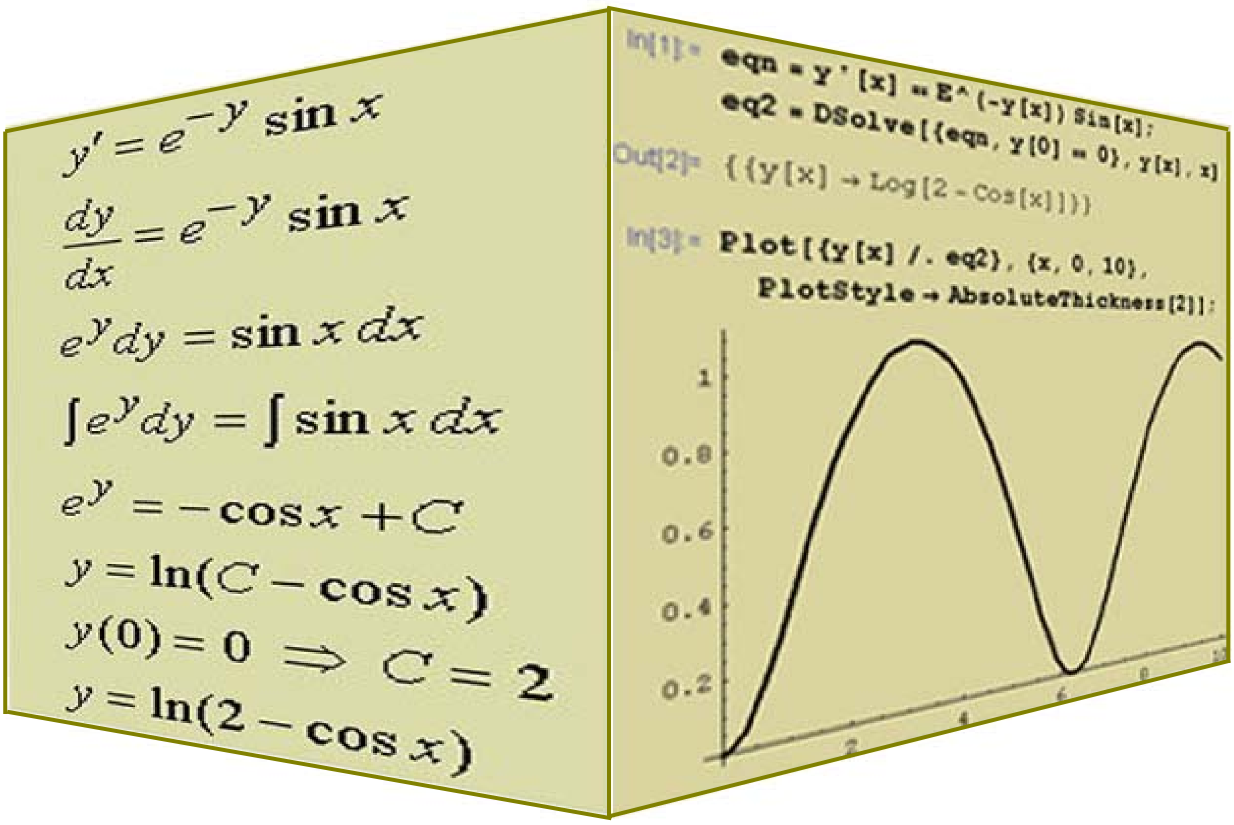
Министерство образования и науки Российской Федерации
Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

В.В. Калинин

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

пособие для практических занятий



Москва 2005

Министерство образования и науки Российской Федерации
Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

В.В. Калинин

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

пособие для практических занятий

Издательство
«НЕФТЬ И ГАЗ»
РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина

Москва 2005

УДК 517.9
К18

Автор:
***В.В. Калинин**, зав. кафедрой высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, д.ф.-м.н.*

К18 Калинин В.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения (пособие для практических занятий). – ФГУП Изд-во «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2005. – 68 с.
ISBN 5-7246-0242-4

Настоящее пособие предназначено для студентов различных специальностей РГУ нефти и газа им И.М. Губкина. В нем подробно рассматриваются способы и приемы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, разобраны реальные практические задачи, сводящихся к решению таких уравнений. В начале каждого раздела сформулированы теоретические вопросы, которые позволяют систематизировать знания по соответствующему разделу учебного курса. Приведены задачи для самостоятельного аудиторного и домашнего решения. В приложениях представлены приемы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, несколько расширяющие рамки стандартного курса технического вуза, а также современные компьютерные подходы к решению дифференциальных уравнений (на примере системы «*Mathematica*»). Пособие будет также полезно магистрантам, аспирантам и специалистам в качестве справочного материала при решении практических задач.

Рецензенты:
зав. кафедрой высшей математики МГУПП д.ф.-м.н. проф. А.Н. Филиппов,
д.ф.-м.н. проф. А.В. Баранов

Учебное издание

Калинин Василий Валерьянович

Обыкновенные дифференциальные уравнения
(пособие для практических занятий)

Редактор: В.В. Калинин
Редактор-корректор В.Б. Овчаров
Компьютерная верстка В.В. Калинин, Т.В. Уткина.

Подписано в печать 15.05.2005. Формат 60х90 1/16
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Темза. П.л. 5,5.
Тираж 300 экз. Заказ №83

Федеральное государственное унитарное предприятие
Издательство «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина
Лицензия ИД №06329 от 26 ноября 2001 г.
119991, Москва, Ленинский просп., 65
Тел.: (095) 135-8406, 930-9711
Факс: 135-7416
Налоговая льгота – общероссийский классификатор продукции
ОК – 005 – 93, том 2: 953000

Отпечатано в типографии издательства

ISBN 5-7246-0242-4

Предисловие

Обыкновенные дифференциальные уравнения применяются для описания многих процессов реальной действительности. Трудно представить себе область науки или производства, в которой не возникала необходимость использования дифференциальных уравнений. В частности, к ним относятся различного рода физические и химические процессы, процессы нефте- и газодобычи, геологии, экономики и т.д. Действительно, если некоторая физическая величина (перемещение тела, пластовое давление жидкости в фиксированной точке, концентрация вещества, объем продаж продукта) оказывается меняющейся со временем под воздействием тех или иных факторов, то, как правило, закон ее изменения по времени описывается именно дифференциальным уравнением, т.е. уравнением, связывающим исходную переменную как функцию времени и производные этой функции. Независимой переменной в дифференциальных уравнениях может выступать не только время, но и другие физические величины: координата, цена продукта и т.д. Решение уравнения с анализом его зависимости от параметров задачи и начального состояния системы позволяет установить общие закономерности изменения исходной физической величины. В этой связи изучение обыкновенных дифференциальных уравнений в рамках курса высшей математики имеет принципиальное теоретическое и прикладное значения для подготовки современного специалиста.

В настоящем пособии приведены основные типы уравнений, для которых решения можно найти аналитическим путем, указаны способы их решения, подробно разобраны соответствующие примеры. Кроме того, приведены решения реальных практических задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Содержание пособия разбито по практическим занятиям, что делает удобным его использование в учебном процессе. Часть примеров оставлена для самостоятельного решения студентами во время аудиторных занятий, другая часть оставлена для самостоятельной домашней работы. Стандартный курс высшей математики в вузах, как правило, охватывает изучение лишь наиболее важных классов обыкновенных дифференциальных уравнений. Объем всего курса может сильно варьироваться в зависимости от специальности и требуемого уровня подготовки специалистов. В связи с этим в ходе изучения темы может возникнуть необходимость выхода за рамки стандартного материала. В приложении 1 пособия дается дополнительный материал по решению обыкновенных дифференциальных уравнений, который может быть использован при более глубоком изучении курса или в качестве краткого справочника.

Класс дифференциальных уравнений, решение которых можно найти аналитическим путем, достаточно узок. Поэтому часто при решении практических задач обычно не удается избежать численного моделирования. Кроме того, во многих случаях, когда аналитическое решение уравнения существует, но требует большого объема алгебраических выкладок, компьютерные методы также оказываются предпочтительнее традиционных. Все это определяет новые требования к подготовке современных специалистов в любой области народного хозяйства. Они должны владеть не только традиционными аналитическими методами высшей математики, но и современными компьютерными подходами, в частности, пакетами математических программ. В приложении 2 пособия на примере компьютерной системы “*Mathematica*” показаны компьютерные (как численные, так и символьные) методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Использование таких методов позволяет:

1) установить, является ли то или иное уравнение «решаемым»;
2) проверить правильность проведения аналитических выкладок;
3) получить численные значения параметров решения в том случае, если это связано с громоздкими алгебраическими преобразованиями;
4) визуально отобразить результаты расчетов и провести их анализ.

Настоящее пособие будет полезно не только студентам при изучении соответствующего курса высшей математики, но также и магистрантам, аспирантам, специалистам, желающим восстановить в памяти основные подходы к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и познакомиться с современными компьютерными подходами к их решению.

Одновременно с изучением материала по настоящему пособию рекомендуется также использовать учебник [1], задачники [2] и [3], справочник [4]. Описание компьютерной системы “*Mathematica*” можно найти в книге [5] (ее электронный вариант прилагается к дистрибутиву программы).

Материалы, связанные с данным изданием, можно найти на сайте
кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина:
http://kvm.gubkin.ru/Index.html

Справочные материалы по решению дифференциальных уравнений
широко представлены на сайте «EqWorld», редактируемом проф. А.Д. Поляниным::
http://eqworld.ipmnet.ru/eqworld/

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 1

Оглавление 4

Занятие первое
Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения. 5

Занятие Второе
Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. 13

Занятие третье
Уравнения Бернулли. 18

Занятие четвертое
Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. 22

Занятие пятое
Решение разных дифференциальных уравнений. 29

Занятие шестое
Однородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $f(x) = P_n(x)e^{ax}$. 33

Занятие седьмое
Неоднородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $f(x) = \left(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right)e^{ax}$. 43

Приложение 1
Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, не вошедшие в основной курс. 52

Приложение 2
Решение обыкновенных дифференциальных уравнений в компьютерной системе “*Mathematica*”. 63

Приложение 3
Основные типы дифференциальных уравнений и способы их решения. 72

Литература 75

Занятие первое

Темы:

«Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными».
«Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка».

Сведения из теории:

Уравнение вида

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

называется ***дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными***. Для решения такого уравнения следует провести разделение переменных:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

и проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

Полученная после интегрирования неявная зависимость переменных y и x (содержащая произвольную постоянную C) называется ***общим интегралом*** дифференциального уравнения. Если удается выразить переменную y в явном виде, то получается ***общее решение*** дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

называется ***однородным уравнением 1-го порядка***. Для решения однородного уравнения проводится замена неизвестной функции по формуле:

$$u = \frac{y}{x}$$

Тогда может быть выражена неизвестная функция $y(x)$ и ее производная $y'(x)$:

$$y = ux, \quad y' = u'x + u$$

Новая функция u удовлетворяет дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными:

$$u'x + u = f(u) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} \cdot x = f(u) - u,$$

Зависимость между переменными u и x, полученная в ходе интегрирования этого уравнения, позволяет на основе равенства $y = u \cdot x$ найти исходную неизвестную функцию y.

Теоретические вопросы:

1. Что называется дифференциальным уравнением 1-го порядка?
2. Какие из перечисленных уравнений являются дифференциальными уравнениями 1-го порядка:

   а) $y^2 y'' = x(y')^3 + 1$

   б) $\dfrac{x}{y'} = xy'' + 2y$

   в) $x\sqrt{y'} = y^3(x + y')$

   г) $xy^2 = 2xy + 3$
3. Написать общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
4. Какие из перечисленных уравнений являются дифференциальными уравнениями 1-го порядка с разделяющимися переменными?

   а) $(x+1)y' = y^2 \sin x + xy^2$

   б) $\operatorname{ctg} x \cdot \sin^2 y\, dx + (x+3)\ln y\, dy = 0$

   в) $(x^2 + e^x)y' = xy + y^2 \cos x$
5. Каков общий вид однородного дифференциального уравнения 1-го порядка?

6. Какие из перечисленных уравнений являются однородными дифференциальными уравнениями 1-го порядка?

   а) $y' = \operatorname{tg} \ln \sin \dfrac{y}{x}$

   б) $y' = \dfrac{2x + 4y}{x - 3y}$

   в) $(x^2 + xy + 5y^2)dy + (3xy + y^2)dx = 0$

   г) $y' = \cos \dfrac{y}{x} + \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{2y^5}{x^5} - \dfrac{y^4}{x^3}$

   д) $y' = \dfrac{\sqrt{x^4 - 2y^4}}{\sqrt[3]{x^6 + xy^5 + 2x^4y^2}}$

7. Какая замена неизвестной функции позволяет свести однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка к уравнению с разделяющимися переменными?

☹ **ПРИМЕР 1.** Решить дифференциальное уравнение $y' = e^{-y} \sin x$ с начальным условием $y(0) = 0$.

☺ **Решение.** Заданное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение 1-го порядка ***с разделяющимися переменными***. Проведем разделение переменных:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y} \sin x \quad \Rightarrow \quad e^y dy = \sin x\, dx \quad \Rightarrow \quad \int e^y dy = \int \sin x\, dx$$

Находя интегралы, получим

$$e^y = -\cos x + C$$

Решение можно оставить в неявном виде (в виде ***общего интеграла дифференциального уравнения***). Здесь, однако, несложно выразить искомую функцию явно, т.е. получить ***общее решение дифференциального уравнения***:

$$e^{y} = -\cos x + C \quad \Rightarrow \quad y = \ln(C - \cos x)$$

Для нахождения частного решения подставим начальное условие в найденное общее решение:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \ln(C - 1) \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

Тогда искомое **частное решение**

$$y = \ln(2 - \cos x) \quad \blacksquare \ (^1)$$

☹ **ПРИМЕР 2.** Решить уравнение $ydx + xdy = 0$.

☺ **Решение.** Имеем дифференциальное уравнение 1-го порядка ***с разделяющимися переменными***, записанное через дифференциалы. Разделение переменных дает:

$$xdy = -ydx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

После интегрирования получаем

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x|^{-1} + \ln C$$

(Произвольная постоянная интегрирования здесь записана в логарифмическом виде для удобства дальнейших преобразований).

$$\ln|y| = \ln\left(C|x|^{-1}\right) \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\frac{C}{|x|}$$

Отсюда находим ***общее решение уравнения***

$$y = \frac{C}{x} \tag{\#}$$

✌ **Замечание.** Строго говоря, после исключения знака абсолютной величины решение должно было быть записано в виде $y = \pm\dfrac{C}{x}$. Однако, в силу своего определения, произвольная постоянная C может быть только положительной, При этом величина $\pm C$ принимает любые – как положительные, так и отрица-

(1) Знаком ■ здесь и далее обозначается завершение решения примера.

тельные – значения. Тогда, переобозначив величину $\pm C$ через новую постоянную C произвольного знака, приходим к записи (#). Одновременно, при $C = 0$ формула (#) описывает и тривиальное решение $y = 0$ исходного дифференциального уравнения, которое было потеряно в ходе разделения переменных. В дальнейшем окончательная запись общего решения дифференциального вида (#) с постоянной C произвольного знака будет применяться без приведенных в данном замечании рассуждений. ■

Примеры для самостоятельного решения.

1. $x^2 y' = \dfrac{1}{\cos y}$
2. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}$
3. $y' = x^3 y^2 + 2x^3 y$
4. $\operatorname{tg} x \cdot y' = \sqrt{y^2 + 3}$
5. $(y^2 + 2)dx + (x^2 - 4)dy = 0$
6. $\sqrt{y}dx + \dfrac{dy}{\ln x} = 0$

☹ **ПРИМЕР 3.** Решить уравнение $y' = \operatorname{tg}\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}$.

☺ **Решение.** Данное уравнение представляет собой ***однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка***. Произведем замену неизвестной функции:

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u$$

Тогда для новой неизвестной функции $u(x)$ получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'x + u = \operatorname{tg} u + u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} x = \operatorname{tg} u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\operatorname{tg} u} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируя обе части равенства, получаем

$$\int \frac{\cos u}{\sin u} du = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\sin u| = \ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad \sin u = Cx$$

Теперь можно вернуться к исходной неизвестной функции y:

$$\sin(y/x) = Cx$$

В результате получен ***общий интеграл*** исходного дифференциального уравнения. Заметим, что в данном примере не представляет труда выразить неизвестную функцию y явно:

$$\frac{y}{x} = \arcsin(Cx) \quad \Rightarrow \quad y = x\arcsin(Cx),$$

что дает ***общее решение*** дифференциального уравнения. ■

😐 **ПРИМЕР 4.** Решить уравнение $xy' = y + \sqrt{4x^2 - y^2}$

☺ **Решение.** Это – ***однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка***. Выполняем замену неизвестной функции:

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u$$

Тогда получаем уравнение

$$x(u'x + u) = ux + \sqrt{4x^2 - u^2x^2}$$

Или, после упрощений,

$$u'x^2 + ux = ux + x\sqrt{4 - u^2};$$

$$\frac{du}{dx}x^2 = x\sqrt{4 - u^2}$$

Теперь переменные можно разделить:

$$\frac{du}{\sqrt{4 - u^2}} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{\sqrt{4 - u^2}} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \arcsin\frac{u}{2} = \ln|x| + \ln C$$

Осталось только вернуться к исходной неизвестной:

$$\arcsin\frac{y}{2x} = \ln|x| + \ln C$$

В результате получен ***общий интеграл*** дифференциального уравнения. ■

Примеры для самостоятельного решения.

1. $y' = \cos^2 \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}$ 2. $xy' = \sqrt{3x^2 + y^2}$

3. $y' = \dfrac{x+3y}{x-y}$ 4. $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$

☹ Задача о рекламе пасты «Бленд-а-мед».

В городе N. ежедневно продавалось в среднем всего 2 тюбика пасты «Бленд-а-мед». Производители пасты решили начать рекламную кампанию на местном телевидении. Их анализ показал, что если каждый житель будет чистить зубы дважды в день, то ежедневная продажа должна составить 1000 тюбиков. Через 10 дней после начала рекламы в городе N. стало продаваться по 20 тюбиков пасты. Считая скорость роста продажи пасты пропорциональной разности между предельным значением объема продаж (насыщенным спросом) и его текущим значением, выяснить, когда объем продаж достигнет 500 тюбиков в день, а также, каким он будет через два месяца?

☺ Решение. Пусть $y(t)$ – количество тюбиков пасты, продаваемых ежедневно через t дней после начала рекламной кампании, а $\tilde{y}$ = 1000 (тюбиков) – насыщенный спрос, соответствующий максимально возможному потреблению пасты в городе N. Скорость роста объема продаж выражается производной функции $y(t)$ по переменной t. По условию задачи эта скорость пропорциональна величине $(\tilde{y} - y)$ разности насыщенного и текущего спроса, т.е.

$$\frac{dy}{dt} = k(\tilde{y} - y), \tag{1}$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Таким образом, задача описывается дифференциальным уравнением (1) с разделяющимися переменными и начальным условием

$$y(0) = 2 \tag{2}$$

Разделив в уравнении (1) переменные, получим

$$\int \frac{dy}{\tilde{y}-y} = k\int dt \quad \Rightarrow \quad -\ln(\tilde{y}-y) = kt - \ln C \quad \Rightarrow \quad \tilde{y}-y = Ce^{-kt},$$

или

$$y = \tilde{y} - Ce^{-kt} \tag{3}$$

Теперь найдем значения коэффициентов в законе (3). Подставив начальное условие (2), получим

$$2 = 1000 - C \quad \Rightarrow \quad C = 998$$

Для нахождения коэффициента k воспользуемся условием задачи:

$$y = 20, \quad t = 10 \quad \Rightarrow \quad 20 = 1000 - 998e^{-10k}$$

Отсюда

$$e^{-10k} = \frac{980}{998} \quad \Rightarrow \quad -10k = \ln\frac{980}{998} \quad \Rightarrow \quad k \approx 0,00182$$

Теперь можно окончательно записать закон изменения количества $y(t)$ ежедневно продаваемой пасты «Бленд-а-мед» от времени t, прошедшего с начала телевизионной рекламы:

$$y = 1000 - 998e^{-0,00182t}$$

Найденный закон позволяет ответить на вопросы задачи:

а) найдем объем продаж через 2 месяца = 60 дней:

$$y = 1000 - 998e^{-0,00182\cdot 60} \approx 105 \text{ (тюбиков в день)}$$

б) чтобы объем продаж достиг уровня y = 500 (тюбиков в день), должно быть выполнено равенство

$$500 = 1000 - 998e^{-0,00182t} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-0,00182t} = \frac{500}{998} \quad \Rightarrow \quad -0,00182t = \ln\frac{500}{998}$$

Откуда $t \approx 380$ (дней), т.е. интересующий производителей объем продаж зубной пасты потребует более одного года рекламной кампании. ■

Домашнее задание.

1. $x^2 y' = \cos^2 2y$

2. $e^{3x} y' = y^2 - 3$

3. $(x^2 + 4)y' = \operatorname{tg} y$

4. $(y^2 - 4)dx + \sqrt{3 - x^2} \cdot ydy = 0$

5. $y' - \dfrac{x^4}{y^4} = \dfrac{y}{x}$

6. $y' = \dfrac{y + x}{y - x}$

7. $x \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) dy - ydx = 0$

8. $xy' = y + \sqrt{x^2 + 3y^2}$

9. $\left(3x^2 + 6xy + 3x^2\right)dx + \left(2x^2 + 3xy\right)dy = 0$

Занятие Второе

Тема:

«Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка».

Сведения из теории:

Уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

называется ***линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка***. Решить такое уравнение можно, проведя замену неизвестной функции и ее производной по формулам:

$$y = uv; \quad y' = u'v + uv'.$$

Тогда получаем

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

или

$$v\left(u' + P(x)u\right) + uv' = Q(x) \qquad (*)$$

Функцию u выберем таким образом, чтобы она обращала в нуль выражение, стоящее в скобках в левой части равенства (*):

$$u' + P(x)u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = -P(x)u$$

Решение полученного для функции u дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln|u| = -\int P(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$u = e^{-\int P(x)dx}$$

следует подставить в уравнение (*). В результате получим для неизвестной функции v уравнение с разделяющимися переменными. Его решение позволяет найти исходную неизвестную функцию y по формуле

$$y = uv.$$

Теоретические вопросы:

1. Каков общий вид линейного дифференциального уравнения 1-го порядка?
2. Какие из перечисленных уравнений являются линейными дифференциальными уравнениями 1-го порядка:

   а) $y' = \dfrac{\sin x}{y} + e^x$

   б) $(x+3)y' = \operatorname{arctg} x \cdot y + \sqrt{x^2 + 9}$

   в) $x^2 y' = \sqrt{1+y}\lg x + 3$

   г) $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x + \sin x}} + \arcsin\dfrac{1}{x}$
3. Какая замена неизвестной функции производится при решении линейного дифференциального уравнения 1-го порядка?

4. Почему при нахождении функции $u(x)$, т.е. первой из двух новых введенных функций, в ходе интегрирования не записывается произвольное слагаемое C?

☹ **ПРИМЕР 1.** Решить уравнение $xy' + y = \dfrac{1}{x^{10}}$

☺ **Решение.** Данное уравнение представляет собой ***линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка***. Произведем замену неизвестной функции $y(x)$, введя две новые функции $u(x)$ и $v(x)$ по формуле:

$$y = uv; \quad y' = u'v + uv'$$

Тогда получаем уравнение

$$x(u'v + uv') + uv = \frac{1}{x^{10}} \quad \Rightarrow \quad xu'v + xuv' + uv = \frac{1}{x^{10}}$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие функцию v:

$$v(xu' + u) + xuv' = \frac{1}{x^{10}} \tag{*}$$

Найдем сначала функцию $u(x)$, которая обратила бы в нуль выражение, стоящее в скобках в левой части уравнения (*):

$$xu' + u = 0 \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = -u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$$

В результате интегрирования получаем

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered} \ln|u| = -\ln|x| \\ u = \frac{1}{x} \end{gathered}}$$

!!!

(Последние две строки выделены в связи с тем, что в них особенно часто допускаются ошибки).

Подставим теперь полученную функцию $u(x)$ в уравнение (*):

$$x \cdot \frac{1}{x} v' = \frac{1}{x^{10}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = x^{-10}$$

Разделение переменных и интегрирование дает вторую из введенных функций, а именно $v(x)$:

$$\int dv = \int x^{-10} dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{x^{-9}}{9} + C$$

Теперь может быть получена искомая функция $y(x)$, представляющая собой ***общее решение*** заданного дифференциального уравнения:

$$y = uv \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{9x^9} + C \right)$$

✌ **Замечание.** На первом этапе производился поиск любой функции $u(x)$, обращающей в нуль выражение в скобках из уравнения (*). Поэтому в ходе интегрирования постоянную можно было выбрать произвольным образом. В частности, в примере 1 (и везде далее) ее было удобно выбрать равной нулю. При нахождении функции $v(x)$ произвольная постоянная интегрирования должна быть обязательно записана, иначе вместо общего решения исходного уравнения было бы найдено лишь какое-то из его частных решений! ■

😐 **ПРИМЕР 2.** Решить уравнение $(2x + y^2)y' = y$.

☺ **Решение.** Очевидно, что данное уравнение не является линейным относительно неизвестной функции $y(x)$. Тем не менее, оно может быть сведено к таковому. Действительно, запишем уравнение в виде

$$(2x + y^2)\frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow \quad y\frac{dx}{dy} = 2x + y^2$$

Теперь, если считать переменную x неизвестной функцией аргумента y, то полученное равенство есть линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка относительно функции $x(y)$. Для его решения произведем замену неизвестной функции $x(y)$, введя две новые функции $u(x)$ и $v(x)$ по формуле:

$$x = uv; \quad \frac{dx}{dy} = u'v + uv'$$

Заметим, что здесь знак (′) представляет собой знак дифференцирования по переменной y. Уравнение теперь запишется в виде

$$y(u'v + uv') = 2uv + y^2$$

Проведем перегруппировку слагаемых:

$$yu'v + yuv' = 2uv + y^2 \quad \Rightarrow \quad yu'v - 2uv + yuv' = y^2,$$

и

$$v(yu' - 2u) + yuv' = y^2 \qquad (*)$$

Найдем функцию $u(y)$, которая обратила бы в нуль выражение в скобках:

$$yu' - 2u = 0 \quad \Rightarrow \quad y\frac{du}{dy} = 2u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = 2\frac{dy}{y}$$

Интегрируя, получаем

$$\int\frac{du}{u} = 2\int\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = 2\ln|y| \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = \ln|y|^2$$

Отсюда находим функцию $u(y)$:

$$u = y^2$$

Подставим полученную функцию $u(y)$ в уравнение (*):

$$y \cdot y^2 v' = y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dy} = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad dv = \frac{dy}{y},$$

или, после интегрирования:

$$\int dv = \int\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad v = \ln|y| + C$$

Теперь может быть найдена искомая функция $x(y)$:

$$x = uv \quad \Rightarrow \quad x = y^2(\ln|y| + C),$$

В результате получен ***общий интеграл*** исходного дифференциального уравнения (ведь, формально, переменная y осталась не выраженной явно через переменную x). ■

Примеры для самостоятельного решения.

1. $xy' - y = x^5$
2. $xy' - 2y = \ln x$
3. $y' + y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$
4. $y' - y = \dfrac{e^x}{x^2}$
5. $(x^2+1)y' - 2xy = 3(x^2+1)^4$
6. $(y-x)y' = 1$

Домашнее задание.

1. $y' + \dfrac{2y}{x} = x^2 + 3$
2. $y' - \dfrac{y}{x+5} = \left(x+5\right)^2$
3. $y' + 3y = e^{6x}$
4. $2xy' - y = x - 7$
5. $xy' + y = 2x \ln x, \quad y(1) = 1$
6. $y'(2x + y^3 \cos y) = y$

Занятие третье

<u>Тема:</u>

«Уравнения Бернулли».

<u>Сведения из теории:</u>

Уравнения вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$$

называются ***уравнениями Бернулли***. Решаются уравнения Бернулли аналогично линейным дифференциальным уравнениям 1-го порядка. Проводится замена неизвестной функции и ее производной по формулам:

$$y = uv; \quad y' = u'v + uv'$$

Тогда уравнение преобразуется к виду

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)(uv)^{\alpha}.$$

Или, после группировки членов, содержащих множитель v:

$$v\left(u' + P(x)u\right) + uv' = Q(x)u^{\alpha}v^{\alpha} \qquad (*)$$

Выбираем функцию u так, чтобы она обращала в нуль выражение, стоящее в скобках в равенстве (*):

$$u' + P(x)u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = -P(x)u \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln|u| = -\int P(x)dx$$

Тогда

$$u = e^{-\int P(x)dx}$$

Найденная функция подставляется в уравнение (*). В результате для неизвестной функции v получается уравнение с разделяющимися переменными. После его решения исходная неизвестная функция y находится по формуле

$$y = uv$$

<u>Теоретические вопросы:</u>

1. Написать общий вид уравнения Бернулли.
2. Какие из приведенных уравнений являются уравнениями Бернулли:

   а) $y'\sin x + y\cos x = y^{100}$

   б) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{x}{y^2}$

   в) $xy' + \dfrac{x}{\sqrt{y}} = y\,\mathrm{tg}\,x$

   г) $xy' + x^2y = y^3 + 1$

3. Что называется общим решением дифференциального уравнения? А частным решением?
4. Что называется общим интегралом дифференциального уравнения?
5. Может ли функция $y = \sin x + 2\operatorname{tg} x$ представлять собой общее решение дифференциального уравнения?
6. Может ли общее решение дифференциального уравнения иметь вид $y = \dfrac{2x}{x^2 + C}$? Какое это уравнение?

☹ **ПРИМЕР 1.** Решить уравнение $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{x}{y^2}$ с начальным условием $y(1) = 2$.

☺ **Решение.** Имеем ***уравнение Бернулли*** с показателем степени $\alpha = -2$. Выполняем замену неизвестной функции:

$$y = uv; \quad y' = u'v + uv'$$

Тогда

$$u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = \frac{x}{(uv)^2}$$

Группируем члены, содержащие множитель v (в первой степени):

$$v\left(u' + \frac{2u}{x}\right) + uv' = \frac{x}{(uv)^2} \qquad (*)$$

Как и при решении линейных уравнений 1-го порядка, выбираем функцию $u(x)$, которая обратила бы в нуль выражение в скобках:

$$u' + \frac{2u}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = -\frac{2u}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x}$$

Тогда

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{2dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = -2\ln|x| \quad \Rightarrow \quad u = x^{-2}$$

Подставим найденную функцию в уравнение (*):

$$x^{-2}v' = \frac{x}{(x^{-2}v)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2}\frac{dv}{dx} = \frac{x^5}{v^2}$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$v^2 dv = x^7 dx \quad \Rightarrow \quad \int v^2 dv = \int x^7 dx \quad \Rightarrow \quad \frac{v^3}{3} = \frac{x^8}{8} + \frac{C}{3}$$

Запись постоянной интегрирования в виде $\frac{C}{3}$ обусловлена удобством дальнейших преобразований:

$$v = \sqrt[3]{\frac{3}{8}x^8 + C}$$

Теперь может быть записано ***общее решение*** дифференциального уравнения:

$$y = uv \quad \Rightarrow \quad y = x^{-2} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{8}x^8 + C}$$

Найдем требуемое ***частное решение*** уравнения, удовлетворяющее условию $y(1) = 2$. Для этого подставим в общее решение значения $y = 2,\ x = 1$:

$$2 = 1 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{8} + C} \quad \Rightarrow \frac{3}{8} + C = 2^3 \quad \Rightarrow \quad C = 8 - \frac{3}{8} = \frac{61}{8}$$

Подставив теперь найденное значение постоянной C в общее решение, получим искомое частное решение:

$$y = x^{-2} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{8}x^8 + \frac{61}{8}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{3x^2 + \frac{61}{x^6}} \quad \blacksquare$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{3}x^2 y^4$

2. $2y' - \frac{y}{x} = \frac{4x^2}{y}$

3. $(1 + x^2)y' = 2xy + x^2 y^2$

4. $y' - 2y = -y^3; \quad y(0) = 1$

5. $xy' + 2y = xy^4$

6. $x^3 \sin y\, dy = x\, dy - 2y\, dx$

Домашнее задание.

1. $xy' - 2y = \dfrac{x}{y^3}$

2. $y' - \dfrac{y}{2x} = 3y^4$

3. $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x^2}{y^3}$

4. $y' + \dfrac{3y}{x} = 5x^3y^2$

5. $y' + 2y = 3y^2e^x$

6. $(2x^2 + y^3)y' = xy$

Занятие четвертое

<u>Тема:</u>

«Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка».

<u>Сведения из теории:</u>

1) Дифференциальные уравнения вида

$$y^{(n)} = f(x)$$

могут быть решены последовательным интегрированием:

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)}dx = \int f(x)dx + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}dx = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2,$$

…

И так далее, пока не будет найдена сама функция $y(x)$.

2) Дифференциальные уравнения вида

$$y'' = f(x, y')$$

не содержат явно неизвестную функцию *y*. Их порядок может быть понижен с помощью замены

$$y' = p(x),$$

$$y'' = p'(x)$$

Новая неизвестная функция $p(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению 1-го порядка:

$$p' = f(x, p)$$

Если удается его решить, то решение исходного уравнения получается из соотношений:

$$y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y = \int p(x)\,dx$$

3) Дифференциальные уравнения вида

$$y'' = f(y, y')$$

не содержат явно независимую переменную *x*. Их порядок понижается с помощью замены

$$y' = p(y),$$

$$y'' = p \cdot \frac{dp(y)}{dy}$$

Новая неизвестная функция $p(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению 1-го порядка:

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

Если найдено его решение $p(y)$, то исходная неизвестная функция $y(x)$ может быть найдена из соотношения

$$y' = p(y).$$

Теоретические вопросы:

1. В каких случаях может быть понижен порядок дифференциального уравнения $F(x, y, y', y'') = 0$?
2. Может ли быть понижен порядок дифференциального уравнения $F(y', y'') = 0$? Каким образом?
3. Какие из написанных уравнений допускают понижение порядка:

   а) $xy'' + (y')^5 = \arcsin x$

б) $y''\sin y+\dfrac{\cos(y')}{y}=3$

в) $y''=5y'$

г) $xy''-7y'+3y=0$

д) $y'''+3y''=x^5$

4. Как решается дифференциальное уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$?

☹ **ПРИМЕР 1.** Решить уравнение $y'''=x+\sin 2x$.

☺ **Решение.** Данное дифференциальное уравнение решается последовательным интегрированием:

$$(y'')'=x+\sin 2x \quad\Rightarrow\quad y''=\int(x+\sin 2x)dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\cos 2x+2C_1;$$

$$y'=\int y''dx=\int(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\cos 2x+2C_1)dx=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}\sin 2x+2C_1x+C_2;$$

И, наконец, интегрируя последний раз, получаем ***общее решение*** уравнения:

$$y=\int\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}\sin 2x+2C_1x+C_2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{8}\cos 2x+C_1x^2+C_2x+C_3$$

Заметим, как и следовало ожидать для дифференциального уравнения 3-го порядка, его общее решение содержит три произвольные постоянные. ■

☹ **ПРИМЕР 2.** Решить уравнение $xy''-2y'=x^2$.

☺ **Решение.** Дифференциальное уравнение имеет 2-й порядок и ***не содержит явно неизвестную функцию y***. Его порядок можно понизить, если ввести новую неизвестную функцию $p(x)$ по формулам

$$y'=p(x)$$
$$y''=p'(x)$$

Тогда получаем

$$xp' - 2p = x^2,$$

т.е. линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка для неизвестной функции $p(x)$.

Чтобы решить полученное уравнение, выполним замену

$$p = uv; \quad p' = u'v + uv'$$

Получим

$$xu'v + xuv' - 2uv = x^2;$$

$$v(xu' - 2u) + xuv' = x^2 \qquad (*)$$

Приравниваем к нулю выражение, стоящее в скобках:

$$xu' - 2u = 0 \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = 2u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = 2\frac{dx}{x}$$

После интегрирования находим функцию $u(x)$:

$$\int\frac{du}{u} = 2\int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = 2\ln|x|;$$

$$u = x^2$$

Подставляем найденную функцию $u(x)$ в уравнение (*):

$$x^3v' = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int dv = \int\frac{dx}{x};$$

$$v = \ln|x| + 3C_1$$

Теперь можно записать выражение для введенной выше функции $p(x)$:

$$p = uv = x^2(\ln|x| + 3C_1)$$

Исходную неизвестную функцию $y(x)$ можно найти, используя соотношение $y' = p(x)$:

$$y' = x^2(\ln|x| + 3C_1)$$

Тогда, выполняя интегрирование, получим

$$y=\int(x^2\ln|x|+3C_1x^2)\,dx=\frac{1}{3}\int\ln|x|\,dx^3+C_1x^3=$$

$$=\frac{1}{3}\left(x^3\ln|x|-\int x^3d\ln|x|\right)+C_1x^3=\frac{1}{3}\left(x^3\ln|x|-\int x^2dx\right)+C_1x^3$$

Теперь, окончательно, находим ***общее решение*** исходного дифференциального уравнения 2-го порядка (оно, как это следует из теории, содержит две произвольные постоянные):

$$y=\frac{1}{3}x^3\ln|x|-\frac{1}{9}x^3+C_1x^3+C_2 \quad ■$$

☹ **ПРИМЕР 3.** Решить уравнение $yy''-(y')^2+y(y')^3=0$

☺ **Решение.** Данное дифференциальное уравнение 2-го порядка ***не содержит явно переменную x***. Порядок уравнения можно понизить, если ввести новую неизвестную функцию $p(y)$ по формулам

$$y'=p(y)$$

$$y''=p\frac{dp}{dy}$$

Новая функция $p(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2+yp^3=0 \quad \Rightarrow \quad p\left(y\frac{dp}{dy}-p+yp^2\right)=0$$

Здесь возможны два случая:

1) $p=0$. Тогда $y'=0$, или $y=C$;

2) $y\frac{dp}{dy}-p+yp^2=0$. Это выражение представляет собой дифференциальное уравнение Бернулли с показателем степени $\alpha=2$ относительно неизвестной функции $p(y)$. Для его решения выполняем замену

$$p=uv; \quad p'=u'v+uv'$$

(Здесь штрих означает производную по переменной y).

Тогда уравнение перепишется в виде

$$y(u'v+uv')-uv+y(uv)^2=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad yu'v+yuv'-uv+yu^2v^2=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v(yu'-u)+yuv'+yu^2v^2=0 \qquad (*)$$

Как обычно, будем искать функцию $u(y)$, которая бы обратила в нуль выражение в скобках:

$$yu'-u=0 \quad \Rightarrow \quad y\frac{du}{dy}=u \quad \Rightarrow \quad \int\frac{du}{u}=\int\frac{dy}{y}$$

Отсюда

$$\ln|u|=\ln|y| \quad \Rightarrow \quad u=y$$

Подставляем найденную функцию в уравнение (*):

$$y^2v'+y^3v^2=0 \quad \Rightarrow \quad y^2\frac{dv}{dy}=-y^3v^2 \quad \Rightarrow \quad -\int\frac{dv}{v^2}=\int y\,dy$$

Как будет понятно из следующей строки, знак «минус» здесь удобней оставить в левой части уравнения:

$$\frac{1}{v}=\frac{y^2}{2}+\frac{C_1}{2}$$

(Еще одна частая ошибка, совершаемая студентами в этом месте, это «переворачивание дробей»: $\frac{1}{v}=\frac{y^2}{2}+\frac{C_1}{2} \overset{???}{\Rightarrow} v=\frac{2}{y^2}+\frac{2}{C_1}$, что, разумеется, неверно). На самом деле, чтобы найти функцию $v(y)$, нужно провести преобразования:

$$\frac{1}{v}=\frac{y^2+C_1}{2} \quad \Rightarrow \quad v=\frac{2}{y^2+C_1}$$

Таким образом, функция $p(y)$ найдена:

$$p=uv=\frac{2y}{y^2+C_1}$$

Теперь осталось только вспомнить, как была определена эта функция:

$$p(y) = y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2y}{y^2 + C_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{y^2 + C_1}$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем ***общий интеграл*** исходного дифференциального уравнения:

$$\frac{\left(y^2 + C_1\right)dy}{y} = 2dx \quad \Rightarrow \quad \int\left(y + \frac{C_1}{y}\right)dy = 2\int dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + C_1 \ln|y| = 2x + C_2 \ . \ \blacksquare$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $y''' = x^2 + \cos 3x + 2$

2. $y'' - \frac{1}{x}y' = x^2$

3. $y''(e^x + 1) + y' = 0,$
   $y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$

4. $y^2 + (y')^2 - 2yy'' = 0,$
   $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

5. $2yy'' + (y')^2 = 0$

6. $y'' = (y')^2$

Домашнее задание.

1. $x^3 y^{(\mathrm{IV})} = 4 - x$

2. $xy'' = y' + x\sin\frac{y'}{x}$

3. $xy'' = y' + x\left(y'\right)^2 + x^3$

4. $xy''\ln x = \left(y'\right)^2$

5. $3y'' = \left(1 + \left(y'\right)^2\right)^{3/2}$

6. $y'' = y'\ln y'$

7. $yy'' = 1 + \left(y'\right)^2$

8. $yy'' + (y')^2 = 5$

Занятие пятое

Тема:

«Решение дифференциальных уравнений разных типов».

Теоретические вопросы:

1. Определить тип дифференциальных уравнений (не решая их):

а) $y' \sin x + \dfrac{y}{\operatorname{tg} 2x} = \ln x$

б) $\dfrac{y'}{x^2} + \dfrac{y}{x^3} = \dfrac{x}{y^3}$

в) $xy'' - \dfrac{y'}{x} = x \ln x$

г) $y' = \dfrac{x^2 - 3xy - y^2}{2x^2 + xy + y^2}$

д) $yy'' + \dfrac{y'}{y} = y^5$

е) $xy' + 3y = \sqrt[3]{x^3 + xy^2 + 2y^3}$

ж) $yy' + y^2 \cdot \sqrt{x+1} = \cos x$

з) $\left(x^2 y + x\right) y' = y$

2. Как можно понизить порядок уравнений

а) $y'' = (y')^4$

б) $y''' - xy'' = 2$

б) $yy''' - (y')^2 = 5$

в) $y'''' - 2y'' = x + 3$

г) $y''' = \sin 2x + x^4$

☹ **Задача о растекании капли вязкой жидкости.**

На гладкую горизонтальную поверхность нанесена осесимметричная капля вязкой жидкости. На рис. 1 представлено вертикальное сечение капли, проходящее через ось ее симметрии. Пятно контакта капли с поверхностью представляет собой круг радиуса $r(t)$, где t – время. Из гидродинамики известно, что скорость растекания капли обратно пропорциональна девятой степени радиуса пятна контакта. В начальный момент времени капля имела радиус $r_0 = 1$ см и скорость растекания $v_0 = 0{,}1$ см/с. Найти, каков будет радиус растекания капли через 10 минут после начала процесса?

☺ **Решение.** По условию задачи скорость растекания капли $v(t)$ пропорциональна радиусу растекания $r(t)$ в минус девятой степени, т.е.

$$v(t) = k \cdot r^{-9},$$

где k – коэффициент пропорциональности.

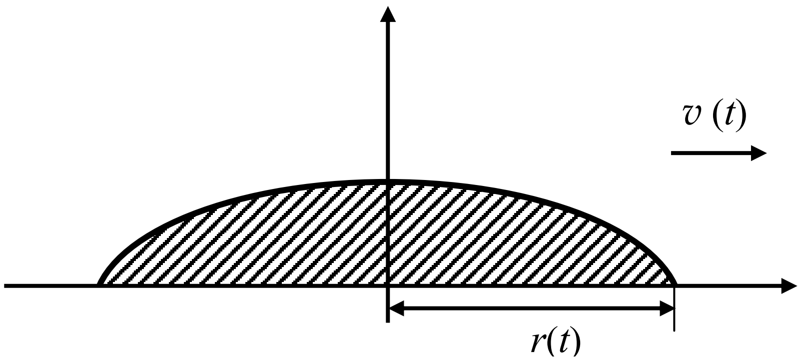


Рис. 1. К задаче о растекании вязкой капли.

Скорость движения, как известно, представляет собой производную по времени от перемещения тела, т.е. $v = \dfrac{dr}{dt}$. Тогда радиус растекания капли удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dr}{dt} = k \cdot r^{-9}$$

с начальными условиями

$$r(0)=r_{o}, \quad r'(0)=v_{o}$$

Разделяя в уравнении переменные, получим

$$r^{9}dr=kdt \quad \Rightarrow \quad \frac{r^{10}}{10}=kt+\frac{C}{10} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r=(10kt+C)^{0,1}$$

В начальный момент времени имеем $t=0, r=r_{o}, v=v_{o}$. Тогда

$$r_{o}=C^{0,1},$$

$$v_{o}=\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0}=k(10kt+C)^{-0,9}\Big|_{t=0}=k\,C^{-0,9}$$

Отсюда находим постоянную интегрирования C и коэффициент пропорциональности k:

$$C=r_{o}^{10},$$

$$k=v_{o}C^{0,9}=v_{o}r_{o}^{9}$$

Теперь с учетом найденных значений C и k можно написать закон растекания капли вязкой жидкости по гладкой горизонтальной поверхности:

$$r=(10v_{o}r_{o}^{9}t+r_{o}^{10})^{0,1}$$

или

$$r=r_{o}(\frac{t}{t_{o}}+1)^{0,1}, \qquad (1)$$

где $t_{o}=\dfrac{r_{o}}{10v_{o}}$ – характерное время процесса растекания.

Подставляя в закон растекания (1) заданные начальные условия $r_{o}=1$ см, $v_{o}=0,1$ см/с, получим

$$r=(t+1)^{0,1} \text{ (см)}$$

В момент времени t = 10 мин. = 600 с радиус растекания капли составит

$$r=(600+1)^{0,1}\approx 1,9 \text{ см.}$$

Таким образом, радиус пятна контакта капли жидкости с подложкой за время растекания увеличится почти в два раза по сравнению со своим начальным значением.

☝ **Замечание.** Отметим, что согласно полученному в задаче закону растекания (1), радиус капли неограниченно увеличивается со временем, т.е. в задаче имеет место случай, так называемого, полного смачивания. Для случая частичного смачивания, характерного, в частности, для многих углеводородных жидкостей, капля со временем стремится занять положение с конечным радиусом пятна смачивания. ■

Примеры для самостоятельного решения.

1. $(1+x^2)y''-2xy'=2(1+x^2)^2,$ $y(0)=2,\ y'(0)=0$
2. $yy''-\left(y'\right)^2=y^4,$ $y(0)=1,\ y'(0)=1$
3. $xy'\cos\dfrac{y}{x}=y\cos\dfrac{y}{x}+x$
4. $y=x(y'-x\cos x)$
5. $y'''-xy''=0$
6. $(x^2y+x)y'=y$

Домашнее задание.

1. $y''=\dfrac{1}{x^2}+e^{3x}$
2. $y''(1+x^2)=4$
3. $2xy'y''=\left(y'\right)^2$
4. $2yy''=y^2+\left(y'\right)^2$
5. $xy''=y'+x\sin\dfrac{y'}{x}$
6. $y''\left(2y'+x\right)=1$
7. $yy''=yy'+\left(y'\right)^2$
8. $xy'''-y''=0$

Занятие шестое

Темы:

«Однородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами».

«Неоднородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида

$$f(x) = P_n(x)e^{ax} \tag{\#}$$

Сведения из теории:

Дифференциальные уравнения вида

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

где p и q – постоянные, называются ***линейными дифференциальными уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами***. В случае $f(x) = 0$ уравнение называется ***однородным***, а при $f(x) \neq 0$ – ***неоднородным***.

Для решения однородного уравнения

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{I}$$

следует записать его характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{$*$}$$

Дискриминант этого квадратного уравнения обозначим через

$$D = p^2 - 4q$$

В зависимости от вида корней характеристического уравнения могут возникнуть три различных случая:

1) $D > 0$. Уравнение $(*)$ имеет два различных действительных корня:

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}; \quad (k_1 \neq k_2)$$

В этом случае общее решение однородного уравнения (I) записывается в виде

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

2) $D = 0$. Уравнение $(*)$ имеет два совпадающих действительных корня:

$$k_{1,2} = \frac{-p}{2}; \quad (k_1 = k_2 = k)$$

В таком случае общее решение однородного уравнения (I) имеет вид

$$y = (C_1 x + C_2) e^{kx}$$

3) $D < 0$. Характеристическое уравнение ($*$) имеет пару комплексно сопряженных корней:

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{(-1)(-D)}}{2} = \frac{-p \pm i\sqrt{-D}}{2}$$

или

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

где

$$\alpha = \frac{-p}{2}, \ \beta = \frac{\sqrt{-D}}{2}$$

соответственно, действительная и мнимая часть корня.

Общее решение однородного уравнения (I) в этом случае имеет вид

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$$

Для решения неоднородного уравнения

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad \text{(II)}$$

нужно найти какое-либо его частное решение $y_ч$. Тогда общее решение уравнения (II) записывается в виде

$$y = y_ч + y_о,$$

где $y_о$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (I).

Если правая часть $f(x)$ дифференциального уравнения (II) имеет специальный вид, существует общий подход к поиску его частного решения.

Для правой части вида

$$f(x) = P_n(x) e^{ax}, \qquad (\#)$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, частное решение ищется в различных видах в зависимости от соотношения между показателем степени a и корнями k_1 и k_2 характеристического уравнения (∗):

1) В случае $a \neq k_1 \neq k_2$ частное решение уравнения (II) имеет вид

$$y_ч = Q_n(x)e^{ax},$$

где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами. (Поиск неопределенных коэффициентов проводится путем подстановки выражения для $y_ч$ в исходное дифференциальное уравнение (II)).

2) В случае $a = k_1 \neq k_2$ частное решение уравнения (II) следует искать в виде

$$y_ч = x \cdot Q_n(x)e^{ax}$$

3) В случае $a = k_1 = k_2$ частное решение уравнения (II) имеет вид

$$y_ч = x^2 \cdot Q_n(x)e^{ax}$$

<u>Теоретические вопросы:</u>

1. Какие из написанных ниже дифференциальных уравнений являются однородными линейными уравнениями 2-го порядка с постоянными коэффициентами? Какие из них имеют правую часть вида (#)? Укажите степень n многочлена $P_n(x)$:

   а) $3y'' - y' = 0$

   б) $xy'' - y' + 2y = 0$

   в) $2y'' - 3y' + y = xe^{2x}$

   г) $y'' - y' + 4y = 5$

   д) $3y'' - 7y' + y = e^{-3x}$

   е) $y'' + 8y' - 6y = x^2 - 4$

2. Написать общий вид однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Что называется его характеристическим уравнением?
3. Какой вид имеет решение однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами для трех возможных случаев корней его характеристического уравнения?
4. Какова структура общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения?
5. В каком виде следует искать частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида (#) для случаев:

   а) число ***a*** не совпадает с корнями характеристического уравнения;

   б) число ***a*** совпадает с одним из корней характеристического уравнения;

   в) число ***a*** совпадает с обоими корнями характеристического уравнения.

😐 **ПРИМЕР 1.** Решить уравнение $2y'' - 3y' + y = 0$.

☺ **Решение.** Имеем ***однородное*** линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Запишем и решим его характеристическое уравнение:

$$2k^2 - 3k + 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \quad \Rightarrow$$

$$k_1 = 1; \quad k_2 = \frac{1}{2}; \quad (k_1 \neq k_2)$$

Поскольку корни характеристического уравнения действительные и различные, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Тогда, окончательно, имеем общее решение уравнения

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{x/2} \quad \blacksquare$$

☹ **ПРИМЕР 2.** Решить уравнение $y'' + 6y' + 9y = 0$

☺ **Решение.** Это ***однородное*** линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Решим соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^2 + 6k + 9 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$k_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-9}}{1} \quad \Rightarrow$$

$$k_1 = k_2 = -3; \quad (k_1 = k_2)$$

Корни уравнения действительные и совпадающие, следовательно, общее решение дифференциального уравнения записывается в виде

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{kx},$$

где $k = k_1 = k_2$.

Подставив значение k, получим

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{-3x} \quad \blacksquare$$

☹ **ПРИМЕР 3.** Решить уравнение $y'' - 6y' + 25y = 0$

☺ **Решение.** В данном случае характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня:

$$k^2 - 6k + 25 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$k_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-25} = 3 \pm \sqrt{-16} =$$

$$= 3 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)} = 3 \pm 4\sqrt{-1} = 3 \pm 4i$$

Таким образом, здесь $\alpha = 3; \quad \beta = 4$, где α – действительная часть корня, β – мнимая часть.

Общее решение дифференциального уравнения в случае комплексных корней характеристического уравнения записывается в виде

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$$

или, с учетом найденных значений α и β,

$$y = e^{3x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right) \quad \blacksquare$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $2y'' + 7y' + 5y = 0$	2. $y'' + 10y' + 6y = 0$
3. $4y'' + 12y' + 9y = 0$	4. $y'' + 25y = 0$
5. $y'' + 25y' = 0$	6. $y'' + 4y' + 29y = 0$

☹ **ПРИМЕР 4.** Решить уравнение $y'' + 2y' = (3x+1)e^x$

☺ **Решение.** Данное ***неоднородное*** линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет правую часть вида (#). Решение задачи будет состоять из трех пунктов.

1) Решим соответствующее однородное уравнение

$$y'' + 2y' = 0$$

Его характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня:

$$k^2 + 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0, \quad k_2 = -2; \quad (k_1 \neq k_2)$$

Тогда ***общее решение однородного уравнения*** имеет вид

$$y_o = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{-2x},$$

или

$$\underbrace{y_o = C_1 + C_2 e^{-2x}}$$

2) Найдем какое-либо частное решение неоднородного уравнения. Его правая часть имеет вид (#):

$$f(x) = (3x+1)e^x,$$

причем

$$a = 1, \quad n = 1,$$
$$a \neq k_1, \quad a \neq k_2$$

В данном случае частное решение уравнения следует искать в виде

$$y_ч = Q_1(x)e^{ax}$$

где $Q_1(x)$ – многочлен 1-ой степени с неопределенными коэффициентами:

$$Q_1(x) = Ax + B$$

Тогда

$$\begin{array}{c|l} 0 & y_ч = (Ax+B)e^x \\ 2 & y_ч' = Ae^x + (Ax+B)e^x \\ 1 & y_ч'' = Ae^x + Ae^x + (Ax+B)e^x \end{array}$$

Подставим полученные выражения в исходное неоднородное уравнение (для удобства слева от вертикальной черты выписываем коэффициенты, с которыми соответствующие производные неизвестной функции входят в левую часть дифференциального уравнения):

$$2Ae^x + (Ax+B)e^x + 2\left(Ae^x + (Ax+B)e^x\right) = (3x+1)e^x$$

Или, сокращая обе части равенства на e^x,

$$4A + 3B + 3Ax = 3x + 1$$

В соответствии с идеей метода неопределенных коэффициентов нужно приравнять коэффициенты, стоящие перед одинаковыми степенями переменной x в левой и правой частях полученного равенства:

$$x^1: \qquad 3A = 3$$
$$x^0: \qquad 4A + 3B = 1$$

Решая получившуюся систему алгебраических уравнений, находим значения неизвестных: $A = 1$, $B = -1$. Теперь может быть записано ***частное решение неоднородного уравнения***:

$$y_ч = (x-1)e^x$$

3) ***Общее решение*** исходного ***неоднородного дифференциального уравнения*** представляет собой сумму общего решения $y_о$ однородного уравнения и частного решения $y_ч$ неоднородного уравнения:

$$y = y_ч + y_о.$$

Подставив сюда полученные в пп. 1) и 2) выражения для функций $y_о$ и $y_ч$, получим ***общее решение*** заданного уравнения:

$$y = (x-1)e^x + C_1 + C_2 e^{-2x},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. ■

☹ **ПРИМЕР 5.** Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 10e^{2x}$ с начальными условиями $y(0) = 3,\ y'(0) = 7$.

☺ **Решение.** Имеем задачу Коши для ***неоднородного*** линейного дифференциального уравнения с правой частью вида (#). Её решение распадается на 4 пункта:

1) Решим соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Его характеристическое уравнение имеет два совпадающих корня:

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-4}, \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = 2$$

Общее решение однородного уравнения для такого случая записывается в виде

$$y_о = (C_1 x + C_2)e^{kx}$$

или

$$\underbrace{y_{о} = (C_1 x + C_2)e^{2x}}_{},$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы.

2) Правая часть неоднородного уравнения имеет вид (#):

$$f(x) = 10e^{2x}$$

Здесь $a = 2$ (коэффициент в показателе степени экспоненты), $n = 0$ (степень многочлена, стоящего перед экспонентой). Поскольку имеет место случай $a = k_1 = k_2$, частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$y_{ч} = x^2 Q_0(x)e^{ax},$$

где $Q_0(x)$ – многочлен нулевой степени с неопределенными коэффициентами:

$$Q_0(x) = A$$

Тогда

$$\begin{array}{r|l} 4 & y_{ч} = Ax^2 e^{2x} \\ -4 & y'_{ч} = 2Axe^{2x} + 2Ax^2 e^{2x} = 2A(x + x^2)e^{2x} \\ 1 & y''_{ч} = 2A(1 + 2x)e^{2x} + 4A(x + x^2)e^{2x} = 2A(1 + 4x + 2x^2)e^{2x} \end{array}$$

Подставляя полученные выражения для $y_{ч}, y'_{ч}, y''_{ч}$ в исходное дифференциальное уравнение, получим тождество:

$$Ae^{2x}\left(2(1 + 4x + 2x^2) - 8(x + x^2) + 4x^2\right) = 10e^{2x};$$

$$2Ae^{2x} = 10e^{2x};$$

$$A = 5$$

Таким образом, найдено ***частное решение*** исходного ***неоднородного дифференциального уравнения***:

$$\underbrace{y_{ч} = 5x^2 e^{2x}}_{}$$

(Это частное решение, естественно, не является решением задачи, т.к. не удовлетворяет заданным начальным условиям).

3) Теперь можно записать ***общее решение*** исходного ***неоднородного дифференциального уравнения***:

$$y = y_{ч} + y_{о} \quad \Rightarrow$$

$$\underbrace{y = 5x^2 e^{2x} + (C_1 x + C_2) e^{2x}}$$

4) Осталось найти произвольные постоянные C_1 и C_2 так, чтобы удовлетворить начальным условиям $y(0) = 3,\ y'(0) = 7$.

Подставляя в общее решение значения $x = 0, y = 3$, получим

$$3 = C_2$$

Теперь найдем производную от общего решения:

$$y = 5x^2 e^{2x} + (C_1 x + C_2) e^{2x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y' = \left(10x + 10x^2 + C_1 + 2C_1 x + 2C_2\right) e^{2x}$$

Подставив сюда значения $x = 0, y' = 7$, получим

$$7 = C_1 + 2C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 7 - 2C_2 = 7 - 2 \cdot 3 = 1$$

Теперь, зная значения C_1 и C_2 , можно записать решение поставленной задачи Коши:

$$\underbrace{y = 5x^2 e^{2x} + (x+3) e^{2x} = (5x^2 + x + 3) e^{2x}} \quad \blacksquare$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $2y'' + 3y' - 5y = 10$
2. $y'' + 3y' - 4y = (10x + 17)e^{x}$
3. $y'' - 5y' + 6y = 4e^{-x}$
4. $y'' - 5y' - 6y = 3e^{-x}$
5. $y'' - 2y' - 8y = x^2 + 3$
6. $y'' - 6y' - 8y = 3e^{3x}$

Домашнее задание.

1. $y'' - 4y' = 0$
2. $y'' - 4y = 0$
3. $2y'' - y' - y = 0$
4. $3y'' + y' + 2y = 0$
5. $y'' - 8y' + 16y = 4$
6. $y'' - 10y' + 26y = x^2$
7. $y'' + y' = xe^x$
8. $y'' + 3y' + 2y = (x-2)e^{-x}$

Занятие седьмое

Тема:

«Неоднородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида

$$f(x) = \left(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right)e^{ax} \qquad (♒)$$

Сведения из теории:

Если неоднородное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad \text{(II)}$$

имеет правую часть вида

$$f(x) = \left(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right)e^{ax},$$

где $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены соответствующей степени, то поиск его частного решения проводится по следующему правилу:

1) В случае, если комплексное число $z = a + bi$ является корнем характеристического уравнения (∗), то частное решение имеет вид

$$y_ч = e^{ax}(S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx),$$

где $S_N(x), T_N(x)$ – многочлены степени N с неопределенными коэффициентами, а их степень N представляет собой наибольшую из степеней n и m: $N = \max(n, m)$

2) Если комплексное число $z = a + bi$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения (*), то частное решение уравнения (II) следует искать в виде

$$y_ч = x \cdot e^{ax}(S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx).$$

Теоретические вопросы:

1. Какие из написанных ниже дифференциальных уравнений представляют собой неоднородные линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и имеют правую часть вида (♒)? Укажите степени n и m многочленов, а также значения параметров a и b:

   а) $y'' + 3y' - y = x\cos 3x + (x^2 - 2)\sin 3x$

   б) $y'' + 3y = e^{-2x} x\sin 5x$

   в) $y'' - 2y' + y = e^{3x}(x\sin 5x - 2\cos 2x)$

   г) $y'' - 7y' + 4y = e^{-x}(4\cos x + x^3 \sin x)$

2. В каком виде следует искать частное решение неоднородного уравнения с правой частью вида (♒) в случаях:

   а) число $z = a + bi$ не является корнем характеристического уравнения;

   б) число $z = a + bi$ является корнем характеристического уравнения?

3. Как следует искать частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если его правая часть представляет сумму нескольких слагаемых вида (#) из занятия 6 или вида (♒) из занятия 7?

☺ **ПРИМЕР 1.** Указать вид частного решения (не находя значений неопределенных коэффициентов) уравнения $y'' + 4y' + 13y = e^{-x}(x\cos 3x + \sin 3x)$.

☺ **Решение.** Правая часть заданного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид (♒).

Решаем характеристическое уравнение

$$k^2 + 4k + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-9} - = -2 \pm 3i$$

Правая часть уравнения имеет вид (♒) со значениями коэффициентов:

$a = -1$; $b = 3$; $n = 1$; $m = 0$.

Число $z = a + bi = -1 + 3i$ не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, частное решение следует искать в виде

$$y_ч = e^{ax}(S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx),$$

где $N = \max(n, m) = 1$ представляет собой степень многочленов с неопределенными коэффициентами.

Подставляя значения параметров, получим искомый ***вид частного решения уравнения***:

$$y_ч = e^{-x}(S_1(x)\cos 3x + T_1(x)\sin 3x)$$

или

$$y_ч = e^{-x}((Ax + B)\cos 3x + (Cx + D)\sin 3x)$$

Заметим, что неопределенные коэффициенты многочленов S_1 и T_1, вообще говоря, различны, поэтому при их записи должны использоваться разные буквенные обозначения. ■

☹ **ПРИМЕР 2.** Указать вид частного решения уравнения

$$y'' - 2y' + 2y = x^3 e^x \cos x$$

☺ **Решение.** Находим корни характеристического уравнения:

$$k^2 - 2k + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 2} = 1 \pm i$$

Правая часть дифференциального уравнения имеет вид (♒), причем

$a = 1$; $b = 1$; $n = 3$; $m = 0$.

Число $z = a + bi = 1 + i$ есть корень характеристического уравнения. В этом случае частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$y_ч = xe^{ax}(S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx)$$

(т.е. с дополнительным множителем x).

Подставляя значения параметров a, b и величину $N = \max(n, m) = 3$, получим ***вид частного решения неоднородного уравнения***:

$$y_ч = xe^{x}(S_3(x)\cos x + T_3(x)\sin x)$$

или

$$y_ч = xe^{x}\Big((Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x + \\ +(Ex^3 + Fx^2 + Gx + H)\sin x\Big)$$

Заметим, что вычисление восьми неопределенных коэффициентов представляет собой весьма громоздкую задачу, в ходе которой необходимо решить систему из восьми линейных алгебраических уравнений. Эту задачу лучше поручить компьютеру. Используя программу «*Mathematica*», принципы работы с которой описаны в Приложении 2, можно быстро найти требуемые значения коэффициентов. Приведем их для сведения:

$$A = 0,\ B = \frac{1}{4}, C = 0,\ D = -\frac{3}{8},\ E = \frac{1}{8}, F = 0,\ G = -\frac{3}{8},\ H = 0.\ ■$$

☹ **ПРИМЕР 3.** Решить уравнение $y'' + 4y = 7\sin 2x$.

☺ **Решение.** Имеем ***неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами***, правая часть которого имеет вид (♒).

1) Сначала решим соответствующее однородное уравнение

$$y'' + 4y = 0$$

Его характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня:

$$k^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i,$$

т.е. здесь $\alpha = 0$, $\beta = 2$.

Для данного случая ***общее решение однородного уравнения*** записывается в виде:

$$y_{\text{о}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

2) Правая часть исходного неоднородного уравнения имеет вид (♒):

$$f(x) = 7 \sin 2x$$

Здесь $a = 0$ (множитель e^{ax} отсутствует); $b = 2$; $n = m = 0$ (многочлены имеют нулевую степень).

Число $z = a + bi = 2i$ является корнем характеристического уравнения, следовательно частное решение нужно искать в виде

$$y_{ч} = xe^{ax}(S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx)$$

или

$$y_{ч} = x(S_0(x)\cos 2x + T_0(x)\sin 2x)$$

(Здесь $N = \max(n, m) = 0$).

Многочлены нулевой степени по x представляют собой константы, поэтому

$$y_{ч} = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

Дифференцируя $y_{ч}$, получаем

$$y'_{ч} = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)$$

$$y''_{ч} = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)$$

Теперь подставим выражения для функции $y_{ч}$ и ее производных в исходное дифференциальное уравнение:

$$y''_{ч} + 4y_{ч} = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) +$$
$$+4x(A\cos 2x + B\sin 2x) = 4\sin 2x;$$

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 4\sin 2x$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях полученного тождества:

$$\sin 2x\textbf{:}\qquad -4A = 7$$

$$\cos 2x\textbf{:}\qquad 4B = 0$$

Отсюда находим значения коэффициентов: $A = -4/7,\ B = 0$, что дает возможность записать ***частное решение неоднородного уравнения***:

$$y_ч = -\frac{7}{4}x\cos 2x$$

(Интересно заметить, что хотя в правой части уравнения была функция $\sin 2x$, частное решение уже содержит функцию $\cos 2x$ – известное в механике изменение фазы вынужденных колебаний).

3) ***Общее решение*** исходного ***неоднородного дифференциального уравнения*** получается суммированием функций, найденных в пп. 2) и 3):

$$y = y_о + y_ч = -\frac{7}{4}x\cos 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x \quad \blacksquare$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. Указать вид частного решения уравнений:

а) $y'' + 4y' + 13y = e^{-2x}x\sin x$

б) $y'' - 2y' + y = e^{x}\cos x$

в) $y'' + 4y' + 4y = e^{3x}(\sin 2x + x^2\cos 2x)$

2. Решить уравнения:

а) $y'' - y' = 3\sin 5x$ б) $y'' + 81y = 5\cos 9x$

в) $y'' + 2y' + y = e^{x}\cos x$ г) $y'' - 3y' = x\sin 2x$

д) $y'' + 9y = 2\cos x + 3\sin 3x$ е) $y'' + 5y' = (x-4)\sin 5x$

Домашнее задание.

1. Указать вид частного решения уравнений:

а) $y'' + 2y' - 8y = \left(x\sin x + 2\cos x\right)e^{2x}$

б) $y'' + 4y' + 5y = \left(\sin x + (x-3)\cos x\right)e^{-2x}$

в) $3y'' - 2y' - y = x^2\cos x + e^{2x}\sin x$

2. Решить уравнения:

а) $y'' + y = \sin 4x$ б) $y'' + 2y' + 2y = 3\cos x$

в) $y'' - 2y' + 5y = 3e^{x}\cos 2x$ г) $y'' + y = 2\sin x + e^{-x}$

😐 Задача о нехорошем мальчике.

Нехороший мальчик выкинул из окна 15-го этажа кашу «Геркулес», которую бабушка сварила ему на завтрак. Известно, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости полета каши. Через четыре секунды каша пролетела мимо окна 8-го этажа. Выясните, через сколько секунд каша попадет на новую шляпку прогуливающейся у дома тети Жени, если высота каждого этажа дома, где живет мальчик, равна 2,5 метрам?

☺ Решение задачи о нехорошем мальчике.

Пусть $x(t)$ – перемещение каши по направлению к земле за время t после ее вылета из окна, а m – масса каши. Используя второй закон Ньютона, запишем уравнение, описывающее движение каши:

$$m\ddot{x} = -k\dot{x} + mg,$$

где k – коэффициент пропорциональности, g – ускорение силы тяжести, а точкой обозначена производная по времени t, т.е. $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

Перепишем уравнение движения в виде

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} = g, \quad \lambda = \frac{k}{m},$$

Полученное уравнение – неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Правая часть уравнения представляет собой постоянную, т.е. многочлен нулевой степени. Решая уравнение уже знакомым методом, получим его общее решение:

$$x = C_1 + C_2 e^{-\lambda t} + \frac{g}{\lambda} t$$

В начальный момент времени перемещение и вертикальная составляющая скорости равны нулю:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

поэтому

$$C_1 + C_2 = 0, \quad -\lambda C_2 + \frac{g}{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -C_2 = -\frac{g}{\lambda^2},$$

и закон движения выброшенной каши, т.е. зависимость её перемещения x от времени t, имеет вид

$$x = -\frac{g}{\lambda^2}\left(1 - \lambda t - e^{-\lambda t}\right) \tag{*}$$

Для нахождения коэффициента λ имеем условие:

$x = 7{\cdot}2{,}5$ (м) при $t = 4$ (с)

(ведь до окна 8-го этажа каше пришлось преодолеть семь этажей по 2,5 метра). Получаем тогда из (*) алгебраическое уравнение:

$$17{,}5 = -\frac{g}{\lambda^2}\left(1 - 4\lambda - e^{-4\lambda}\right),$$

которое, однако, невозможно решить аналитически. А вот приближенное решение этого уравнения найти не сложно! Действительно, заметим, что величина $e^{-4\lambda}$ мала при $\lambda \geq 1$, а величина ускорения g силы тяжести приблизительно равна 10 (м/с^2). Тогда приходим к уравнению

$$17{,}5 = -\frac{10}{\lambda^2}\left(1-4\lambda\right)$$

Решая это квадратное уравнение, получим

$$\lambda = 2 \text{ (1/с)}.$$

(Объясните самостоятельно, почему второй корень квадратного уравнения оказался лишним!)

Теперь окончательно можно записать закон движения каши:

$$x = -\frac{g}{4}\left(1-2t-e^{-2t}\right) \qquad (**)$$

Теперь можно выяснить, когда каша долетит до шляпки тети Жени. Для этого в закон (**) надо подставить значение $x = 15\cdot 2{,}5$ (м), $g \approx 10$ (м/с^2) и опять отбросить малый экспоненциальный член e^{-2t}:

$$37{,}5 \approx -\frac{10}{4}\left(1-2t\right) \quad \Rightarrow \quad t \approx 8 \text{(с)}.$$

(Кстати, легко проверить, что при найденном значении времени t отброшенный нами в правой части равенства (**) член e^{-2t} имеет величину $e^{-2t} \approx e^{-16} \approx 0{,}00000011$, т.е. действительно мал по сравнению с оставленным членом $1 - 2t$).

Таким образом, каша «Геркулес», выброшенная нехорошим мальчиком, будет лететь до земли примерно 8 секунд. Отметим, что за это время тетя Женя вполне может удалиться от падающей каши на безопасное расстояние! ■

Приложение 1

Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, не вошедшие в основной курс.

Выше в пособии были представлены методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, наиболее часто встречающиеся на практике и входящие в основной курс высшей математики технических ВУЗ'ов. Однако этими методами и рассмотренными типами уравнений не исчерпываются все возможные случаи, когда дифференциальное уравнение может быть решено аналитически. Круг таких уравнений значительно шире. В приложении 1 описываются некоторые дополнительные методы и приемы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уравнения, сводящиеся к однородным.

Сведения из теории:

Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{mx + ny + p}\right)$$

можно ***свести к однородному***, если произвести сдвиг неизвестной функции y и независимой переменной x по формулам:

$$\tilde{x} = x - x_0$$
$$\tilde{y} = y - y_0$$

где значения x_0 и y_0 определяются из решения системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ mx_0 + ny_0 + p = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

☹ **ПРИМЕР 1.** Решить уравнение $y' = \dfrac{x+y+1}{x-y-3}$

☺ **Решение.** Заданное дифференциальное уравнение 1-го порядка можно ***свести к однородному***. Решая систему

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + 1 = 0 \\ x_0 - y_0 - 3 = 0 \end{cases}$$

получим $x_0 = 1, y_0 = -2$. Выполняя замену переменных

$$\tilde{x} = x - 1$$

$$\tilde{y} = y + 2$$

и учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d(\tilde{y}-2)}{d(\tilde{x}+1)} = \dfrac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}$, получим из исходного уравнения однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{\tilde{x}+1+\tilde{y}-2+1}{\tilde{x}+1-\tilde{y}+2-3} = \frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{\tilde{x}-\tilde{y}}$$

Для его решения вводим новую неизвестную функцию $u = u(x)$:

$$u = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}; \quad \tilde{y} = u\tilde{x}; \quad \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{du}{d\tilde{x}}\tilde{x} + u$$

В результате уравнение принимает вид

$$\frac{du}{d\tilde{x}}\tilde{x} + u = \frac{1+u}{1-u}$$

Теперь можно разделить переменные:

$$\frac{du}{d\tilde{x}}\tilde{x} = \frac{1+u}{1-u} - u = \frac{1+u^2}{1-u} \quad \Rightarrow \frac{(1-u)du}{1+u^2} = \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}}$$

и проинтегрировать обе части:

$$\int \frac{(1-u)du}{1+u^2} = \int \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|\tilde{x}| + C$$

Для того чтобы получить ***общий интеграл*** исходного уравнения, осталось лишь вернуться к исходным переменным:

$$\operatorname{arctg}\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right)^2\right)=\ln|\tilde{x}|+C \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y+2}{x-1}\right)^2\right)=\ln|x-1|+C \quad \blacksquare$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $y'=\dfrac{x+y-2}{2x-y-1}$

2. $y'=\operatorname{tg}\dfrac{y-2x-3}{x+1}+\dfrac{y-1}{x+1}$

3. $y'=2\left(\dfrac{y+3}{x+y}\right)^2$

4. $(x+3)y'=(y-2)\cos\ln\dfrac{y-2}{x+3}$

5. $y'=\dfrac{2x+y-1}{4x+2y-7}$

6. $(y-1+\sqrt{xy-x+y-1})dx=(x+1)dy$

Уравнения в полных дифференциалах.

Сведения из теории:

Уравнение вида

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (2)$$

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$ двух переменных. Функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ при этом должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Чтобы решить уравнение (2) нужно найти функцию $F(x, y)$, полный дифференциал которой стоит в левой части уравнения:

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

после чего общее решение уравнения (2) записывается в виде

$$F(x, y) = C$$

☝ **Замечание.** В некоторых случаях дифференциальное уравнение вида (2) можно свести к уравнению в полных дифференциалах с помощью почленного умножения на некоторую функцию двух переменных $\mu(x, y) \neq 0$, называемую ***интегрирующим множителем***. Общих методов поиска интегрирующего множителя не существует. Иногда его можно найти в виде $\mu(x, y) = x^a y^b$.

😐 **ПРИМЕР 2.** Решить уравнение

$$2xydx + (x^2 + 3y^2)dy = 0$$

☺ **Решение.** Поскольку выполнено условие

$$\frac{\partial(2xy)}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 + 3y^2)}{\partial x},$$

заданное дифференциальное уравнение является ***уравнением в полных дифференциалах***.

Найдем функцию $F(x, y)$, дифференциал которой стоит в левой части уравнения. Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 3y^2. \tag{3}$$

Поэтому

$$F(x, y) = \int 2xy\,dx = x^2 y + \varphi(y)$$

(Заметим, что поскольку интегрирование велось по переменной x, то произвольная постоянная интегрирования является функцией переменной y).

Теперь, используя второе из условий (3), получаем

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 y + \varphi(y))}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

Отсюда находим функцию $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3y^2 \quad \Rightarrow \varphi(y) = \int 3y^2 dy + C = y^3 + C$$

Таким образом, искомая функция $F(x, y)$ имеет вид

$$F(x, y) = x^2 y + y^3$$

Теперь можно записать ***общий интеграл*** исходного дифференциального уравнения:

$$x^2 y + y^3 = C \quad \blacksquare$$

☹ **ПРИМЕР 3.** Решить уравнение

$$3y(x+1)dx + x(3x+4)dy = 0 \tag{4}$$

☺ **Решение.** Попробуем найти для уравнения ***интегрирующий множитель*** вида $\mu(x, y) = x^a y^b$. При почленном умножении (4) на $\mu(x, y)$ должно получиться уравнение в полных дифференциалах:

$$3x^a y^{b+1}(x+1)dx + x^{a+1} y^b (3x+4)dy = 0,$$

т.е. должно быть выполнено тождество

$$\frac{\partial\left(3x^a y^{b+1}(x+1)\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(x^{a+1} y^b (3x+4)\right)}{\partial x}$$

Отсюда

$$3(b+1)x^a y^b (x+1) = \left(3(a+2)x^{a+1} + 4(a+1)x^a\right) y^b$$

Сократив тождество на $x^a y^b$, получим

$$3(b+1)(x+1) = 3(a+2)x + 4(a+1)$$

Отсюда следует, что должны быть выполнены соотношения

$$\begin{cases} 3(b+1) = 3(a+2) \\ 3(b+1) = 4(a+1) \end{cases}$$

Из этой системы получаем: $a = 2,\ b = 3$. Это означает, что уравнение

$$3x^2 y^4 (x+1)dx + x^3 y^3 (3x+4)dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах. Решаем его изложенным ранее методом:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 y^4 (x+1) \quad \Rightarrow \quad F(x,y) = \frac{3}{4} x^4 y^4 + x^3 y^4 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 y^3 (3x+4) \quad \Rightarrow \quad 3x^4 y^3 + 4x^3 y^3 + \varphi'(y) = x^3 y^3 (3x+4)$$

Отсюда $\varphi'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = const$. Тогда

$$F(x,y) = \frac{3}{4} x^4 y^4 + x^3 y^4,$$

и ***общий интеграл*** исходного уравнения записывается в виде

$$\frac{3}{4} x^4 y^4 + x^3 y^4 = C \quad \blacksquare$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $(2-3xy)xdx + (7-x^3)dy = 0$
2. $2ydx + x(y^4 + 2\ln x)dy = 0$
3. $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$
4. $y(1+xy)dx - x\,dy = 0$
5. $y^2 dx + (xy - \mathrm{tg}(xy))dy = 0$
6. $y^2 dx + (xy - 5)dy = 0$

Уравнения, не разрешенные относительно производной.

<u>Сведения из теории:</u>

Дифференциальные уравнения вида

$$y = f(x, y') \tag{5}$$

можно решить ***методом введения параметра***

$$p = y' \tag{6}$$

Тогда, взяв полный дифференциал от обеих частей уравнений (5), и учитывая зависимость $dy = pdx$, получим дифференциальное уравнение вида

$$M(x,p)dx + N(x,p)dp = 0$$

Если удается найти его решение $x=\varphi(p)$, то решение исходного уравнения записывается в параметрическом виде

$$\begin{cases} x=\varphi(p) \\ y=f(\varphi(p),p) \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения вида

$$x=f(y,y') \tag{7}$$

также решаются ***методом введения параметра*** (6).

Дифференцирование обеих частей уравнения (7) и использование соотношения $dx=\dfrac{dy}{p}$ сводит задачу к уравнению

$$M(y,p)dy+N(y,p)dp=0$$

Его решение $y=\varphi(p)$ вместе с соотношением (7) параметрически задают решение исходного уравнения:

$$\begin{cases} x=f(\varphi(p),p) \\ y=\varphi(p) \end{cases}$$

Уравнения вида (5) и (7) могут иметь также ***особое решение***, для каждой точки которого нарушается единственность решения. Для нахождения особого решения уравнения (5) нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} y=f(x,y') \\ \dfrac{\partial f(x,y')}{\partial y'}=0 \end{cases} \tag{8}$$

Для нахождения особого решения уравнения (7) записывается система

$$\begin{cases} x=f(y,y') \\ \dfrac{\partial f(y,y')}{\partial y'}=0 \end{cases} \tag{9}$$

Исключение из систем (8) или (9) переменной y' приводит к зависимости между переменными x и y, которая может оказаться особым решением исходного уравнения (а может и не оказаться!). Подтвердить или опровергнуть этот факт позволяет непосредственная подстановка полученного решения в исходное уравнение.

☹ **ПРИМЕР 4.** Решить уравнение $y = xy' + 3(y')^4$.

☺ **Решение.** Введем параметр

$$p = y'$$

Тогда уравнение принимает вид

$$y = xp + 3p^4$$

После дифференцирования получаем

$$dy = xdp + pdx + 12p^3dp$$

Учитывая, что $dy = pdx$, приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$\left(x + 12p^3\right)dp = 0$$

Здесь возможны два случая:

1) $dp = 0 \Rightarrow p = C$.

В этом случае **общее решение** исходного уравнения может быть найдено в явном виде:

$$\begin{cases} p = C \\ y = xp + 3p^4 \end{cases} \Rightarrow \quad y = Cx + 3C^4.$$

2) $x + 12p^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -12p^3$

Решение исходного уравнения в этом случае записывается параметрически в виде

$$\begin{cases} x = -12p^3 \\ y = xp + 3p^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -12p^3 \\ y = -9p^4 \end{cases}$$

Исключая из этой системы параметр p, получаем решение в явной форме

$$\frac{y^3}{x^4} = -\frac{9}{256} \quad \Rightarrow \quad y = -\sqrt[3]{\frac{9x^4}{256}} \tag{10}$$

Решение (10) является ***особым***. Его, как указывалось выше, можно было также получить, решая систему (8):

$$\begin{cases} y = xy' + 3(y')^4 \\ 0 = x + 12(y')^3 \end{cases}$$

Решение этой системы, как несложно заметить, совпадает с (10):

$$\begin{cases} y = xy' + 3(y')^4 \\ y' = -\left(\dfrac{x}{12}\right)^{1/3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = -x\left(\frac{x}{12}\right)^{1/3} + 3\left(\frac{x}{12}\right)^{4/3},$$

или

$$y = -\sqrt[3]{\frac{9x^4}{256}}$$

Проверка показывает, что найденная функция (10) удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению. ■

Примеры для самостоятельного решения.

1. $x = y' + (y')^3$

2. $y = (y')^2 + 4(y')^3$

3. $y' = y + \ln(y')$

4. $y = (1 + y')x + 3(y')^2$

5. $x = \dfrac{4y}{y'} - \dfrac{5}{(y')^3}$

6. $x = \dfrac{y - \sqrt{1 + (y')^2}}{y'}$

Обобщенно однородные уравнения.

<u>Сведения из теории:</u>

Если дифференциальное уравнение не изменяется при замене переменной x на величину kx, а переменной y на величину $k^m y$, (m = const), то оно называется ***обобщенно однородным***. Для решения обобщенно однородного уравнения производится замена переменных

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = z \cdot e^{mt} \end{cases} \tag{11}$$

где $z = z(t)$ – новая неизвестная функция, а t – новая независимая переменная. Полученное в новых переменных дифференциальное уравнение не содержит явно аргумент t и, следовательно, допускает понижение порядка.

✌ **Замечание.** На практике, для того, чтобы выяснить, является ли дифференциальное уравнение обобщенно однородным, и найти соответствующее число m, нужно приравнять показатели степени с основанием k для каждого из слагаемых в уравнении. При этом для переменной x соответствующий показатель есть 1, для функции y показатель степени равен m, для функции y' показатель равен $m-1$, для функции y'' показатель $m-2$ и т.д. Так, например, обобщенно однородным является уравнение $3x^2y'' + xy' = 5x^6$, поскольку приравнивание степеней с основанием k для его слагаемых дает

$$2 + (m-2) = 1 + (m-1) = 6,$$

откуда $m = 6$.

☹ **ПРИМЕР 5.** Решить уравнение $x^2 y'' = 2y + 3x^2$.

☺ **Решение.** Проверим, является ли заданное уравнение обобщенно однородным, и найдем показатель m:

$$2 + (m-2) = m = 2$$

Отсюда $m = 2$.

Для решения уравнения выполним замену

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = z(t) \cdot e^{2t} \end{cases} \tag{12}$$

Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(z \cdot e^{2t}\right)}{dt} : \frac{dx}{dt} = \left(\dot{z} \cdot e^{2t} + 2z \cdot e^{2t}\right) : e^t = \left(\dot{z} + 2z\right)e^t,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\left(\dot{z} + 2z\right)e^t\right)}{dt} : \frac{dx}{dt} = \left(\ddot{z} + 3\dot{z} + 2z\right)e^t : e^t = \ddot{z} + 3\dot{z} + 2z$$

Здесь точкой обозначена производная функции по переменной t, т.е.

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt}, \quad \ddot{z} = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

После проведенный замены переменных исходное уравнение примет вид

$$\left(\ddot{z} + 3\dot{z} + 2z\right)e^{2t} = 2ze^{2t} + 3e^{2t}$$

или, после упрощения,

$$\ddot{z} + 3\dot{z} = 3$$

Это дифференциальное уравнение не содержит явно переменную t, т.е. его порядок можно понизить. Однако проще найти общее решение уравнения, воспользовавшись тем, что оно оказалось линейным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Процедура решения таких дифференциальных уравнений рассматривалась выше в занятии 6. Выпишем решение этого уравнения, опуская выкладки:

$$z = C_1 + C_2 e^{-3t} + t$$

Теперь можно вернуться к исходным переменным, приняв во внимание зависимость (12):

$$y = z(t) \cdot e^{2t} \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + te^{2t}$$

Теперь, учитывая, что $t = \ln x$, окончательно получаем ***общее решение*** исходного уравнения:

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^{-1} + x^2 \ln x \quad \blacksquare$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $xyy'' + x(y')^2 = 3$
2. $x^2 y'' = 2y$
3. $xyy' = -y'(y + y'x)$
4. $yy' = 2x(y')^2 - 3xyy''$
5. $x^2 yy'' = x^2 (y')^2 + 2y^2$
6. $4x^2 y^3 y'' = x^2 - y^4$

Приложение 2

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений в компьютерной системе *"Mathematica"*.

В основной части данного пособия были рассмотрены обыкновенные дифференциальные уравнения первого и второго порядков, для которых общее решение может быть получено аналитически. Класс таких «решаемых» уравнений достаточно ограничен. Некоторое расширение класса «решаемых» дифференциальных уравнений описано в приложении 1. Возникает вопрос, а существуют ли еще какие-нибудь типы обыкновенных дифференциальных уравнений младших порядков, которые могли бы быть решены аналитически. Оказывается, существуют, но их не так много. Помимо этого существуют также дифференциальные уравнения, решения которых могут быть представлены через специальные функции, не выражаемые с помощью элементарных. В то же время и для сравнительно простых типов уравнений, в том числе и рассмотренных в настоящем пособии, нахождение решения дифференциального уравнения часто связано со значительным числом сложных математических преобразований.

Как же все-таки выяснить, может ли быть решено аналитически то или иное дифференциальное уравнение? Для этого нужно ответить на ряд вопросов:

принадлежит ли оно к «решаемому» типу? можно ли понизить его порядок и как? с какими интегралами придется иметь дело в процессе преобразований? и т.д. За последние годы издано большое число справочной литературы по обыкновенным дифференциальным уравнениям, но она, во-первых, не всегда оказываются под рукой, а, во-вторых, найти в ней нужное уравнение и провести с ним необходимые преобразования тоже не всегда просто. С другой стороны, в настоящее время рабочим инструментом любого исследователя (инженера, научного работника, студента) стал компьютер. Естественно ожидать, что компьютерные методы, в частности, могут быть использованы и при решении дифференциальных уравнений. Конечно, для этого нужно установить соответствующее программное обеспечение. Одним из наиболее удобных и мощных пакетов символьной математики, хотя, быть может и не самым распространенным, на наш взгляд является компьютерная система “*Mathematica*”, созданная в начале 90-х годов под руководством С. Вольфрама (*S.Wolfram*). Не вдаваясь в споры о преимуществах того или иного математического пакета, познакомимся с тем, как система “*Mathematica*” справляется с задачей решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$f(x, y, y') = 0 \qquad (\#)$$

Для его решения в системе “*Mathematica*” существует команда:

DSolve[*eqn*, *y*[*x*], *x*]

где ***eqn*** представляет собой запись уравнения (#) в соответствующих обозначениях. Так для примера 1, рассмотренного в первом занятии,

$$y' = e^{-y} \sin x \qquad (1)$$

запись в системе “*Mathematica*” выглядит следующим образом:

eq1=DSolve[y'[x]==E^(-y[x])Sin[x],y[x],x] (2)

(Вполне понятная форма обозначений!)

Отметим некоторые особенности записи (2):

а) использование знака `==` (двойное равенство) нужно для того, чтобы отличить уравнение от оператора присваивания;

б) искомая функция $y(x)$ должна быть записана с указанием своего аргумента: `y[x]`;

в) `eq1` в записи (2) – это метка, позволяющая программе работать с решением уравнения.

Решение, полученное программой "*Mathematica*", имеет вид

```
{{y[x]→Log[C[1]-Cos[x]]}},
```

полностью совпадающий с полученным нами аналитическим решением, если учесть, что `C[1]` есть первая (она же – единственная) константа интегрирования, `Cos[x]` обозначает функцию косинус, `Log[x]` – натуральный логарифм (в англоязычном обозначении).

Если в уравнении заданы начальные или граничные условия, то их тоже можно включить в состав уравнений. Так, выполнение операции

```
eq2=
DSolve[{y'[x]==E^(-y[x])Sin[x],y[0]==0},y[x],x]
```

дает решение уравнения (1) с граничным условием $y(0) = 0$:

```
{{y[x]→Log[2-Cos[x]]}},
```
(3)

поскольку постоянная `C[1]` при этом оказывается равной двум.

Функцию (3), являющуюся решением уравнения `eq2`, можно использовать в программе для дальнейших преобразований. Например, если нас интересует вычисление значения полученного решения $y(x)$ в точке $x = \pi/2$, то надо задать команду

```
y[x]/.eq2/.x->Pi/2
```

Здесь пара символов «`/.`» означает подстановку следующего за этими символами выражения (т.е. из найденного решения **eq2** при $x = \pi/2$). В результате программа выдает искомое значение:

{–Log[2]}.

Часто возникает необходимость в построении графика функции, являющейся решением дифференциального уравнения при заданных начальных условиях. Для этого существует команда

```
Plot[f,{x,xmin,xmax}];
```

строящая график функции **f** аргумента **x** на отрезке **[xmin,xmax]**.

Так, график функции (3) на отрезке [0, 10], полученный в результате исполнения команды

```
Plot[y[x]/.eq2,{x,0,10}];
```

изображен на рис.2.

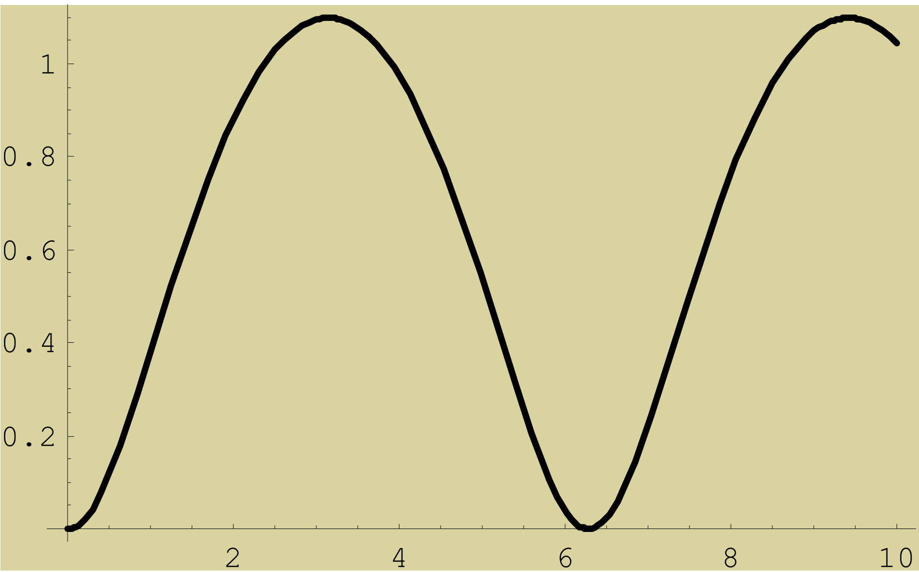


Рис.2. График решения уравнения (1) с граничным условием $y(0) = 0$ на отрезке [0, 10].

Аналогичным способом на компьютере может быть решено уравнение второго порядка. Пусть дано уравнение

$$xy'' - 2y' = x^2 \tag{4}$$

Команда для его решения в среде "*Mathematica*" выглядит следующим образом (для удобства само уравнение запишем отдельной командой, обозначив ее через **eqn3**):

```
eqn3=x*y''[x]-2y'[x]==x^2
eq3=DSolve[eqn3,y[x],x]
```

Решение уравнения (4)

$$\{\{y[x] \to -\frac{x^3}{9} + \frac{1}{3}x^3 C[1] + C[2] + \frac{1}{3}x^3 \mathrm{Log}[x]\}\}$$

полученное программой, с точностью до замены постоянных интегрирования совпадает с найденным ранее в примере 2 четвертого занятия.

Задача Коши для уравнения второго порядка (4) предусматривает задание двух начальных условий, которые могут быть включены в команду для решения уравнения. Пусть требуется найти решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям:

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$$

Задаем команду

```
eq4=DSolve[{eqn3,y[1]==1,y'[1]==2},y[x],x]
```

В результате получаем

$$\{\{y[x] \to \frac{1}{9}(4 + 5x^3 + 3x^3 \mathrm{Log}[x])\}\}$$

График найденной функции система "*Mathematica*" строит в результате выполнения команды

```
Plot[y[x]/.eq4,{x,1,3}];
```

Полученный график решения дифференциального уравнения (4) с начальными условиями $y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$ изображен на рис. 3.

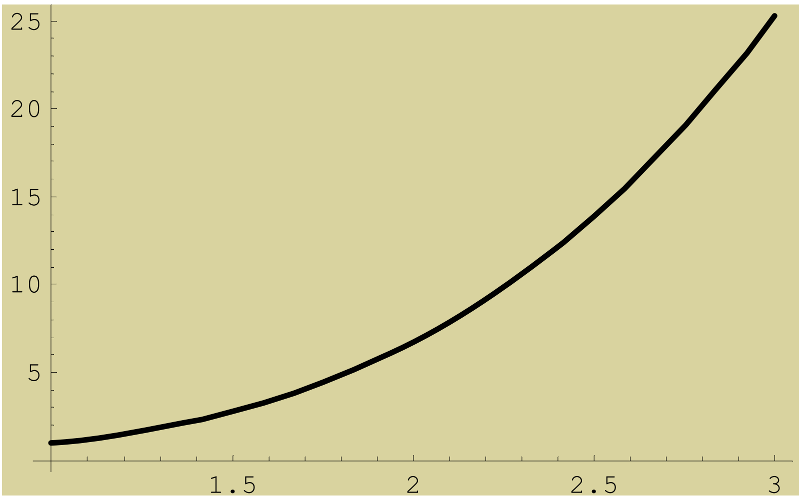


Рис.3. График решения уравнения (4) с начальными условиями $y(1)=1, \quad y'(1)=2$.

Особенно предпочтительно использование компьютерных методов при решении уравнений, требующих большого объема алгебраических выкладок. Пусть нужно найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью, представляющей сумму двух слагаемых специального вида:

$$y'' + y' - 2y = x^2 + xe^x$$

Для того, чтобы аналитически получить его общее решение $y = y(x)$, нужно выполнить следующие шаги:

1) найти общее решение $y_о$ соответствующего однородного уравнения $y'' + y' - 2y = 0$;
2) найти частное решение $y_{ч1}$ уравнения с правой частью $f_1(x) = x^2$;
3) найти частное решение $y_{ч2}$ уравнения с правой частью $f_2(x) = xe^x$;
4) сложить решения, найденные в пп. 1) – 3):

$$y = y_о + y_{ч1} + y_{ч2} .$$

Система “*Mathematica*” после команд

```
eqn4=y''[x]+y'[x]-2y[x]==x^2+x*Exp[x];
eq4=DSolve[eqn4,y[x],x]
```

сразу дает искомое решение:

$$\{\{y[x] \to \frac{1}{108}(-81+4e^x-54x-12e^x x-54x^2+18e^x x^2)+ e^{-2x}C[1]+e^x C[2]\}\}$$

Это решение можно упростить командой `Simplify`:

```
Simplify[eq4]
```

Получаем

$$\{\{y[x] \to \frac{1}{4}(-3-2x-2x^2+ e^{-2x}C[1]+ \frac{1}{54} e^x(2-6x+9x^2+54C[2])\}\}$$

Если решение дифференциального уравнения не может быть найдено в элементарных функциях, программа записывает его через специальные функции. Например, решение уравнения Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0 \qquad (5)$$

после выполнения команд

```
eqn5=y''[x]+y'[x]/x+y[x]==0;
eq5=DSolve[eqn5,y[x],x]
```

программа выражает через, так называемые, Бесселевы функции:

$$\{\{y[x] \to x\ \mathrm{BesselJ}[1,x]C[1] + \mathrm{BesselY}[1,x]C[2]\}\}$$

Бывают, однако, случаи, когда и мощная “*Mathematica*” бессильна. Например, уравнение

$$y' + y^3 = x \qquad (6)$$

она решить не может.

Команды

```
eqn6=y'[x]+y[x]^3==x;
eq6=DSolve[eqn6,y[x],x]
```

приводят программу в некоторое замешательство. После раздумий “*Mathematica*” выдает в качестве «результата» само исходное уравнение:

$$\mathtt{DSolve[-x-y[x]^3+y'[x]==0,y[x],x]}$$

Если же в задаче требуется найти численное решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях, то можно воспользоваться командой

```
NDSolve[eqn,y,{x,xmin,xmax}];
```

предназначенной для поиска решения дифференциального уравнения **eqn** на интервале **[xmin,xmax]**. В нашем примере, для того, чтобы найти решение уравнения (6) с начальным условием $y(0)=0$ на интервале $x \in [0;\ 1{,}5]$, задаем команду

```
eq7=NDSolve[{eqn6,y[0]==0},y,{x,0,1.5}]
```

В результате получаем

```
{{y → InterpolatingFunction[{{0.,1.5}},<>]}}
```

Несмотря на странную форму представления полученной функции, с ней на компьютере можно производить любые операции. Например, вычислим значение найденной функции в точке $x = 1$:

```
y[x]/.eq7/.x->1
```

Компьютер дает ответ

```
{0.519057}
```

Теперь построим график полученной функции в области $x \in [\,0;\ 1{,}5]$ (рис.4).

```
Plot[y[x]/.eq7,{x,0,1.5}];
```

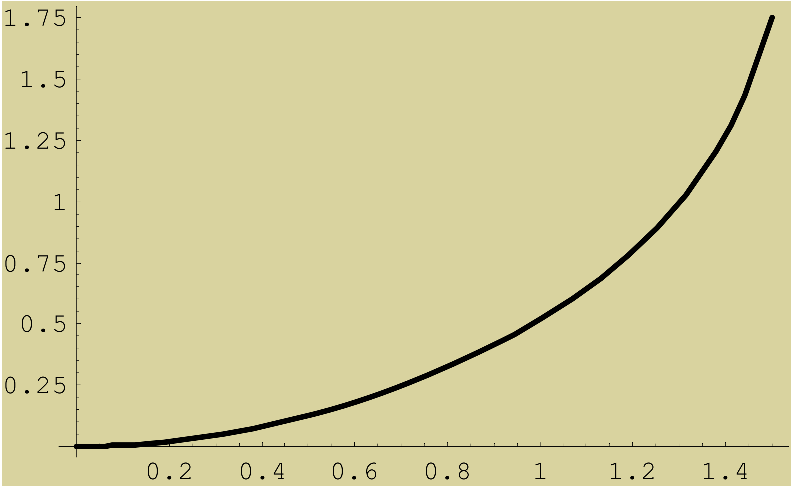


Рис.4. График решения уравнения (6) с начальным условием $y(0) = 0$.

Таким образом, компьютерные системы символьной математики (в частности, система «*Mathematica*») представляют собой мощный аппарат, позволяющий проводить как аналитические, так и численные расчеты в области решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Естественно, возможности таких программ имеют ограничения, в каких-то областях они отстают от возможностей человеческого разума. Тем не менее, компьютер может значительно облегчить труд исследователя, давая ему возможность избежать проведения мучительных алгебраических преобразований. Область применения математических пакетов весьма широка и в образовательной сфере. Несмотря на недостаток образовательной компоненты (компьютер выдает только ответ без подробного описания хода решения), математические пакеты позволяют проверить правильность найденных решений, провести их визуализацию. Нет сомнений, что использование компьютерных математических систем должно стать одной из важнейших составляющих современного образовательного процесса.

Приложение 3

<u>Основные типы дифференциальных уравнений и способы их решения.</u>

Уравнения первого порядка и уравнения, допускающие понижение порядка.

1. Уравнения с разделяющимися переменными	$y' = f(x) \cdot g(y)$	$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$
2. Однородные уравнения 1-го порядка	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$u = \frac{y}{x},\ y = ux,\ y' = u'x + u$
3. Линейные уравнения 1-го порядка	$y' + P(x)y = Q(x)$	$y = uv, \quad y' = u'v + uv'$
4. Уравнения Бернулли	$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$, $\alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1$	$y = uv, \quad y' = u'v + uv'$
5. Уравнения, решаемые последовательным интегрированием	$y^{(n)} = f(x)$	$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$, $y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}dx + C_1x + C_2, \ldots$
6. Уравнения 2-го порядка, не содержащие явно функцию ***y***	$y'' = f(x, y')$	$y' = p(x), \quad y'' = p'(x)$

7. Уравнения 2-го порядка, не содержащие явно переменную ***x***	$y'' = f(y, y')$	$y' = p(y), \quad y'' = p\dfrac{dp}{dy}$
8. Уравнения, сводящиеся к однородным	$y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{mx+ny+p}\right)$	$\begin{cases}\tilde{x} = x - x_0\\ \tilde{y} = y - y_0,\end{cases}$ где $\begin{cases}ax_0 + by_0 + c = 0\\ mx_0 + ny_0 + p = 0\end{cases}$
9. Уравнения в полных дифференциалах	$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$	$\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y), \quad F(x, y) = C$
10. Уравнения, не разрешенные относительно производной	$y = f(x, y')$	$p = y', \quad pdx = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial p}dp, \quad \begin{cases}x = \varphi(p)\\ y = f(\varphi(p), p)\end{cases}$
	$x = f(y, y')$	$p = y', \quad \dfrac{dy}{p} = \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial p}dp, \quad \begin{cases}x = f(\varphi(p), p)\\ y = \varphi(p)\end{cases}$
11. Обобщенно однородные уравнения	уравнение не изменяется при замене $\tilde{x} = kx, \tilde{y} = k^m y$	$\begin{cases}x = e^t\\ y = z(t)\cdot e^{mt}\end{cases}$

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Однородное линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами	$y''+py'+qy=0$	$k^2+pk+q=0$ (*) – характеристическое уравнение 1) $k_1 \neq k_2 \Rightarrow y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$ 2) $k_1=k_2 \Rightarrow y=(C_1x+C_2)e^{k_1x}$ 3) $k_{1,2}=\alpha \pm i\beta \Rightarrow y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
Неоднородное уравнение с правой частью $f(x)$ специального вида	$y''+py'+qy=f(x)$	$y=y_ч+y_о$, $y_о$ – общее решение однородного уравнения $y_ч$ – частное решение неоднородного уравнения
I. Правая часть вида $f(x)=P_n(x)e^{ax}$		1) $a \neq k_1,\ a \neq k_2 \Rightarrow y_ч=Q_n(x)e^{ax}$ 2) $a=k_1 \neq k_2 \Rightarrow y_ч=xQ_n(x)e^{ax}$ 3) $a=k_1=k_2 \Rightarrow y_ч=x^2Q_n(x)e^{ax}$

II. Правая часть вида $f(x) = \; = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_n(x)\sin bx)$	1) $z = a + i\,b$ не является корнем характерист. уравнения (*) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \; y_ч = e^{ax}(S_n(x)\cos bx + T_n(x)\sin bx)$ 2) $z = a + i\,b$ является корнем характерист. уравнения (*) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \; y_ч = x\,e^{ax}(S_n(x)\cos bx + T_n(x)\sin bx)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2. – М.: Интеграл-Пресс, 2004. – 544 с.
2. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М. – Ижевск: Изд. РХД, 2000. – 176 с.
3. Демидович Б.П. (ред.). Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. – М.: АСТ, 2001. – 496 с.
4. Зайцев В.Ф., А.Д. Полянин. Спрвавочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
5. Wolfram S. The Mathematica book. 3-d ed. Wolfram Media/Cambridge Univ. Press, 1996. – 1409 p.

Материалы, связанные с данным изданием, можно найти на сайте кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина: http://kvm.gubkin.ru/Index.html