<u>Обыкновенные дифференциальные уравнения.</u>

Решение различных геометрических, физических, инженерных и финансовых задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту ил иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки.

Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение a является производной по времени t от скорости V, которая также является производной по времени t от перемещения S. Т.е.

$$V = \frac{dS}{dt}; \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2};$$

Тогда получаем: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t)\cdot t}{2}$ *- уравнение связывает функцию f(t) с независимой переменной t и производной второго порядка функции f(t).*

<u>**Определение.**</u> **Дифференциальным уравнением** называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

<u>**Определение.**</u> Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

<u>**Определение.**</u> Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

<u>Пример.</u>

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ *- обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается* $F(x, y, y') = 0$.

$x\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + x^2 = y$ *- обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка.*

В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ *- дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.*

<u>**Определение.**</u> **Общим решением** дифференциального уравнения первого называется такая дифференцируемая функция y = φ(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

<u>Свойства общего решения.</u>

1) Т.к. постоянная С – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

Определение. Решение вида y = φ(x, C_0) называется **частным решением** дифференциального уравнения.

Определение. **Задачей Коши** (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида y = φ(x, C_0), удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коши. (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x, y)$, то какова бы не была точка (x_0, y_0) в области D, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0, принимающее при x = x_0 значение $\varphi(x_0) = y_0$, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

Определение. **Интегралом** дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$xdy = -ydx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем:
$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

$y = \dfrac{C}{x}$ *- это общее решение исходного дифференциального уравнения.*

Допустим, заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, тогда имеем

$$2 = \frac{C}{1}; \quad C = 2;$$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).

$$y = \frac{2}{x}$$

Определение. **Интегральной кривой** называется график y = φ(x) решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

Определение. **Особым решением** дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (x, y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной С. Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной С.

Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой.

Отметим, что не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения.

<u>Пример.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' + y = 0$. *Найти особое решение, если оно существует.*

$$\frac{dy}{dx} = -y$$
$$\frac{dy}{y} = -dx$$
$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$
$$\ln y = -x + C$$
$$y = e^{-x} \cdot e^{C}$$
$$y = C_1 \cdot e^{-x}$$

Данное дифференциальное уравнение имеет также особое решение y = 0. Это решение невозможно получить из общего, однако при подстановке в исходное уравнение получаем тождество. Мнение, что решение y = 0 можно получить из общего решения при $C_1 = 0$ *ошибочно, ведь* $C_1 = e^{C} \neq 0$.

Далее рассмотрим подробнее приемы и методы, которые используются при решении дифференциальных уравнений различных типов.

<u>Дифференциальные уравнения первого порядка.</u>

<u>Определение.</u> Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида: $F(x, y, y') = 0$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x, y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, **разрешенным относительно производной.**

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad dy = f(x, y)dx; \quad f(x, y)dx - dy = 0;$$

Функцию f(x,y) представим в виде: $f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad Q(x, y) \neq 0;$ тогда при подстановке в полученное выше уравнение имеем:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

- это так называемая **дифференциальная форма** уравнения первого порядка.

Далее рассмотрим подробнее типы уравнений первого порядка и методы их решения.

Уравнения вида y' = f(x).

Пусть функция f(x) – определена и непрерывна на некотором интервале a < x < b. В таком случае все решения данного дифференциального уравнения находятся как $y = \int f(x)dx + C$. Если заданы начальные условия x_0 и y_0, то можно определить постоянную C.

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

Такое уравнение можно представить также в виде:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \text{ при } \beta(y) \neq 0;$$

Перейдем к новым обозначениям $\alpha(x) = -X(x); \quad \frac{1}{\beta(y)} = Y(y);$

Получаем:

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0;$$

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина C, а, соответственно, и частное решение.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy' = \frac{-2x}{\cos y}$

$$y\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$y\cos y dy = -2x dx$$

$$\int y\cos y dy = -2\int x dx$$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям

$$\int y\cos y dy = \left\{ \begin{matrix} u = y; & dv = \cos y dy; \\ du = dy; & v = \sin y \end{matrix} \right\} = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y$$

$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C$$

$$y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

- *это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается **отличие** общего (частного) **интеграла** от общего (частного) **решения.***

Чтобы проверить правильность полученного ответа продифференцируем его по переменной x.

$$y'\sin y + yy'\cos y - y'\sin y + 2x = 0$$

$$yy' = -\frac{2x}{\cos y} \text{ - верно}$$

Пример. Найти решение дифференциального уравнения $\frac{y}{y'} = \ln y$ *при условии y(2) = 1.*

$$\frac{ydx}{dy} = \ln y$$

$$dx = \frac{\ln ydy}{y}$$

$$\int dx = \int \frac{\ln ydy}{y}$$

$$x + C = \int \ln yd(\ln y)$$

$$x + C = \frac{\ln^2 y}{2}$$

при y(2) = 1 получаем $2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}; \quad \Rightarrow \quad 2 + C = 0; \quad \Rightarrow \quad C = -2;$

Итого: $2(x-2) = \ln^2 y;$ *или* $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ *- частное решение;*

<u>Проверка:</u> $y' = e^{\pm\sqrt{2x-4}} \cdot \dfrac{2}{\pm 2\sqrt{2x-4}}$ *, итого*

$$\frac{y}{y'} = \frac{e^{\pm\sqrt{2x-4}}(\pm\sqrt{2x-4})}{e^{\pm\sqrt{2x-4}}} = \pm\sqrt{2x-4} = \ln y \text{ - верно.}$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y' = y^{2/3}$.

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$$

$$y^{-2/3} dy = dx$$

$$\int y^{-2/3} dy = \int dx$$

$$3y^{1/3} = x + C$$

$$27y = (x + C)^3 \text{ - общий интеграл}$$

$$y = \frac{1}{27}(x + C)^3 \text{ - общее решение}$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx;$$

$$arctgy = \frac{x^2}{2} + C; \qquad y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right);$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$ *при условии y(1) = 0.*

$$\frac{ydy}{dx} + xe^y = 0$$

$$ydy + xe^y dx = 0; \qquad \frac{y}{e^y} dy = -xdx;$$

$$\int \frac{y}{e^y} dy = -\int xdx;$$

Интеграл, стоящий в левой части будем брать по частям.

$$\int ye^{-y}dy = \begin{Bmatrix} u = y; & e^{-y}dy = dv; \\ du = dy; & v = -e^{y}; \end{Bmatrix} = -e^{y}y - \int -e^{y}dy = -e^{-y}y - e^{-y} = -e^{-y}(y+1);$$

$$e^{-y}(y+1) = \frac{x^2}{2} + C_0;$$

$$2e^{-y}(y+1) = x^2 + C$$

Если y(1) = 0, то $2e^0(0+1) = 1 + C; \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 + C; \quad \Rightarrow \quad C = 1;$

Итого, частный интеграл: $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$.

Пример. *Решить уравнение* $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$.

$$y' + \sin(x+y) - \sin(x-y) = 0$$

$$y' - 2\sin\frac{x-y-x-y}{2}\cos\frac{x-y+x+y}{2} = 0$$

$$y' - 2\sin(-y)\cos x = 0$$

$$y' + 2\sin y\cos x = 0$$

$$\frac{dy}{\sin y} = -2\cos x dx; \qquad \int\frac{dy}{\sin y} = -2\int\cos x dx;$$

Для нахождения интеграла, стоящего в левой части уравнения.
Получаем общий интеграл:

$$\ln\left|tg\frac{y}{2}\right| = -2\sin x + C$$

Пример. *Решить уравнение* $2xe^{-x^2} + \dfrac{y'}{y} = 0$

Преобразуем заданное уравнение:

$$2xe^{-x^2} + \frac{dy}{ydx} = 0$$

$$2xe^{-x^2}dx + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\int 2xe^{-x^2}dx + \int\frac{dy}{y} = C$$

$$-e^{-x^2} + \ln|y| = C$$

Получили общий интеграл данного дифференциального уравнения. Если из этого соотношения выразить искомую функцию y, то получим общее решение.

Пример. *Решить уравнение* $y' = x(y^2+1)$.

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2+1)$$

$$\frac{dy}{y^2+1} = xdx$$

$$\int\frac{dy}{y^2+1} = \int xdx; \qquad arctgy = \frac{x^2}{2} + C;$$

$$y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

Допустим, заданы некоторые начальные условия x_0 *и* y_0*. Тогда:*

$$arctgy_0 = \frac{x_0^2}{2} + C_0; \quad \Rightarrow \quad C_0 = arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2};$$

Получаем частное решение $y = tg\left(\frac{x^2}{2} + arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2}\right).$

Однородные уравнения.

Определение. Функция f(x, y) называется **однородной n – го измерения** относительно своих аргументов х и у, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Пример. Является ли однородной функция $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y$?

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3 x^3 + 3t^3 x^2 y = t^3 (x^3 + 3x^2 y) = t^3 f(x, y)$$

Таким образом, функция f(x, y) является однородной 3- го порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если его правая часть f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является однородным, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y' = f(x, y)$.

Т.к. функция f(x, y) – однородная нулевого измерения, то можно записать $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Параметр t вообще говоря произвольный, предположим, что $t = \frac{1}{x}$. Получаем:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u = \frac{y}{x}$, т.е.

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u);$$

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде: $y' = \varphi(u)$

Далее заменяем $y = ux$, $y' = u'x + ux'$.

$$u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u.

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Далее, заменив вспомогательную функцию u на ее выражение через х и у и найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

Пример. *Решить уравнение* $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)$.

Введем вспомогательную функцию u.

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u.$$

Отметим, что введенная нами функция u всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее $\ln u = \ln\frac{y}{x}$.

Подставляем в исходное уравнение:

$$u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u\ln u + u; \quad u'x = u\ln u;$$

Разделяем переменные: $\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}$; $\int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x}$;

Интегрируя, получаем: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C$; $\ln u = Cx$; $u = e^{Cx}$;

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y, получаем общее решение:

$$y = xe^{Cx}.$$

Уравнения, приводящиеся к однородным.

Кроме уравнений, описанных выше, существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут приведены к однородным.

Это уравнения вида $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$.

Если определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, то переменные могут быть разделены подстановкой

$$x = u + \alpha; \qquad y = v + \beta;$$

где α и β - решения системы уравнений $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$

Пример. *Решить уравнение* $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$.

Получаем $(x - 2y + 3)\frac{dy}{dx} = -2x - y + 1$; $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y + 1}{x - 2y + 3}$;

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0$.

Решаем систему уравнений $\begin{cases} -2x - y + 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 1 - 2x \\ x - 2 + 4x + 3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -1/5 \\ y = 7/5 \end{cases}$;

Применяем подстановку $x = u - 1/5$; $y = v + 7/5$; *в исходное уравнение:*

$$(u - 1/5 - 2v - 14/5 + 3)dv + (2u - 2/5 + v + 7/5 - 1)du = 0;$$

$$(u - 2v)dv + (2u + v)du = 0;$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u + v}{2v - u} = \frac{2 + v/u}{2v/u - 1};$$

Заменяем переменную $\frac{v}{u} = t$; $v = ut$; $v' = t'u + t$; *при подстановке в выражение, записанное выше, имеем:*

$$t'u + t = \frac{2+t}{2t-1}$$

Разделяем переменные: $\frac{dt}{du}u = \frac{2+t}{2t-1} - t = \frac{2+t-2t^2+t}{2t-1} = \frac{2(1+t-t^2)}{2t-1}$;

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2t}{1+t-t^2}dt; \qquad \int\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\int\frac{(1-2t)dt}{1+t-t^2};$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+t-t^2\right| = \ln|u| + \ln C_1$$

$$\ln\left|1+t-t^2\right| = -2\ln|C_1u|$$

$$\ln\left|1+t-t^2\right| = \ln\left|\frac{C_2}{u^2}\right|; \quad 1+t-t^2 = \frac{C_2}{u^2};$$

Переходим теперь к первоначальной функции y и переменной x.

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y-7/5}{x+1/5} = \frac{5y-7}{5x+1}; \quad u = x+1/5;$$

$$1 + \frac{5y-7}{5x+1} - \left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2 = \frac{25C_2}{(5x+1)^2};$$

$$(5x+1)^2 + (5y-7)(5x+1) - (5y-7)^2 = 25C_2$$

$$25x^2 + 10x + 1 + 25xy + 5y - 35x - 7 - 25y^2 + 70y - 49 = 25C_2$$

$$25x^2 - 25x + 25xy + 75y - 25y^2 = 25C_2 + 49 - 1 + 7$$

$$x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C_2 + \frac{55}{25} = C;$$

Итого, выражение $x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C$ *является общим интегралом исходного дифференциального уравнения.*

В случае если в исходном уравнении вида $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, то переменные могут быть разделены подстановкой

$$ax + by = t.$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0.$

Получаем $2(x+y)\frac{dy}{dx} = -3x - 3y + 1; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-3x-3y+1}{2x+2y} = -\frac{3x+3y-1}{2x+2y};$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0;$

Применяем подстановку $3x + 3y = t.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t'}{3} - 1;$$

Подставляем это выражение в исходное уравнение:

$$\frac{t'}{3} - 1 = -\frac{3(t-1)}{2t}; \quad 2t(t'-3) = -9t + 9; \quad 2tt' = 6t - 9t + 9; \quad 2tt' = -3t + 9;$$

Разделяем переменные: $\dfrac{2t}{-3t+9}dt = dx;\qquad \dfrac{t}{t-3}dt = -\dfrac{3}{2}dx;$

$$\int\left(1+\frac{3}{t-3}\right)dt = -\frac{3}{2}\int dx;$$

$$t + 3\ln|t-3| = -\frac{3}{2}x + C_1$$

Далее возвращаемся к первоначальной функции y и переменной x.

$$2x + 2y + 2\ln|3(x+y-1)| = -x + C_2;$$

$$3x + 2y + 2\ln 3 + 2\ln|x+y-1| = C_2;$$

$$3x + 2y + 2\ln|x+y-1| = C;$$

таким образом, мы получили общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Линейные уравнения.

Определение. Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

P(x) и *Q(x)*- функции непрерывные на некотором промежутке a < x < b.

Линейные однородные дифференциальные уравнения.

Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$y' + P(x)y = 0.$$

Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей.

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|;$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx;$$

Общее решение: $\quad y = Ce^{-\int P(x)dx}$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений (*Q(x)≠0*) применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли.

(Якоб Бернулли (1654-1705) – швейцарский математик.)

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1 \cdot 2x^2$; $y = 2 \cdot x^2$; $y = 2x \cdot x$; и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$.

Таким образом, возможно получить функцию *u*, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \qquad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \qquad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \qquad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции *v* подставим поученное выражение для функции *u* в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x); \qquad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию *v*:

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1; \qquad v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y = uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$$

Окончательно получаем формулу:

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right),}$$ C_2 - произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Метод Лагранжа.

(Ларганж Жозеф Луи (1736-1813) - французский математик, през. Берлинской АН, поч. чл. Пет. АН (1776)).

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом **вариации произвольной постоянной**.

Вернемся к поставленной задаче:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем.

$$y' + P(x)y = 0$$

Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную C_1 некоторой функцией от x.

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} + C_1(x) e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x));$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

Из этого уравнения определим переменную функцию $C_1(x)$:

$$dC_1(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx;$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1 = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C;$$

Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем:

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C\right).}$$

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

Далее рассмотрим примеры решения различных дифференциальных уравнений различными методами и сравним результаты.

__Пример.__ Решить уравнение $x^2 y' + y = ax^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Сначала приведем данное уравнение к стандартному виду: $y' + \frac{1}{x^2} y = ae^{\frac{1}{x}}$.

Применим полученную выше формулу: $P = \frac{1}{x^2}; \quad Q = ae^{\frac{1}{x}};$

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2}dx}\left(\int ae^{\frac{1}{x}} e^{\int \frac{1}{x^2}dx} dx + C\right); \quad y = e^{\frac{1}{x}}\left(\int ae^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} dx + C\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\int a dx + C\right);$$

$$\boxed{y = e^{\frac{1}{x}}(ax + C).}$$

Уравнение Бернулли.

Определение. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + Py = Q \cdot y^n,$$

где P и Q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

Для решения уравнения Бернулли применяют подстановку $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, с помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному.

Для этого разделим исходное уравнение на y^n.

$$\frac{y'}{y^n} + P\frac{1}{y^{n-1}} = Q;$$

Применим подстановку, учтя, что $z' = -\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}} \cdot y' = -\frac{(n-1)y'}{y^n}$.

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q$$

$$z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q$$

Т.е. получилось линейное уравнение относительно неизвестной функции z.
Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$\boxed{\begin{gathered} z = e^{-\int P dx}\left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx} dx + C\right) \\ Q_1 = -(n-1)Q; \qquad P_1 = -(n-1)P. \end{gathered}}$$

Пример. Решить уравнение $xy' + y = xy^2 \ln x$.

Разделим уравнение на xy^2: $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \ln x$.

Полагаем $z = \frac{1}{y}; \quad z' = -\frac{y'}{y^2}$.

$$-z' + \frac{1}{x}z = \ln x; \qquad z' - \frac{1}{x}z = -\ln x.$$

Полагаем $P = -\frac{1}{x}, \quad Q = -\ln x$.

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(\int -\ln x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx + C\right); \qquad z = e^{\ln x}\left(\int -\ln x e^{-\ln x} dx + C\right);$$

$$z = x\left(\int -\ln x \cdot \frac{dx}{x} + C\right); \qquad z = x\left(-\int \ln x d(\ln x) + C\right);$$

$$z = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right)$$

Произведя обратную подстановку, получаем:

$$\frac{1}{y} = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right).$$

Пример. Решить уравнение $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Разделим обе части уравнения на $x\sqrt{y}$.

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}\sqrt{y}=x.$$

Полагаем $z=\sqrt{y};\quad z'=\frac{1}{2\sqrt{y}}y';\quad y'=2\sqrt{y}z';$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}2\sqrt{y}z'-\frac{4}{x}z=x;\quad \frac{dz}{dx}-\frac{2z}{x}=\frac{x}{2};$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Рассмотрим соответствующее ему линейное однородное уравнение:

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2z}{x}=0;\quad \frac{dz}{dx}=\frac{2z}{x};\quad \frac{dz}{z}=\frac{2dx}{x};$$

$$\int\frac{dz}{z}=2\int\frac{dx}{x}+C_1;\quad \ln z=2\ln x+\ln C;\quad z=Cx^2;$$

Полагаем C = C(x) и подставляем полученный результат в линейное неоднородное уравнение, с учетом того, что:

$$\frac{dz}{dx}=2xC(x)+x^2\frac{dC(x)}{dx};$$

$$2xC(x)+x^2\frac{dC(x)}{dx}-\frac{2x^2C(x)}{x}=\frac{x}{2};$$

$$\frac{dC(x)}{dx}=\frac{1}{2x};\qquad C(x)=\frac{1}{2}\ln x+C_2;$$

Получаем: $z=x^2\left(C_2+\frac{1}{2}\ln x\right);$

Применяя обратную подстановку, получаем окончательный ответ:

$$y=x^4\left(C_2+\frac{1}{2}\ln x\right)^2;$$

Уравнения в полных дифференциалах (тотальные).

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u=F(x,y)$.

Интегрирование такого уравнения сводится к нахождению функции u, после чего решение легко находится в виде: $du=0;\quad u=C.$

Таким образом, для решения надо определить:
1) в каком случае левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал функции u;
2) как найти эту функцию.

Если дифференциальная форма $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции u, то можно записать:

$$du=M(x,y)dx+N(x,y)dy=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Т.е. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \end{cases}.$

Найдем смешанные производные второго порядка, продифференцировав первое уравнение по *y*, а второе – по *x*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

Приравнивая левые части уравнений, получаем **необходимое и достаточное условие** того, что левая часть дифференциального уравнения является полным дифференциалом. Это условие также называется **условием тотальности.**

$$\boxed{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}$$

Теперь рассмотрим вопрос о нахождении собственно функции *u*.

Проинтегрируем равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$:

$$u = \int M(x, y)dx + C(y).$$

Вследствие интегрирования получаем не постоянную величину С, а некоторую функцию С(у), т.к. при интегрировании переменная *y* полагается постоянным параметром.

Определим функцию С(у).

Продифференцируем полученное равенство по *y*.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + C'(y).$$

Откуда получаем: $C'(y) = N(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx.$

Для нахождения функции С(у) необходимо проинтегрировать приведенное выше равенство. Однако, перед интегрированием надо доказать, что функция С(у) не зависит от *x*. Это условие будет выполнено, если производная этой функции по *x* равна нулю.

$$[C'(y)]_x' = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x, y)dx\right) =$$
$$= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Теперь определяем функцию С(у):

$$C(y) = \int\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx\right]dy + C$$

Подставляя этот результат в выражение для функции *u*, получаем:

$$u = \int M(x, y)dx + \int\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x, y)dx\right]dy + C.$$

Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$\boxed{\int M(x, y)dx + \int\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x, y)dx\right]dy = C.}$$

Следует отметить, что при решении уравнений в полных дифференциалах не обязательно использовать полученную формулу. Решение может получиться более компактным, если просто следовать методу, которым формула была получена.

Пример. *Решить уравнение* $(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0$

Проверим условие тотальности: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(3x^2 + 10xy)}{\partial y} = 10x;$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2 - 1)}{\partial x} = 10x.$$

Условие тотальности выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Определим функцию u.

$$u = \int M(x,y)dx + C(y) = \int (3x^2 + 10xy)dx + C(y) = x^3 + 5x^2 y + C(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 + C'(y) = N(x,y) = 5x^2 - 1;$$

$$C'(y) = -1; \quad C(y) = \int (-1)dy = -y + C_1;$$

Итого, $u = x^3 + 5x^2 y - y + C_1.$

Находим общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$$u = x^3 + 5x^2 y - y + C_1 = C_2;.$$

$$x^3 + 5x^2 y - y = C.$$

Уравнения вида *y = f(y')* и *x = f(y')*.

Решение уравнений, не содержащих в одном случае аргумента *x*, а в другом – функции *y*, ищем в параметрической форме, принимая за параметр производную неизвестной функции.

$$y' = p.$$

Для уравнения первого типа получаем: $y = f(p); \qquad y' = f'(p)\dfrac{dp}{dx}.$

Делая замену, получаем: $p = f'(p)\dfrac{dp}{dx};$

В результате этих преобразований имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

$$dx = \frac{f'(p)}{p}dp; \qquad x = \int \frac{f'(p)}{p}dp + C.$$

Общий интеграл в параметрической форме представляется системой уравнений:

$$\boxed{\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{f'(p)}{p}dp + C \\ y = f(p) \end{cases}}$$

Исключив из этой системы параметр *p*, получим общий интеграл и не в параметрической форме.

Для дифференциального уравнения вида *x = f(y')* с помощью той же самой подстановки и аналогичных рассуждений получаем результат:

$$\boxed{\begin{cases} y = \displaystyle\int p f'(p)dp + C \\ x = f(p) \end{cases}}$$

Уравнения Лагранжа и Клеро.

(Алекси Клод Клеро (1713 – 1765) французский математик
ин. поч. член Петерб. АН)

Определение. **Уравнением Лагранжа** называется дифференциальное уравнение, линейное относительно *x* и *y*, коэффициенты которого являются функциями от *y'*.

$$P(y')x + Q(y')y + R(y') = 0$$

Для нахождения общего решение применяется подстановка $p = y'$.

$$y = xf(p) + \varphi(p), \quad f(p) = -\frac{P(y')}{Q(y')}, \quad \varphi(p) = -\frac{R(y')}{Q(y')}.$$

Дифференцируя это уравнение,с учетом того, что $dy = pdx$, получаем:

$$pdx = f(p)dx + xf'(p)dp + \varphi'(p)dp.$$

Если решение этого (линейного относительно *x*) уравнения есть $x = F(p, C)$, то общее решение уравнения Лагранжа может быть записано в виде:

$$\boxed{\begin{cases} x = F(p, C) \\ y = xf(p) + \varphi(p) = F(p, C)f(p) + \varphi(p) \end{cases}}$$

Определение. **Уравнением Клеро** называется уравнение первой степени (т.е. линейное) относительно функции и аргумента вида:

$$y = xy' + \varphi(y').$$

Вообще говоря, уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа.
С учетом замены $y' = p$, уравнение принимает вид:

$$y = xp + \varphi(p).$$

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx}; \qquad p = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx};$$

$$[x + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0;$$

Это уравнение имеет два возможных решения:

$$dp = 0 \text{ или } x + \varphi'(p) = 0.$$

В первом случае: $p = c$;

$$\boxed{y = cx + \varphi(c)}$$

Видно, что общий интеграл уравнения Клеро представляет собой семейство прямых линий.
Во втором случае решение в параметрической форме выражается системой уравнений:

$$\begin{cases} y = xp + \varphi(p) \\ x + \varphi'(p) = 0 \end{cases}$$

Исключая параметр *p*, получаем второе решение F(x, y) = 0. Это решение не содержит произвольной постоянной и не получено из общего решения, следовательно, не является частным решением.

Это решение будет являться особым интегралом.

Далее рассмотрим примеры решения различных типов дифференциальных уравнений первого порядка.

<u>Пример.</u> Решить уравнение с заданными начальными условиями.

$$y' - \frac{y}{x} = x + 1; \quad y(1) = 0.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$y' - \frac{y}{x} = 0; \qquad y' = \frac{y}{x}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}; \qquad \ln y = \ln x + \ln C;$$

$$y = Cx;$$

Для неоднородного уравнения общее решение имеет вид:

$$y = C(x)x;$$

Дифференцируя, получаем: $y' = C'(x)x + C(x);$

Для нахождения функции C(x) подставляем полученное значение в исходное дифференциальное уравнение:

$$C'(x)x + C(x) - C(x) = x + 1$$

$$xC'(x) = x + 1$$

$$C'(x) = 1 + \frac{1}{x}; \qquad C(x) = \int\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + C;$$

$$C(x) = x + \ln x + C;$$

Итого, общее решение: $\boxed{y = x(x + \ln x + C).}$

С учетом начального условия, $y(1) = 0$ определяем постоянный коэффициент C.

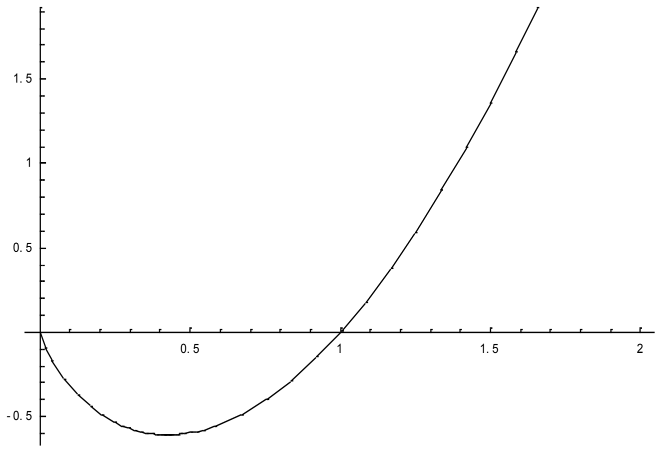
$$0 = 1 + \ln 1 + C; \qquad C = -1.$$

Окончательно получаем: $\boxed{y = x^2 + x\ln x - x.}$

Для проверки подставим полученный результат в исходное дифференциальное уравнение:

$2x + \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1 - x - \ln x + 1 = x + 1;$ верно

Ниже показан график интегральной кривой уравнения.



Пример. Найти общий интеграл уравнения $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$.

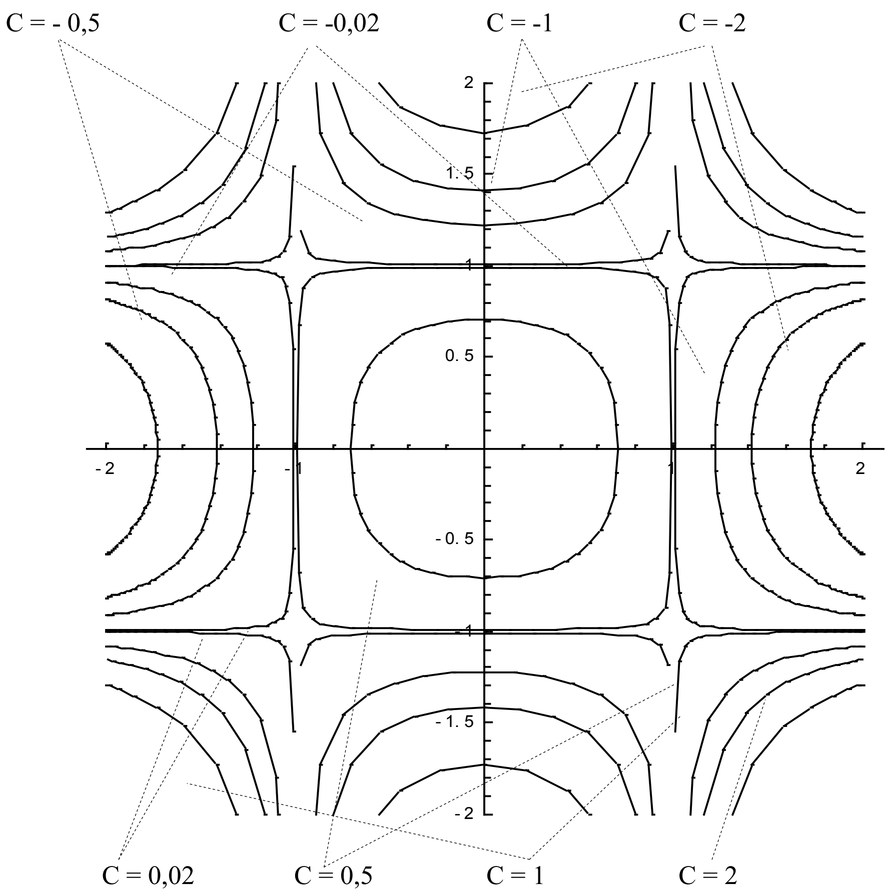
Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{xdx}{x^2 - 1} + \frac{ydy}{y^2 - 1} = 0; \qquad \int \frac{xdx}{x^2 - 1} = -\int \frac{ydy}{y^2 - 1};$$

$$\ln|x^2 - 1| + \ln|y^2 - 1| = \ln C;$$

Общий интеграл имеет вид: $\boxed{(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C.}$

Построим интегральные кривые дифференциального уравнения при различных значениях С.



Пример. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

$$y'\cos x = (y+1)\sin x; \qquad y(0) = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{y'}{y+1} = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \frac{dy}{y+1} = tgxdx;$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int tgxdx; \qquad \ln|y+1| = -\ln|\cos x| + \ln C;$$

$$\ln|(y+1)\cos x| = \ln C; \qquad (y+1)\cos x = C;$$

Общее решение имеет вид: $\boxed{y = \frac{C}{\cos x} - 1.}$

Найдем частное решение при заданном начальном условии *y(0) = 0*.

$$0 = \frac{C}{1} - 1; \qquad C = 1.$$

Окончательно получаем: $\boxed{y = \frac{1}{\cos x} - 1.}$

Пример. Решить предыдущий пример другим способом.

Действительно, уравнение $y'\cos x = (y+1)\sin x$ может быть рассмотрено как линейное неоднородное дифференциальное уравнение.

$$y'\cos x - y\sin x = \sin x.$$

Решим соответствующее ему линейное однородное уравнение.

$$y'\cos x - y\sin x = 0; \qquad y'\cos x = y\sin x; \qquad \frac{dy}{y} = tgxdx;$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int tgxdx + \ln C; \qquad \ln|y| = -\ln|\cos x| + \ln C; \qquad y\cos x = C;$$

$$y = \frac{C}{\cos x}.$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид: $y = \dfrac{C(x)}{\cos x}$.

Тогда $y' = \dfrac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x}$.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$\frac{[C'(x)\cos x + C(x)\sin x]\cdot \cos x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)\sin x}{\cos x} = \sin x;$$

$$\frac{C'(x)\cos x}{\cos x} = \sin x; \qquad C'x) = \sin x; \qquad C(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

Итого $y = \dfrac{-\cos x + C}{\cos x}$; $\qquad \boxed{y = \dfrac{C}{\cos x} - 1;}$

С учетом начального условия y(0) = 0 получаем $\boxed{y = \dfrac{1}{\cos x} - 1;}$

Как видно результаты, полученные при решении данного дифференциального уравнения различными способами, совпадают.

При решении дифференциальных уравнений бывает возможно выбирать метод решения, исходя из сложности преобразований.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ *с начальным условием y(0) = 0.*

Это линейное неоднородное уравнение. Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$y' + y\cos x = 0; \qquad \frac{dy}{y} = -\cos x dx; \qquad \ln|y| = -\sin x + C_1;$$

$$y = e^{-\sin x}\cdot e^{C_1}; \qquad y = Ce^{-\sin x};$$

Для линейного неоднородного уравнения общее решение будет иметь вид:

$$y = C(x)e^{-\sin x};$$

Для определения функции C(x) найдем производную функции y и подставим ее в исходное дифференциальное уравнение.

$$y' = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x;$$

$$C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x + C(x)e^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x;$$

$$C'(x)e^{-\sin x} = \sin x\cos x; \qquad C'(x) = e^{\sin x}\sin x\cos x;$$

$$C(x) = \int e^{\sin x} \sin x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{ll} V = e^{\sin x}; & dU = \cos x dx; \\ dV = e^{\sin x} \cos x dx; & U = \sin x; \end{array} \right\} = e^{\sin x} \sin x - \int e^{\sin x} \cos x dx =$$

$$= e^{\sin x} \sin x - e^{\sin x} + C.$$

Итого $y = e^{-\sin x}\left(e^{\sin x} \sin x - e^{\sin x} + C\right);$ $\boxed{y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x};}$

Проверим полученное общее решение подстановкой в исходное дифференциальное уравнение.

$$\cos x + Ce^{-\sin x}(-\cos x) + \sin x \cos x - \cos x + Ce^{-\sin x} \cos x = \sin x \cos x; \text{ (верно)}$$

Найдем частное решение при y(0) = 0.

$$0 = \sin 0 - 1 + Ce^0; \qquad C = 1.$$

Окончательно $\boxed{y = \sin x + e^{-\sin x} - 1.}$

<u>Пример.</u> Найти решение дифференциального уравнения

$$20xdx - 3ydy = 3x^2 ydy - 5xy^2 dx$$

с начальным условием y(1) = 1.

Это уравнение может быть преобразовано и представлено как уравнение с разделенными переменными.

$$20x - 3yy' = 3x^2 yy' - 5xy^2; \qquad 3yy'(x^2 + 1) = 5x(y^2 + 4);$$

$$y'\frac{3y}{y^2 + 4} = \frac{5x}{x^2 + 1}; \qquad \frac{3y}{y^2 + 4}dy = \frac{5x}{x^2 + 1}dx;$$

$$\int \frac{3y}{y^2 + 4}dy = \int \frac{5x}{x^2 + 1}dx;$$

$$\frac{3}{2}\ln(y^2 + 4) = \frac{5}{2}\ln(x^2 + 1) + \ln C_1$$

$$(y^2 + 4)^3 = C \cdot (x^2 + 1)^5; \qquad y^2 + 4 = C \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2};$$

$$y^2 = C(x^2 + 1)^{\frac{5}{3}} - 4;$$

$$\boxed{y = \sqrt{C(x^2 + 1)^{\frac{5}{3}} - 4};}$$

С учетом начального условия:

$$1 = \sqrt{C \cdot 2^{\frac{5}{3}} - 4} = \sqrt{C\sqrt[3]{32} - 4}; \qquad 1 = 2C\sqrt[3]{4} - 4; \qquad 5 = 2C\sqrt[3]{4}; \qquad 125 = 8C^3 \cdot 4; \quad C^3 = \frac{125}{32};$$

$$C = \frac{5}{2\sqrt[3]{4}}.$$

Окончательно $\boxed{y = \sqrt{5\left(\frac{x^2 + 1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} - 4}.}$

<u>Пример.</u> Решить дифференциальное уравнение $xy' + y = x + 1$ *с начальным условием y(1) = 0.*

Это линейное неоднородное уравнение.

Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$xy' + y = 0; \qquad \frac{xdy}{dx} = -y; \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}; \qquad \ln|y| = -\ln|x| + \ln C;$$

$$xy = C; \qquad y = \frac{C}{x};$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = \frac{C(x)}{x};$$

Подставим в исходное уравнение:

$$x\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} = x + 1; \qquad \frac{C'(x)x}{x} = x + 1; \qquad C'(x) = x + 1;$$

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + x + C;$$

Общее решение будет иметь вид: $\boxed{y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C}{x};}$

С учетом начального условия y(1) = 0: $0 = \frac{1}{2} + 1 + C; \qquad C = -\frac{3}{2};$

Частное решение: $\boxed{y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2x} + 1;}$

__Пример.__ Найти решение дифференциального уравнения $xy' = y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$ *с начальным условием y(1) = e.*

Это уравнение может быть приведено к виду уравнения с разделяющимися переменными с помощью замены переменных.

Обозначим: $\ln\left(\frac{y}{x}\right) = u; \qquad \frac{y}{x} = e^u; \qquad y = xe^u; \qquad y' = xu'e^u + e^u;$

Уравнение принимает вид:

$$xu'e^u + e^u = e^u u; \qquad xu' + 1 = u; \qquad xu' = u - 1;$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

$$x\frac{du}{dx} = u - 1; \qquad \frac{du}{u-1} = \frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{du}{u-1} = \int\frac{dx}{x}; \qquad \ln|u-1| = \ln|x| + \ln C; \qquad u - 1 = Cx;$$

Сделаем обратную замену: $Cx = \ln\left(\frac{y}{x}\right) - 1; \qquad \ln\left(\frac{y}{x}\right) = Cx + 1; \qquad \frac{y}{x} = e^{Cx+1};$

Общее решение: $\boxed{y = xe^{Cx+1};}$

С учетом начального условия y(1) = e: $e = e^{C+1}; \qquad C = 0;$

Частное решение: $y = ex;$

Второй способ решения.

$$xy' = y\ln\frac{y}{x};$$
$$xy' = y\ln y - y\ln x;$$
$$y' - \frac{y}{x}\ln y = -\frac{y}{x}\ln x;$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Соответствующее однородное:

$$y' - \frac{y}{x}\ln y = 0;$$
$$y' = \frac{y}{x}\ln y; \qquad \frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{x}; \qquad \int\frac{d(\ln y)}{\ln y} = \int\frac{dx}{x};$$
$$\ln|\ln y| = \ln|x| + \ln C; \qquad \ln y = Cx; \qquad y = e^{Cx};$$

Решение исходного уравнения ищем в виде: $y = e^{C(x)x}$;

Тогда $y' = e^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right)$;

Подставим полученные результаты в исходное уравнение:

$$xe^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right) = e^{C(x)x}\ln\frac{e^{C(x)x}}{x};$$
$$x^2C'(x) + xC(x) = C(x)x - \ln x;$$
$$x^2C'(x) = -\ln x; \qquad C'(x) = -\frac{\ln x}{x^2};$$

$$C(x) = -\int\frac{\ln x}{x^2}dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = \dfrac{dx}{x^2}; \\ du = \dfrac{dx}{x}; & v = -\dfrac{1}{x}; \end{matrix}\right\} = -\left[-\frac{\ln x}{x} - \int\frac{-dx}{x^2}\right] = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C;$$
$$y = e^{C(x)x} = e^{\ln x + 1 + Cx} = xe^{Cx+1};$$

Получаем общее решение: $\boxed{y = xe^{Cx+1};}$

Пример. *Решить дифференциальное уравнение* $y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$ *с начальным условием y(1)=0.*

В этом уравнении также удобно применить замену переменных.

$$e^{\frac{y}{x}} = u; \qquad \frac{y}{x} = \ln u; \qquad y = x\ln u; \qquad y' = \ln u + \frac{xu'}{u};$$

Уравнение принимает вид: $\ln u + \frac{xu'}{u} + u - \ln u = 0; \qquad xu' + u^2 = 0;$

$$xu' = -u^2; \qquad \frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x}; \qquad \int\frac{du}{u^2} = -\int\frac{dx}{x};$$
$$\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C; \qquad \frac{1}{u} = \ln Cx;$$

Делаем обратную подстановку: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln Cx; \qquad -\frac{y}{x} = \ln(\ln Cx);$

Общее решение: $\boxed{y = -x\ln(\ln Cx);}$

С учетом начального условия y(1) = 0: $0 = -\ln(\ln C);\qquad C = e;$

Частное решение: $\boxed{y = -x\ln(\ln ex);}$

Второй способ решения.

$$y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$$

Замена переменной: $u = \dfrac{y}{x};\quad y = ux;\quad y' = u'x + u;$

$$u'x + u + e^{u} - u = 0$$

$$u'x + e^{u} = 0$$

$$\frac{du}{dx}x = -e^{u}$$

$$-e^{-u}du = \frac{dx}{x}$$

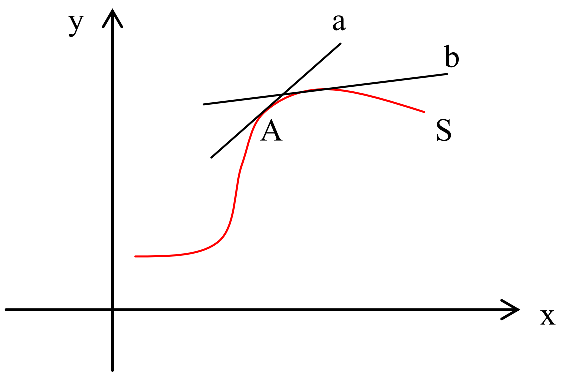
$$-\int e^{-u}du = \int\frac{dx}{x};$$

$$e^{-u} = \ln|x| + \ln C;\qquad e^{-u} = \ln|Cx|;$$

$$-u = \ln(\ln|Cx|);\qquad u = -\ln(\ln|Cx|);$$

Общее решение: $\boxed{y = -x\ln(\ln Cx);}$

Геометрическая интерпретация решений дифференциальных уравнений первого порядка.



Как уже говорилось выше, линия S, которая задается функцией, являющейся каким- либо решением дифференциального уравнения, называется интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$.

Производная *y’* является **угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой.**

В любой точке A(x, y) интегральной кривой этот угловой коэффициент касательной может быть найден еще до решения дифференциального уравнения.

Т.к. касательная указывает направление интегральной кривой еще до ее непосредственного построения, то при условии непрерывности функции f(x, y) и непрерывного перемещения точки А можно наглядно изобразить **поле направлений** кривых, которые получаются в результате интегрирования дифференциального уравнения, т.е. представляют собой его общее решение.

Определение. Множество касательных в каждой точке рассматриваемой области называется **полем направлений.**

С учетом сказанного выше можно привести следующее геометрическое истолкование дифференциального уравнения:

1) Задать дифференциальное уравнение первого порядка – это значит задать поле направлений.

2) Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение – это значит найти всевозможные кривые, у которых направление касательных в каждой точке совпадает с полем направлений.

Определение. Линии равного наклона в поле направлений называются **изоклинами**.

Численные методы решения дифференциальных уравнений.

Известные методы точного интегрирования дифференциальных уравнений позволяют найти решение в виде аналитической функции, однако эти методы применимы для очень ограниченного класса уравнений. Большинство уравнений, встречающихся при решении практических задач нельзя проинтегрировать с помощью этих методов.

В таких случаях используются численные методы решения, которые представляют решение дифференциального уравнения не в виде аналитической функции, а в виде таблиц значений искомой функции в зависимости от значения переменной.

Существует несколько методов численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые отличаются друг от друга по сложности вычислений и точности результата.

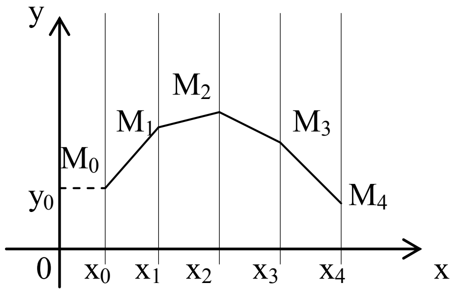
Рассмотрим некоторые из них.

Метод Эйлера.

(Леонард Эйлер (1707 – 1783) швейцарский математик)

Известно, что уравнение $y' = f(x, y)$ задает в некоторой области поле направлений. Решение этого уравнения с некоторыми начальными условиями дает кривую, которая касается поля направлений в любой точке.

Если взять последовательность точек x_0, x_1, x_2, …. и заменить на получившихся отрезках интегральную кривую на отрезки касательных к ней, то получим ломаную линию.



При подстановке заданных начальных условий (x_0, y_0) в дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ получаем угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в начальной точке

$$tg\alpha_0 = y' = f(x_0, y_0).$$

Заменив на отрезке [x_0, x_1] интегральную кривую на касательную к ней, получаем значение

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

Производя аналогичную операцию для отрезка $[x_1, x_2]$, получаем:

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

Продолжая подобные действия далее, получаем ломаную кривую, которая называется **ломаной Эйлера**.

Можно записать общую формулу вычислений:

$$\boxed{y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).}$$

Если последовательность точек x_i выбрать так, чтобы они отстояли друг от друга на одинаковое расстояние h, называемое шагом вычисления, то получаем формулу:

$$\boxed{y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h}$$

Следует отметить, что точность метода Эйлера относительно невысока. Увеличить точность можно, конечно, уменьшив шаг вычислений, однако, это приведет к усложнению расчетов. Поэтому на практике применяется так называемый **уточненный метод Эйлера** или **формула пересчета**.

Суть метода состоит в том, что в формуле $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$ вместо значения $y_0' = f(x_0, y_0)$ берется среднее арифметическое значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1)$. Тогда уточненное значение:

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2}h;$$

Затем находится значение производной в точке $(x_1, y_1^{(1)})$. Заменяя $f(x_0, y_0)$ средним арифметическим значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1^{(1)})$, находят второе уточненное значение y_1.

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})}{2}h;$$

Затем третье:

$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(2)})}{2}h;$$

и т.д. пока два последовательных уточненных значения не совпадут в пределах заданной степени точности. Тогда это значение принимается за ординату точки M_1 ломаной Эйлера.

Аналогичная операция производится для остальных значений y.

Подобное уточнение позволяет существенно повысить точность результата.

Метод Рунге – Кутта.

Метод Рунге – Кутта является более точным по сравнению с методом Эйлера.

Суть уточнения состоит в том, что искомое решение представляется в виде разложения в ряд Тейлора.

$$y_{i+1} = y_i + y_i'h + y_i''\frac{h^2}{2!} + y_i'''\frac{h^3}{3!} + y_i^{IV}\frac{h^4}{4!} + \ldots$$

Если в этой формуле ограничиться двумя первыми слагаемыми, то получим формулу метода Эйлера. Метод Рунге – Кутта учитывает четыре первых члена разложения.

$$y_{i+1} = y_i + y_i'h + y_i''\frac{h^2}{2!} + y_i'''\frac{h^3}{3!} = y_i + \Delta y_i.$$

В методе Рунге – Кутта приращения Δy_i предлагается вычислять по формуле:

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right)$$

где коэффициенты k_i вычисляются по формулам:

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i);\; k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right);\; k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right);\; k_4^{(i)} = hf\left(x_i + h; y_i + k_3^{(i)}\right);$$

<u>Пример.</u> Решить методом Рунге – Кутта дифференциальное уравнение $y' = x + y$ при начальном условии y(0) = 1 на отрезке [0; 0,5] с шагом 0,1.

Для i = 0 вычислим коэффициенты k_i.

$$k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = 0{,}1(x_0 + y_0) = 0{,}1(0+1) = 0{,}1;$$

$$k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0{,}1(0{,}05 + 1{,}05) = 0{,}11;$$

$$k_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0{,}1(0{,}05 + 1{,}055) = 0{,}1105;$$

$$k_4^{(0)} = hf\left(x_0 + h; y_0 + k_3^{(0)}\right) = 0{,}1(0{,}1 + 1{,}1105) = 0{,}1211;$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) = \frac{1}{6}(0{,}1 + 0{,}22 + 0{,}221 + 0{,}1211) = 0{,}1104;$$

$$x_1 = x_0 + h = 0{,}1;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1104 = 1{,}1104;$$

Последующие вычисления приводить не будем, а результаты представим в виде таблицы.

i	x_i	k		Δy_i	y_i
0	0	1	0,1000	0,1104	1
		2	0,1100		
		3	0,1105		
		4	0,1155		
1	0,1	1	0,1210	0,1325	1,1104
		2	0,1321		
		3	0,1326		
		4	0,1443		
2	0,2	1	0,1443	0,1569	1,2429
		2	0,1565		
		3	0,1571		
		4	0,1700		
3	0.3	1	0,1700	0,1840	1,3998
		2	0,1835		
		3	0,1842		
		4	0,1984		
4	0,4	1	0,1984	0,2138	1,5838
		2	0,2133		
		3	0,2140		
		4	0,2298		
5	0,5				1,7976

Решим этот же пример методом Эйлера.

Применяем формулу $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$.

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \qquad f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 = 1;$$
$$hf(x_0, y_0) = h(x_0 + y_0) = 0{,}1;$$
$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1 = 1{,}1.$$

$$x_1 = 0{,}1 \quad y_0 = 1{,}1 \qquad f(x_1, y_1) = x_1 + y_1 = 1{,}2;$$
$$hf(x_1, y_1) = h(x_1 + y_1) = 0{,}12;$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}12 = 1{,}22.$$

Производя аналогичные вычисления далее, получаем таблицу значений:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,22	1,362	1,528	1,721

Применим теперь уточненный метод Эйлера.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,243	1,400	1,585	1,799

Для сравнения точности приведенных методов численного решение данного уравнения решим его аналитически и найдем точные значения функции y на заданном отрезке.

Уравнение $y' - y = x$ *является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Решим соответствующее ему однородное уравнение.*

$$y' - y = 0; \qquad y' = y; \qquad \frac{dy}{dx} = y; \qquad \frac{dy}{y} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y} = \int dx;$$

$$\ln|y| = x + \ln C; \qquad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = x; \qquad \boxed{y = Ce^x};$$

Решение неоднородного уравнения имеет вид $y = C(x)e^x$.

$$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x;$$

$$C'(x)e^x + C(x)e^x = x + C(x)e^x; \qquad C'(x)e^x = x; \qquad C'(x) = xe^{-x};$$

$$C(x) = \int xe^{-x}dx = \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = e^{-x}dx; \\ du = dx; & v = -e^{-x}; \end{matrix} \right\} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C;$$

Общее решение: $y = Ce^x - x - 1$;

С учетом начального условия: $1 = C - 0 - 1; \qquad C = 2$;

Частное решение: $y = 2e^x - x - 1$;

Для сравнения полученных результатов составим таблицу.

i	x_i	y_i			
		Метод Эйлера	*Уточненный метод Эйлера*	*Метод Рунге - Кутта*	*Точное значение*
0	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0,1*	*1,1*	*1,1*	*1,1104*	*1,1103*
2	*0,2*	*1,22*	*1,243*	*1,2429*	*1,2428*
3	*0,3*	*1,362*	*1,4*	*1,3998*	*1,3997*
4	*0,4*	*1,528*	*1,585*	*1,5838*	*1,5837*
5	*0,5*	*1,721*	*1,799*	*1,7976*	*1,7975*

Как видно из полученных результатов метод Рунге – Кутта дает наиболее точный ответ. Точность достигает 0,0001. Кроме того, следует обратить внимание на то, ошибка (расхождение между точным и приближенным значениями) увеличивается с каждым шагом вычислений. Это обусловлено тем, что во – первых полученное приближенное значение округляется на каждом шаге, а во – вторых – тем, что в качестве основы вычисления принимается значение, полученное на предыдущем шаге, т.е. приближенное значение. Таким образом, происходит накопление ошибки.

Это хорошо видно из таблицы. С каждым новым шагом приближенное значение все более отличается от точного.

Дифференциальные уравнения высших порядков.

Определение. Дифференциальным уравнением порядка *n* называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Определение. Решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, если $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$, ... , $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Определение. Нахождение решения уравнения $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, называется **решением задачи Коши.**

Теорема Коши. (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши).

Если функция (n-1) –й переменных вида $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ в некоторой области D (n-1)- мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по $y, y', ..., y^{(n-1)}$, то какова бы не была точка ($x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$) в этой области, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, определенного в некотором интервале, содержащем точку x_0, удовлетворяющее начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Рассмотрим подробнее методы нахождения решений этих уравнений.

Уравнения, допускающие понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если f(x) – функция непрерывная на некотором промежутке a < x < b, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx\int f(x)dx + C_1x + C_2;$$

…………………………………………………………………

$$\boxed{y = \int dx\int dx....\int f(x)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;}$$

Пример. *Решить уравнение* $y''' = e^{2x}$ *с начальными условиями* $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $y_0' = -1$; $y_0'' = 0$.

$$y'' = \int e^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2;$$

$$y = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2\right) = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3;$$

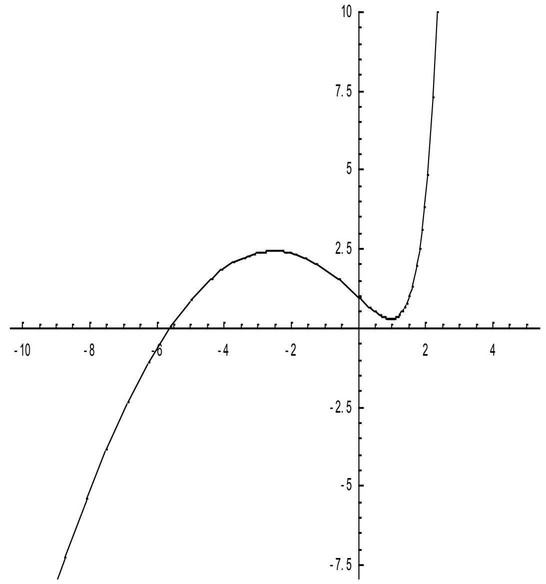
Подставим начальные условия:

$$1 = \frac{1}{8} + C_3; \quad -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{5}{4}; \quad C_3 = \frac{7}{8};$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши): $\boxed{y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}.}$

Ниже показана интегральная кривая данного дифференциального уравнения.



Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка *k – 1* включительно.

Это уравнения вида: $\boxed{F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},..., y^{(n)}) = 0.}$

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на k единиц. Для этого производят замену переменной:

$$y^{(k)} = z; \quad y^{(k+1)} = z'; \quad ... \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тогда получаем: $F(x, z, z',..., z^{(n-k)}) = 0.$

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$z = \psi(x, C_1, C_2,..., C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2,..., C_{n-k})$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно k раз, получаем окончательный ответ:

$$\boxed{y = \varphi(x, C_1, C_2,..., C_n).}$$

<u>Пример.</u> Найти общее решение уравнения $y''' = \dfrac{y''}{x}$.

Применяем подстановку $z = y''; \quad z' = y''';$

$$z' = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \qquad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1; \qquad z = C_1 x;$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y'' = C_1 x; \qquad y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3;$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$\boxed{y = Cx^3 + C_2 x + C_3;}$$

Отметим, что это соотношение является решением для всех значений переменной *x* кроме значения *x =0*.

Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy}p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy}p\right)}{dy}p = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\boxed{\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.}$$

Пример. Найти общее решение уравнения $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0.$

Замена переменной: $p = y'; \qquad y'' = \frac{dp}{dy}p;$

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0; \qquad p\left(y\frac{dp}{dy} - p - 4y\right) = 0;$$

1) $y\frac{dp}{dy} - p - 4y = 0; \qquad \frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y};$

Для решения полученного дифференциального уравнения произведем замену переменной: $u = \frac{p}{y}.$

$$u + \frac{du}{dy}y = 4 + u; \qquad du = 4\frac{dy}{y};$$

$$\int du = 4\int\frac{dy}{y}; \qquad u = 4\ln|y| + 4\ln C_1; \qquad u = 4\ln|C_1 y|;$$

$$p = 4y\ln|C_1 y|;$$

С учетом того, что $p = \frac{dy}{dx}$, *получаем:*

$$\frac{dy}{dx} = 4y\ln|C_1 y|; \qquad \int\frac{dy}{4y\ln|C_1 y|} = \int dx;$$

$$x = \frac{1}{4}\int \frac{d(\ln|C_1 y|)}{\ln|C_1 y|} = \frac{1}{4}\ln|\ln|C_1 y|| + C_2;$$

Общий интеграл имеет вид: $\boxed{\ln|\ln|C_1 y|| = 4x + C;}$

2) $p = 0;$ $\quad y' = 0;$ $\quad \boxed{y = C;}$

Таким образом, получили два общих решения.

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Определение. Линейным дифференциальным уравнением *n* – го порядка называется любое уравнение первой степени относительно функции *y* и ее производных $y', y'', ..., y^{(n)}$ вида:

$$\boxed{p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x);}$$

где $p_0, p_1, ..., p_n$ – функции от *x* или постоянные величины, причем $p_0 \neq 0$.

Левую часть этого уравнения обозначим *L(y)*.

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = L(y);$$

Определение. Если *f(x) = 0*, то уравнение *L(y) = 0* называется **линейным однородным** уравнением, если *f(x) ≠ 0,* то уравнение *L(y) = f(x)* называется **линейным неоднородным** уравнением, если все коэффициенты $p_0, p_1, p_2, ... p_n$ – постоянные числа, то уравнение *L(y) = f(x)* называется **линейным дифференциальным уравнением высшего порядка с постоянными коэффициентами**.

Отметим одно важное свойство линейных уравнений высших порядков, которое отличает их от нелинейных. Для нелинейных уравнений частный интеграл находится из общего, а для линейных – наоборот, общий интеграл составляется из частных. Линейные уравнения представляют собой наиболее изученный класс дифференциальных уравнений высших порядков. Это объясняется сравнительной простотой нахождения решения. Если при решении каких – либо практических задач требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение, то часто применяются приближенные методы, позволяющие заменить такое уравнение “близким” к нему линейным.

Рассмотрим способы интегрирования некоторых типов линейных дифференциальных уравнений высших порядков.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение вида $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = 0$

Определение. Выражение $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = L(y)$ называется **линейным дифференциальным оператором**.

Линейный дифференциальный оператор обладает следующими свойствами:

1) $L(Cy) = CL(y);$

2) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2);$

Решения линейного однородного уравнения обладают следующими свойствами:

1) Если функция y_1 является решением уравнения, то функция Cy_1, где C – постоянное число, также является его решением.

2) Если функции y_1 и y_2 являются решениями уравнения, то $y_1 + y_2$ также является его решением.

Структура общего решения.

Определение. Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения n –го порядка на интервале (a, b) называется всякая система n линейно независимых на этом интервале решений уравнения.

Определение. Если из функций y_i составить определитель n – го порядка

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

то этот определитель называется **определителем Вронского.**

(Юзеф Вроньский (1776 – 1853) – польский математик и философ - мистик)

Теорема. ***Если функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно зависимы, то составленный для них определитель Вронского равен нулю.***

Теорема. Если функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно независимы, то составленный для них определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке рассматриваемого интервала.

Теорема. Для того, чтобы система решений линейного однородного дифференциального уравнения $y_1, y_2, ..., y_n$ была фундаментальной необходимо и достаточно, чтобы составленный для них определитель Вронского был не равен нулю.

Теорема. Если $y_1, y_2, ..., y_n$ - фундаментальная система решений на интервале (a, b), то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией этих решений.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,$$

где C_i –постоянные коэффициенты.

Применение приведенных выше свойств и теорем рассмотрим на примере линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Из вышеизложенного видно, что отыскание общего решения линейного однородного дифференциального уравнения сводится к нахождению его фундаментальной системы решений.

Однако, даже для уравнения второго порядка, если коэффициенты p зависят от x, эта задача не может быть решена в общем виде.

Тем не менее, если известно одно ненулевое частное решение, то задача может быть решена.

Теорема. ***Если задано уравнение вида*** $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ ***и известно одно ненулевое решение y = y₁, то общее решение может быть найдено по формуле:***

$$y = C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_1 y_1.$$

Таким образом, для получения общего решения надо подобрать какое – либо частное решение дифференциального уравнения, хотя это бывает часто довольно сложно.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Решение дифференциального уравнения вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$ или, короче, $L(y) = 0$ будем искать в виде $y = e^{kx}$, где *k = const.*

Т.к. $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$; ... $y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то

$$L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n).$$

При этом многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n$ называется **характеристическим многочленом** дифференциального уравнения.

Для того, чтобы функция $y = e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы

$$L(e^{kx}) = 0; \text{ т.е. } e^{kx}F(k) = 0.$$

Т.к. $e^{kx} \neq 0$, то $F(k) = 0$ - это уравнение называется **характеристическим уравнением**.

Как и любое алгебраическое уравнение степени *n*, характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$ имеет *n* корней. Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения.

В зависимости от коэффициентов *k* характеристическое уравнение может иметь либо *n* различных действительных корней, либо среди действительных корней могут быть кратные корни, могут быть комплексно – сопряженные корни, как различные, так и кратные.

Не будем подробно рассматривать каждый случай, а сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню соответствует решение e^{kx};

б) каждому действительному корню кратности *m* ставится в соответствие *m* решений:

$$e^{kx}; \quad xe^{kx}; \quad ... \quad x^{m-1}e^{kx}.$$

в) каждой паре комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнение ставится в соответствие два решения:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ и } e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

г) каждой паре *m* – кратных комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие 2*m* решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad ... \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad ...x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример. *Решить уравнение* $y''' - y = 0$.

Составим характеристическое уравнение: $k^3 - 1 = 0;$

$$(k-1)(k^2+k+1) = 0; \qquad k_1 = 1; \qquad k^2+k+1=0;$$

$$D = 1-4 = -3; \qquad k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \qquad k_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

Общее решение имеет вид: $\boxed{y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left[C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].}$

Пример. *Решить уравнение* $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами второго порядка. Для нахождения общего решения необходимо отыскать какое - либо частное решение.

Таким частным решением будет являться функция $y_1 = x.$

$$y_1' = 1; \quad y_1'' = 0; \qquad 0 - 2x + 2x = 0;$$

Исходное дифференциальное уравнение можно преобразовать:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2y}{1-x^2} = 0.$$

Общее решение имеет вид: $y = C_1 x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx} dx + C_2 x;$

$$y = C_1 x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} dx + C_2 x;$$

$$y = C_1 x \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} + C_2 x; \qquad y = C_2 x + C_1 x \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right]dx;$$

$$y = C_2 x + C_1 x\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right];$$

Окончательно: $\boxed{y = C_2 x + C_3 x \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C_4;}$

Пример. *Решить уравнение* $y^{IV} - y = 0.$

Составим характеристическое уравнение: $k^4 - 1 = 0.$

$$(k^2-1)(k^2+1) = 0; \qquad k_1 = 1; \quad k_2 = -1; \quad k_3 = i; \quad k_4 = -i.$$

Общее решение: $\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3\cos x + C_4 \sin x.}$

Пример. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0; \quad k_1 = k_2 = 2.$

Общее решение: $\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.}$

Пример. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0; \quad D = -16; \quad k_1 = -1 + 2i;$
$k_2 = -1 - 2i.$

Общее решение: $\boxed{y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).}$

Пример. Решить уравнение $y''' - 7y'' + 6y' = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^3 - 7k^2 + 6k = 0; \quad k(k^2 - 7k + 6) = 0;$

$$k_1 = 0; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = 6;$$

Общее решение: $\boxed{y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{6x};}$

Пример. Решить уравнение $y'' - y' - 2y = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^2 - k - 2 = 0; \quad k_1 = -1; \quad k_2 = 2;$

Общее решение: $\boxed{y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.}$

Пример. Решить уравнение $y^{V} - 9y''' = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^5 - 9k^3 = 0; \quad k^3(k^2 - 9) = 0;$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0; \quad k_4 = 3; \quad k_5 = -3;$$

Общее решение: $\boxed{y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x};}$

Пример. Решить уравнение $yy'' - y'^2 = 0$.

Это уравнение не является линейным, следовательно, приведенный выше метод решения к нему неприменим.
Понизим порядок уравнения с помощью подстановки $y' = p$.

Тогда $y'' = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p.$

$$y \frac{dp}{dy} p - p^2 = 0; \quad p_1 = 0; \quad y_1 = C_1;$$

$$\frac{ydp}{dy} = p; \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}; \quad \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y}; \quad \ln|p| = \ln|y| + \ln C;$$

$$p = Cy; \quad y' = Cy; \quad \frac{dy}{Cy} = dx; \quad \int \frac{dy}{Cy} = \int dx;$$

$$\frac{1}{C} \ln|Cy| = x + \ln C_2; \quad Cy = e^{Cx} e^{C \ln C_2} = C_3 e^{Cx};$$

Окончательно получаем: $\boxed{y = C_1 e^{Cx};}$

Это выражение будет общим решением исходного дифференциального уравнения. Полученное выше решение $y_1 = C_1$ получается из общего решения при $C = 0$.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $3yy'' + y'^2 = 0.$

Производим замену переменной: $y' = p; \quad y'' = \dfrac{dp}{dy}y' = p\dfrac{dp}{dy};$

$$3yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0; \quad p_1 = 0; \quad y_1 = C;$$

$$3y\frac{dp}{dy} = -p; \qquad \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{3y}; \qquad \int\frac{dp}{p} = -\frac{1}{3}\int\frac{dy}{y};$$

$$\ln|p| = -\frac{1}{3}\ln|y| + \ln C; \qquad p^3 = \frac{C}{y}; \qquad y' = C_1 y^{-\frac{1}{3}};$$

$$y^{\frac{1}{3}}dy = C_1 dx; \qquad \int y^{\frac{1}{3}}dy = C_1\int dx; \qquad \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} = C_1 x + C_2;$$

$$y^{\frac{4}{3}} = C_3 x + C_4;$$

Общее решение: $\boxed{y = (C_3 x + C_4)^{\frac{3}{4}}.}$

<u>Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.</u>

Рассмотрим уравнение вида $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x).$

С учетом обозначения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = L(x)$ можно записать:

$$L(x) = f(x).$$

При этом будем полагать, что коэффициенты и правая часть этого уравнения непрерывны на некотором интервале (конечном или бесконечном).

<u>Теорема.</u> ***Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения*** $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$ ***в некоторой области есть сумма любого его решения и общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.***

<u>Доказательство.</u> Пусть Y – некоторое решение неоднородного уравнения.
Тогда при подстановке этого решения в исходное уравнение получаем тождество:

$$L(Y) \equiv f(x).$$

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - фундаментальная система решений линейного однородного уравнения $L(y) = 0$. Тогда общее решение однородного уравнения можно записать в виде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n; \quad C_i = const.$$

Далее покажем, что сумма $Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ является общим решением неоднородного уравнения.

$$L(Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n) = L(Y) + L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + \ldots + L(C_n y_n) = L(Y) = f(x)$$

Вообще говоря, решение Y может быть получено из общего решения, т.к. является частным решением.

Таким образом, в соответствии с доказанной теоремой, для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения необходимо найти общее решение соответствующего однородного уравнения и каким- то образом отыскать одно частное решение неоднородного уравнения. Обычно оно находится подбором.

На практике удобно применять метод **вариации произвольных постоянных**.
Для этого сначала находят общее решение соответствующего однородного уравнения в виде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i;$$

Затем, полагая коэффициенты C_i функциями от x, ищется решение неоднородного уравнения:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i;$$

Можно доказать, что для нахождения функций $C_i(x)$ надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x$.

Решаем линейное однородное уравнение $y'' + y = 0$.

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = i; \quad k_2 = -i.$$

$$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x); \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1;$$

$$y = A\cos x + B\sin x;$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = A(x)\cos x + B(x)\sin x;$$

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = x - \sin 2x \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} B'(x) = -A'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x} \\ -A'(x)\sin x - A'(x)\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = x - \sin 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{-A'(x)}{\sin x} = x - \sin 2x \\ B'(x) = \cos x(x - \sin 2x) \end{cases}$$

Из соотношения $A'(x) = 2\sin^2 x\cos x - x\sin x$ *найдем функцию A(x).*

$$A(x) = \int \left(2\sin^2 x\cos x - x\sin x\right)dx = 2\int \sin^2 x\cos x dx - \int x\sin x dx = \frac{2}{3}\sin^3 x - \int x\sin x dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = \sin x dx; \\ du = dx; & v = -\cos x \end{matrix} \right\} = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \int \cos x dx = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \sin x + C_1.$$

Теперь находим B(x).

$$B(x) = \int x\cos xdx - 2\int \cos^2 x\sin xdx = \begin{Bmatrix} u = x; & dv = \cos xdx; \\ du = dx; & v = \sin x; \end{Bmatrix} = x\sin x - \int \sin xdx + \frac{2}{3}\cos^3 x =$$

$$= \frac{2}{3}\cos^3 x + x\sin x + \cos x + C_2.$$

Подставляем полученные значения в формулу общего решения неоднородного уравнения:

$$y = \frac{2}{3}\sin^3 x\cos x + x\cos^2 x - \sin x\cos x + C_1\cos x + \frac{2}{3}\sin x\cos^3 x + x\sin^2 x + \sin x\cos x + C_2\sin x =$$

$$= \frac{2}{3}\sin x\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) + x(\sin^2 x + \cos^2 x) + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Окончательный ответ: $\boxed{y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x;}$

Таким образом, удалось избежать нахождения частного решения неоднородного уравнения методом подбора.

Вообще говоря, метод вариации произвольных постоянных пригоден для нахождения решений любого линейного неоднородного уравнения. Но т.к. нахождение фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения может быть достаточно сложной задачей, этот метод в основном применяется для неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Уравнения с правой частью специального вида.

Представляется возможным представить вид частного решения в зависимости от вида правой части неоднородного уравнения.

Различают следующие случаи:

I. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\boxed{f(x) = P(x)e^{\alpha x},}$$

где $P(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + ... + A_m$ - многочлен степени *m*.

Тогда частное решение ищется в виде:

$$\boxed{y = x^r e^{\alpha x}Q(x)}$$

Здесь *Q(x)*- многочлен той же степени, что и *P(x)*, но с неопределенными коэффициентами, а *r* – число, показывающее сколько раз число α является корнем характеристического уравнения для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

Пример. Решить уравнение $y''' - 4y' = x$.

Решим соответствующее однородное уравнение: $y''' - 4y' = 0$.

$$k^3 - 4k = 0; \quad k(k^2 - 4) = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 2; \quad k_3 = -2;$$

$$y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x};$$

Теперь найдем частное решение исходного неоднородного уравнения.

Сопоставим правую часть уравнения с видом правой части, рассмотренным выше.

$$P(x) = x; \quad \alpha = 0.$$

Частное решение ищем в виде: $y = x^r e^{\alpha x}Q(x)$, *где* $r = 1; \quad \alpha = 0; \quad Q(x) = Ax + B.$

Т.е. $y = Ax^2 + Bx$.
Теперь определим неизвестные коэффициенты А и В.
Подставим частное решение в общем виде в исходное неоднородное дифференциальное уравнение.

$$y' = 2Ax + B; \quad y'' = 2A; \quad y''' = 0;$$

$$0 - 8Ax - 4B = x; \quad -8A = 1; \quad A = -\frac{1}{8}; \quad B = 0;$$

Итого, частное решение: $y = -\dfrac{x^2}{8}$.

Тогда общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$\boxed{y = -\frac{x^2}{8} + C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}.}$$

II. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\boxed{f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right]}$$

Здесь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.
Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$\boxed{y = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]}$$

где число r показывает сколько раз число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения, а $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – многочлены степени не выше m, где m- большая из степеней m_1 и m_2.

Заметим, что если правая часть уравнения является комбинацией выражений рассмотренного выше вида, то решение находится как комбинация решений вспомогательных уравнений, каждое из которых имеет правую часть, соответствующую выражению, входящему в комбинацию.

Т.е. если уравнение имеет вид: $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение этого уравнения будет $y = y_1 + y_2$, где y_1 и y_2 – частные решения вспомогательных уравнений

$$L(y) = f_1(x) \text{ и } L(y) = f_2(x)$$

Для иллюстрации решим рассмотренный выше пример другим способом.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x$.
Правую часть дифференциального уравнения представим в виде суммы двух функций $f_1(x) + f_2(x) = x + (-\sin x)$.
Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 1 = 0; \qquad k_{1,2} = \pm i;$

1. *Для функции* $f_1(x)$ *решение ищем в виде* $y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

Получаем: $\alpha = 0, \quad r = 0, Q(x) = Ax + B;$ *Т.е.* $\quad y_1 = Ax + B;$

$$y_1' = A; \qquad y_1'' = 0;$$

$$Ax + B = x; \quad A = 1; \quad B = 0;$$

$$\textit{Итого: } y_1 = x;$$

2. *Для функции* $f_2(x)$ *решение ищем в виде:* $y_2 = x^r e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$.

Анализируя функцию f₂(x), получаем: $P_1(x) = 0; \quad P_2(x) = -1; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 2; \quad r = 0;$

Таким образом, $y_2 = C\cos 2x + D\sin 2x;$

$$y_2' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x;$$

$$y_2'' = -4C2\cos x - 4D\sin 2x;$$

$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = -\sin 2x;$$

$$-3C\cos 2x - 3D\sin 2x = -\sin 2x$$

$$A = 0; \quad B = \frac{1}{3};$$

Итого: $y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x;$

Т.е. искомое частное решение имеет вид: $y = y_1 + y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x + x;$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x;$$

Рассмотрим примеры применения описанных методов.

Пример. *Решить уравнение* $y'' - 2y' + y = 3e^x$.

Составим характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$k^2 - 2k + 1 - 0; \qquad k_1 = k_2 = 1;$$

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1e^x + C_2xe^x$.

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

$$\alpha = 1; \quad r = 2; \quad Q(x) = C;$$

$$y = Cx^2e^x.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$$y' = 2Cxe^x + Cx^2e^x; \qquad y'' = 2Ce^x + 2Cxe^x + 2Cxe^x + Cx^2e^x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$2Ce^x + 4Cxe^x + Cx^2e^x - 4Cxe^x - 2Cx^2e^x + Cx^2e^x = 3e^x.$$

$$2C = 3; \qquad C = \frac{3}{2}.$$

Частное решение имеет вид: $y = \frac{3}{2}x^2e^x$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения: $\boxed{y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{3}{2}x^2e^x.}$

Пример. *Решить уравнение* $y''' - y' = x^2 - 1$.

Характеристическое уравнение: $k^3 - k = 0; \quad k(k^2 - 1) = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = -1;$

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x}$.

Частное решение неоднородного уравнения: $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

$$\alpha = 0; \quad r = 1; \quad Q(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

Находим производные и подставляем их в исходное неоднородное уравнение:

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C; \quad y'' = 6Ax + 2B; \quad y''' = 6A;$$

$$6A - 3Ax^2 - 2Bx - C = x^2 - 1;$$

$$-3A = 1; \quad -2B = 0; \quad 6A - C = -1;$$

$$A = -\frac{1}{3}; \quad B = 0; \quad C = -1;$$

Получаем общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$\boxed{y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} - \frac{1}{3}x^3 - x.}$$

Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Определение. Совокупность соотношений вида:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \end{cases}$$

где x- независимая переменная, y_1, $y_2, \dots, y_n$ – искомые функции, называется **системой дифференциальных уравнений первого порядка**.

Определение. Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций называется **нормальной системой дифференциальных уравнений**.

Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

Для примера можно сказать, что график решения системы двух дифференциальных уравнений представляет собой интегральную кривую в трехмерном пространстве.

Теорема. **(Теорема Коши).** ***Если в некоторой области (n-1) –мерного пространства функции*** $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, ***…*** $f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ ***непрерывны и имеют непрерывные частные производные по*** $y_1, y_2, ..., y_n$***, то для любой точки*** $(x_0.y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ ***этой области существует единственное решение***

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad \dots \quad y_n = \varphi_n(x)$$

системы дифференциальных уравнений вида (1), определенное в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальным условиям $x_0.y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$.

Определение. **Общим решением** системы дифференциальных уравнений вида (1) будет совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, … $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, которые при подстановке в систему (1) обращают ее в тождество.

Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений (n = 3). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

Определение. Нормальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется **линейной однородной**, если ее можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \dfrac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases} \qquad (2)$$

Решения системы (2) обладают следующими свойствами:
1) Если y, z, u – решения системы, то Cy, Cz, Cu , где $C = const$ – тоже являются решениями этой системы.
2) Если y_1, z_1, u_1 и y_2, z_2, u_2 – решения системы, то $y_1 + y_2, z_1 + z_2, u_1 + u_2$ – тоже являются решениями системы.

Решения системы ищутся в виде: $y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = const$
Подставляя эти значения в систему (2) и перенеся все члены в одну сторону и сократив на e^{kx}, получаем:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно k. Это уравнение называется **характеристическим уравнением** и имеет три корня k_1, k_2, k_3. Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы (2):

$$\begin{aligned} &y_1 = \alpha_1 e^{k_1 x}, \qquad z_1 = \beta_1 e^{k_1 x}, \qquad u_1 = \gamma_1 e^{k_1 x}, \\ &y_2 = \alpha_2 e^{k_2 x}, \qquad z_2 = \beta_2 e^{k_2 x}, \qquad u_2 = \gamma_2 e^{k_2 x}, \\ &y_3 = \alpha_3 e^{k_3 x}, \qquad z_3 = \beta_3 e^{k_3 x}, \qquad u_3 = \gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned}$$

Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами будет решением системы (2):

$$\begin{aligned} y &= C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x}; \\ z &= C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x}; \\ u &= C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned}$$

Пример. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0; \qquad (5-k)(2-k)-4=0; \qquad 10-5k-2k+k^2-4=0;$$

$$k^2-7k+6=0; \qquad k_1=1; \qquad k_2=6;$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22}-k)\beta = 0 \end{cases}$$

Для k_1: $\begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_1 = 1$ *(принимается любое значение), получаем:* $\beta_1 = -2$.

Для k_2: $\begin{cases} (5-6)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + (2-6)\beta_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -1\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\beta_2 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_2 = 2$ *(принимается любое значение), получаем:* $\beta_2 = 1$.

Общее решение системы: $\boxed{\begin{cases} x = C_1e^t + 2C_2e^{6t} \\ y = -2C_1e^t + C_2e^{6t} \end{cases}}$

Этот пример может быть решен другим способом:

Продифференцируем первое уравнение: $x'' = 5x' + 2y'$;

Подставим в это выражение производную $y' = 2x + 2y$ из второго уравнения.

$$x'' = 5x' + 4x + 4y;$$

Подставим сюда y, выраженное из первого уравнения:

$$x'' = 5x' + 4x + 2x' - 10x$$

$$x'' - 7x' + 6x = 0$$

$$k_1 = 6; \qquad k_2 = 1$$

$$x = Ae^t + Be^{6t}; \qquad x' = Ae^t + 6Be^{6t};$$

$$2y = x' - 5x = Ae^t + 6Be^{6t} - 5Ae^t - 5Be^{6t};$$

$$y = -2Ae^t + \frac{1}{2}Be^{6t};$$

Обозначив $A = C_1$; $\frac{1}{2}B = C_2$, *получаем решение системы:* $\boxed{\begin{cases} x = C_1e^t + 2C_2e^{6t} \\ y = -2C_1e^t + C_2e^{6t} \end{cases}}$

<u>Пример.</u> Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y + z + x \end{cases}$$

Эта система дифференциальных уравнений не относится к рассмотренному выше типу, т.к. не является однородным (в уравнение входит независимая переменная x).

Для решения продифференцируем первое уравнение по x. Получаем:

$$y'' = y' + z'.$$

Заменяя значение z' из второго уравнения получаем: $y'' = y' + y + z + x$.

С учетом первого уравнения, получаем: $y'' = 2y' + x$.

Решаем полученное дифференциальное уравнение второго порядка.

$$y'' - 2y' = x; \qquad y'' - 2y' = 0; \qquad k^2 - 2k = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 2.$$

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Теперь находим частное решение неоднородного дифференциального уравнения по формуле $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$; $\alpha = 0$; $r = 1$; $Q(x) = Ax + B$;

$$y = Ax^2 + Bx; \quad y' = 2Ax + B; \quad y'' = 2A;$$

$$2A - 4Ax - 2B = x; \qquad A = -\frac{1}{4}; \quad B = -\frac{1}{4};$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$\boxed{y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x(x+1).}$$

Подставив полученное значение в первое уравнение системы, получаем:

$$\boxed{z = -C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1).}$$

<u>*Пример.*</u> *Найти решение системы уравнений:*

$$\begin{cases} y' = z + w \\ z' = 3y + w \\ w' = 3y + z \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 3 & -k & 1 \\ 3 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0; \qquad -k\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -k \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-k(k^2 - 1) + 3k + 3 + 3 + 3k = 0; \qquad k^3 - 7k - 6 = 0; \qquad k_1 = -1; \quad k_2 = -2; \quad k_3 = 3;$$

1) *k = -1.*

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0; \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \qquad \alpha = 0; \quad \beta = -\gamma;$$

Если принять $\gamma = 1$*, то решения в этом случае получаем:*

$$y_1 = 0; \quad z_1 = -e^{-x}; \quad w_1 = e^{-x};$$

2) $k_2 = -2$.

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0; \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \qquad \alpha = -\gamma; \quad \beta = \gamma;$$

Если принять $\gamma = 1$*, то получаем:*

$$y_2 = -e^{-2x}; \quad z_2 = e^{-2x}; \quad w_2 = e^{-2x};$$

3) $k_3 = 3$.

$$\begin{cases} -3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\beta + \gamma = 0\ ; \\ 3\alpha + \beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \quad \alpha = \frac{2}{3}\gamma; \quad \beta = \gamma;$$

Если принять $\gamma = 3$, то получаем:

$$y_3 = 2e^{3x}; \quad z_3 = 3e^{3x}; \quad w_3 = 3e^{3x};$$

Общее решение имеет вид:

$$\boxed{\begin{cases} y = -C_2 e^{-2x} + 2C_3 e^{3x} \\ z = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 3C_3 e^{3x} \\ w = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 3C_3 e^{3x} \end{cases}}$$