразование координат вектора при переходе к другому базису.

III. Линейные операторы (ЛО) в линейном пространстве.

Определение и примеры линейных операторов; линейные отображения и линейные преобразования.

Матрица линейного оператора. Примеры нахождения матриц операторов. Нахождение координат образа вектора.

Действия с линейными операторами. Линейное пространство ЛО

Теорема об изоморфности множества линейных преобразований множеству квадратных матриц.

Матрица произведения линейных преобразований. Определение и свойства обратного оператора, его матрица.

Критерий обратимости линейного оператора. Примеры обратимых и необратимых операторов.

Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.

Определитель и характеристический многочлен линейного оператора, их инвариантность по отношению к преобразованиям базиса.

Ядро и образ линейного оператора. Теорема о сумме размерностей ядра и образа. Нахождение ядра и образа линейного оператора при фиксированном базисе. Ранг и дефект линейного оператора.

Теорема инвариантности ядра и образа ЛО относительно перестановочного с ним ЛО.

Собственные значения (числа) и собственные векторы линейного оператора. Спектр ЛО. Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов. Свойства собственных векторов линейного оператора.

Алгебраическая и геометрическая кратности собственных значений и их взаимосвязь.

Критерий диагонализируемости матрицы линейного оператора, достаточные условия диагонализируемости линейного оператора.

Теорема Гамильтона-Кэли.