ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Н.В. Мирошин, А.С. Логинов, В.М. Простокишин

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Учебно-методическое пособие

Москва 2009

УДК 514.742.4(07)
ББК 22.151.5я7
М69

Мирошин Н.В., Логинов А.С., Простокишин В.М. **Интегральные и дифференциальные операторы и обобщенные функции:** Учебно-методическое пособие. – М.: НИЯУ МИФИ, 2009. – 168 с.

Дан материал по базовым разделам теории дифференциальных и интегральных операторов, теории интеграла Лебега, обобщенным функциям, фундаментальным решениям линейных дифференциальных и интегральных уравнений. Значительное место в пособии уделяется вопросам использования преобразования Фурье в решении различных задач математической физики. В качестве приложения изучаемого аппарата, в частности, рассматривается обобщенная задача Дирихле для уравнений эллиптического типа, а также задача Коши для уравнения теплопроводности.

Предназначено для студентов 4-6 семестров НИЯУ МИФИ факультетов «Т» и «Ф» и Высшего физического колледжа.

Рецензент проф. О.С. Сороковикова

Рекомендовано редсоветом НИЯУ МИФИ
в качестве учебно-методического пособия

*ISBN 978-5-7262-1317-0*

# I. ВВЕДЕНИЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## § 1. Метод последовательных приближений

В этом параграфе докажем *теорему существования и единственности* (ТСЕ) решения задачи Коши для системы

$$\vec{y}' = \vec{f}(t,\vec{y}), \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0, \tag{1.1}$$

$$\vec{y} = \{y_1(t),...,y_n(t)\}, \ \ \vec{f}(t,\vec{y}) = \{f_1(t,\vec{y}),...,f_n(t,\vec{y})\}$$

методом *последовательных приближений*. Для системы (1.1) на правую часть $\vec{f}(t,\vec{y})$ помимо непрерывности приходится налагать дополнительные условия.

Положим: $|\vec{y}(x)| = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k(t)|^2\right)^{1/2}$, и обозначим $\overline{U}_\delta(N_0)$ – замыкание шара $U_\delta(N_0) = U_\delta(t_0,\vec{y}_0)$. .

***<u>Теорема 1.1 (ТСЕ).</u>*** Пусть вектор-функция $\vec{f}(t,\vec{y})$ определена в области $G \subseteq E^{n+1}_{x,\vec{y}}$, $N_0(t_0,\vec{y}_0) \in G$ (внутренняя точка). Пусть, кроме того, $\exists \delta > 0$: в $\overline{U_\delta(t_0,\vec{y}_0)}$ выполнены условия:

1) $\vec{f}(t,\vec{y})$ *непрерывна* по $(t,\vec{y})$;

2) $\vec{f}(t,\vec{y})$ удовлетворяет в $\overline{U_\delta(t_0,\vec{y}_0)}$ по $\vec{y}$ *условию Липшица*:

$$\exists K > 0: \ \forall\left((t,\vec{y}_1),\ (t,\vec{y}_2) \in \overline{U_\delta(t_0,\vec{y}_0)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\vec{f}(x,\vec{y}_2) - \vec{f}(x,\vec{y}_1)\right| \le K|\vec{y}_2 - \vec{y}_1|.$$

Тогда $\exists h > 0$, такое, что на отрезке $[t_0 - h,\ t_0 + h]$ *существует* и *притом единственное решение* задачи (1.1).

<u>*Доказательство.*</u> Докажем сначала *существование* решения задачи (1.1). Если такое решение существует на $[x_0 - h,\ x_0 + h]$, $h > 0$, то, интегрируя (1.1), получим, что это решение удовлетворяет интегральному уравнению

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}\left(t, \vec{y}(s)\right) ds\,. \qquad (1.2)$$

Обратно, если $\vec{y}(t)$ – непрерывное на $[t_0 - h,\ t_0 + h]$ решение интегрального уравнения (1.2), то (в силу теоремы о дифференцировании интеграла по верхнему пределу) оно удовлетворяет задаче (1.1). Таким образом, нахождение решения задачи (1.1) эквивалентно нахождению непрерывного решения уравнения (1.2).

Теперь рассмотрим уравнение (1.2). Пусть

$$M = \sup\left(\left|\vec{f}(t, \vec{y})\right|,\ (t, \vec{y}) \in \overline{U_\delta(t_0, \vec{y}_0)}\right).$$

Тогда $\{(t, \vec{y}):\ |\vec{y} - \vec{y}_0| \le M|t - t_0|\}$ – конус с вершиной в точке $N_0(t_0, \vec{y}_0)$. Обозначим абсциссы точек пересечения поверхности конуса с поверхностью шара $U_\delta(N_0)$: $(t_0 \pm h)$, $h > 0$. На отрезке $[t_0 - h,\ t_0 + h]$ ищем решение уравнения (1.2) *методом последовательных приближений*, полагая

$$\vec{y}_0(t) = \vec{y}_0,$$

$$\vec{y}_1(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}\left(s, \vec{y}_0(s)\right) ds,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot,$$

$$\vec{y}_n(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}\left(s, \vec{y}_{n-1}(s)\right) ds,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot,$$

Так как $\left|\vec{f}(t, \vec{y})\right| \le M$ в $U_\delta(t_0, \vec{y}_0)$, то

$$\left|\vec{y}_n(t) - \vec{y}_0(t)\right| \le \left|\int_{s_0}^{s} \left|\vec{f}\left(s, \vec{y}_{n-1}(s)\right)\right| ds\right| \le M|t - t_0|,$$

все приближения определены и непрерывны на $[t_0 - h,\ t_0 + h]$, а их графики на $[t_0 - h,\ t_0 + h]$ лежат внутри конуса $|\vec{y} - \vec{y}_0| \le M|t - t_0|$.

Далее имеем следующие оценки:

$$\left|\vec{y}_1(t) - \vec{y}_0(t)\right| \le n \cdot M|t - t_0|,$$

$$\left|\vec{y}_2(t)-\vec{y}_1(t)\right| \le \left|\int_{t_0}^{t}\left[\vec{f}\left(s,\vec{y}_1(s)\right)-\vec{f}\left(s,\vec{y}_0(s)\right)ds\right]\right| \le$$

$$\le n\left|\int_{t_0}^{t}\left|\vec{f}\left(s,\vec{y}_1(s)\right)-\vec{f}\left(s,\vec{y}_0(s)\right)\right|ds\right| \le \text{(условие Липшица)}$$

$$\le nK\left|\int_{t_0}^{t}\left|\vec{y}_1(s)-\vec{y}_0(s)\right|ds\right| \le KMn^2\left|\int_{t_0}^{t}\left|s-t_0\right|ds\right| \le KMn^2\frac{\left|t-t_0\right|^2}{2!};$$

$$\left|\vec{y}_3(t)-\vec{y}_2(t)\right| \le \left|\int_{t_0}^{t}\left[\vec{f}\left(s,\vec{y}_2(s)\right)-\vec{f}\left(s,\vec{y}_1(s)\right)\right]ds\right| \le$$

$$\le n\left|\int_{t_0}^{t}\left|\vec{f}\left(s,\vec{y}_2(s)\right)-\vec{f}\left(s,\vec{y}_1(s)\right)\right|ds\right| \le \text{(условие Липшица)}$$

$$\le nK\left|\int_{t_0}^{t}\left|\vec{y}_2(s)-\vec{y}_1(s)\right|ds\right| \le MK^2n^3\left|\int_{t_0}^{t}\frac{\left|s-t_0\right|^2}{2!}ds\right| \le MK^2n^3\frac{\left|t-t_0\right|^3}{3!}$$

и т.д. По индукции получаем:

$$\left|\vec{y}_{m+1}(t)-\vec{y}_m(t)\right| \le Mn\frac{(nK)^m}{(m+1)!}\left|t-t_0\right|^{m+1}. \qquad (1.3)$$

Теперь рассмотрим на $[t_0-h,\ t_0+h]$ ряд

$$\vec{y}(t)=\vec{y}_0(t)+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\vec{y}_m(t)-\vec{y}_{m-1}(t)\right).$$

Все члены этого ряда – непрерывные на $[t_0-h,\ t_0+h]$ функции, а в силу оценок (1.3) сам ряд сходится на $[t_0-h,\ t_0+h]$ *равномерно*. Следовательно:

а) его сумма $\vec{y}(t)$ – *непрерывная* на $[t_0-h,\ t_0+h]$ функция; $\vec{y}(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\vec{y}_n(t)$;

б) в равенстве $\vec{y}_n(t) = \vec{y}_0(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{f}(s, \vec{y}_{n-1}(s))ds$ можно перейти к пределу под знаком интеграла. Отсюда получаем, что $\vec{y}(t)$ – *непрерывное решение* уравнения (1.2), а, таким образом, и задачи (1.1).

Установим *единственность* полученного решения. Для этого вначале докажем одно утверждение, которое будет нам полезно и в дальнейшем.

***<u>Лемма 1.1 (Гронуолла–Беллмана)</u>***. Пусть $A \geq 0$ – константа, а функции $Z(x)$ и $B(x)$ – *непрерывные*, *неотрицательные* на $[x_0 - h,\ x_0 + h]$, удовлетворяющие неравенству

$$Z(x) \leq A + \left| \int\limits_{x_0}^{x} B(t)Z(t)dt \right|.$$

Тогда $\forall x \in [x_0 - h,\ x_0 + h] \Rightarrow Z(x) \leq A \exp\left( \left| \int\limits_{x_0}^{x} B(t)dt \right| \right)$.

<u>*Доказательство.*</u> Пусть для определенности $x \geq x_0$. Тогда

$$Z(x) \leq A + \int\limits_{x_0}^{x} B(t)Z(t)dt\ .$$

При $A = \text{const} > 0$ получаем для $x_0 \leq s \leq x$:

$$\frac{Z(s) \cdot B(s)}{A + \int\limits_{x_0}^{s} B(t)Z(t)dt} \leq B(s) \Rightarrow \ln\left( A + \int\limits_{x_0}^{s} B(t)Z(t)dt \right)\Bigg|_{x_0}^{x} \leq \int\limits_{x_0}^{x} B(t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left( \int\limits_{x_0}^{x} B(t)Z(t)dt + A \right) \leq \ln A + \int\limits_{x_0}^{x} B(t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A + \int\limits_{x_0}^{x} B(t)Z(t)dt \leq A \exp \int\limits_{x_0}^{x} B(t)dt\ .$$

Но тогда $Z(x) \le A + \int\limits_{x_0}^{x} B(t)Z(t)\,dt \le A\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} B(t)dt\right)$.

Так как здесь $A$ – любое положительное, то, переходя в последнем неравенстве к пределу при $A \to 0+$, убеждаемся, что лемма остается справедливой, если постоянная $A = 0$. Наконец, если $x < x_0$, то $Z(x) \le A + \int\limits_{x}^{x_0} B(t)Z(t)\,dt$, и повторяем те же выкладки.

Используя лемму Гронуолла–Беллмана, докажем единственность решения задачи (1.1). Действительно, если $\vec{y}_1(t)$ и $\vec{y}_2(t)$ – два решения задачи (1.1), то их разность $\vec{y}(t) = \vec{y}_2(t) - \vec{y}_1(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_2(t) - \vec{y}_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \left[\vec{f}(s)\vec{y}_2(s) - \vec{f}(s,\vec{y}_1(s))\right]ds .$$

Отсюда, используя условие Липшица, получаем:

$$|\vec{y}(t)| \le n\left|\int\limits_{t_0}^{t} \left|\vec{f}(s,\vec{y}_2(s)) - \vec{f}(s,\vec{y}_1(s))\right|ds\right| \le$$

$$\le nK\left|\int\limits_{t_0}^{t} |\vec{y}_2(s) - \vec{y}_1(s)|ds\right| = nK\left|\int\limits_{t_0}^{t} |\vec{y}(s)|ds\right|.$$

Теперь, применив лемму Гронуолла–Беллмана в случае $A = 0$, $B(t) = nK = \text{const}$, $Z(t) = |\vec{y}(t)|$, получаем, что $|\vec{y}(t)| \equiv 0$. Теорема доказана.

## § 2. Непрерывная зависимость решений задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и для системы обыкновенных дифференциальных уравнений от правой части, начальных данных и параметров

В этом параграфе ограничимся рассмотрением задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ):

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{2.1}$$

***<u>Теорема 2.1.</u>*** Пусть функция $f(t, y)$ определена и непрерывна в области $G \subseteq E^2_{t,y}$ и удовлетворяет в $G$ условию Липшица по $y$. Пусть далее $N_0(t_0, y_0) \in G$ и $y = y(t)$ − определенное на некотором отрезке $[t_0 - h,\ t_0 + h]$ решение задачи (2.1). Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \left( \begin{array}{l} \forall \tilde{N}_0(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0): \quad \rho\left(N_0, \tilde{N}_0\right) < \delta; \\ \forall \tilde{f} \in C(G), \text{ удовлетворяет в } G \text{ условию} \\ \text{Липшица и такая, что: } \sup\limits_{t,y \in G} \left| f(t, y) - \tilde{f}(t, y) \right| < \delta \end{array} \right)$$

и, тогда:

1) на $[t_0 - h/2,\ t_0 + h/2]$ существует и притом единственное решение задачи:

$$y' = \tilde{f}(t, y), \quad y(\tilde{t}_0) = \tilde{y}_0, \tag{2.2}$$

обозначаемое далее $\tilde{y}(t)$;

2) $\sup\limits_{x \in [t_0 - h/2,\ t_0 + h/2]} \left| y(t) - \tilde{y}(t) \right| < \varepsilon.$

*<u>Доказательство.</u>* Без ограничения общности можно считать, что $f$ и $\tilde{f}$ ограничены в $G$ (иначе рассматриваем $G_1$: $\overline{G}_1 \subseteq G$). Пусть:

$$M = \sup_{(t,y) \in G} \left| f(t, y) \right|, \quad \tilde{M} = \sup_{(t,y) \in G} \left| \tilde{f}(t, y) \right|;$$

$$\Pi = \left\{ (t, y) \in G : |t - t_0| \le h, \ \ |y - y_0| \le Mh \right\},$$

$$\tilde{\Pi} = \left\{ (t, y) \in G : \ |t - \tilde{x}_0| \le \tilde{h}, \ \ |y - \tilde{y}_0| \le \tilde{M}\tilde{h} \right\},$$

т.е. $\tilde{h},\ h>0,$ такие, что прямоугольники $\tilde{\Pi}$ и $\Pi$ целиком лежат в $G$. Тогда на $[t_0-h,\ t_0+h]$ определено решение задачи (2.1), а на $\left[\tilde{t}_0-\tilde{h},\ \tilde{t}_0+\tilde{h}\right]$ – единственное решение $\tilde{y}(t)$ задачи (2.2). Очевидно, что $\exists\delta_0>0:\ \forall 0<\delta<\delta_0 \Rightarrow [t_0-h/2,\ t_0+h/2]\subset\left[\tilde{t}_0-\tilde{h},\ \tilde{t}_0+\tilde{h}\right]$, если только:

$$\begin{cases}\rho\left(N_0,\tilde{N}_0\right)=\left(\left(t_0-\tilde{t}_0\right)^2+\left(y_0-\tilde{y}_0\right)^2\right)^{1/2}<\delta;\\ \sup\limits_{(x,y)\in G}\left|f(t,y)-\tilde{f}(t,y)\right|<\delta,\end{cases}$$

так как при этом расстояние между центрами прямоугольников $\tilde{\Pi}$ и $\Pi$ меньше $\delta$, а также

$$\left|M-\tilde{M}\right|=\left|\sup_{(t,y)\in G}\left|f(t,y)\right|-\sup_{(t,y)\in G}\left|\tilde{f}(t,y)\right|\right|\le\sup_{(t,y)\in G}\left|f(t,y)-\tilde{f}(t,y)\right|<\delta.$$

Но тогда на отрезке $[t_0-h/2,\ t_0+h/2]$ определены и единственны решение $y(t)$ задачи (2.1) и решение $\tilde{y}(t)$ задачи (2.2). Оценим их разность на этом отрезке. Имеем:

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y(s))ds;\quad \tilde{y}(t)=\tilde{y}_0+\int_{\tilde{t}_0}^{t}\tilde{f}(s,\tilde{y}(s))ds,$$

откуда:

$$\left|y(t)-\tilde{y}(t)\right|\le\left|y_0-\tilde{y}_0\right|+\left|\int_{t_0}^{t}\tilde{f}(t,\tilde{y}(s))ds-\int_{t_0}^{t}f(s,y(s))ds\right|\le$$

$$\le\delta+\left|\int_{\tilde{t}_0}^{t}\tilde{f}(s,\tilde{y}(s))ds+\int_{t_0}^{t}\left[f\left(s,\tilde{y}(s)\right)-\tilde{f}(s,y(s))\right]dsds\right|+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left[\tilde{f}(s,y(s))-f(s,y(s))\right]ds\le\delta+\delta\cdot\tilde{M}+\delta\cdot\frac{h}{2}+\tilde{K}\left|\int_{t_0}^{t}\left|\tilde{y}(s)-y(s)\right|ds\right|,$$

где $\tilde{K}$ – константа в неравенстве Липшица для функции $\tilde{f}$.

Получили промежуточную оценку разности:

$$\left|y(t)-\tilde{y}(t)\right| \le \delta\left(1+\frac{1}{2}h+\tilde{M}\right)+\tilde{K}\left|\int_{t_0}^{t}\left|\tilde{y}(s)-y(s)\right|ds\right|,$$

Откуда по лемме Гронуолла–Беллмана получаем:

$$\left|y(t)-\tilde{y}(t)\right| \le \delta\left(1+\frac{1}{2}h+\tilde{M}\right)\mathrm{e}^{\tilde{K}|t-t_0|} \le \delta\left(1+\frac{1}{2}h+M\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\tilde{K}h}.$$

Из этой оценки, очевидно, следует второе утверждение теоремы.

Пусть теперь правая часть уравнения зависит от параметра $\overline{\mu}=(\mu_1,...,\mu_n)$. Рассматриваем следующую задачу:

$$y'=f(t,\ y;\ \overline{\mu}) \qquad y(t_0)=y_0\,. \tag{2.3}$$

***<u>Теорема 2.2.</u>*** Пусть $\tilde{G}=\overline{G}\times\mathfrak{M}$, где $G\subset E_{ty}^2$ – некоторая ограниченная область, а $\mathfrak{M}=\{\overline{\mu}:\ a_k\le\mu_k\le b_k,\ k=1,2,...,n\}$; $\overline{G}$ – замыкание $G$. Пусть далее $f(t,\ y;\overline{\mu})$ определена и непрерывна по совокупности переменных на $\tilde{G}$, а по $y$ удовлетворяет условию Липшица:

$\exists L>0:\ \forall\left((t,y_1,\overline{\mu}),(t,y_2,\overline{\mu})\in\tilde{G}\right)\Rightarrow\left|f(t,y_2,\overline{\mu})-f(t,y_1,\overline{\mu})\right|\le L\left|y_2-y_1\right|.$

Тогда*:*

1) $\forall(t_0,y_0)\in G\Rightarrow\exists h>0:\ \forall\overline{\mu}\in\mathfrak{M}\ \Rightarrow$ на $[t_0-h,\ t_0+h]$ существует и притом единственное решение $y=y(t,\overline{\mu})$ задачи (2.3);

2) это решение непрерывно зависит от $\overline{\mu}$;

3) если, кроме того, $f(t,\ y;\ \overline{\mu})$ имеет в $\tilde{G}$ непрерывные частные производные по переменным $(y;\ \overline{\mu})$ до порядка $p\ge1$, то и решение $y(t;\ \overline{\mu})$ имеет на $(t_0-h,\ t_0+h)\times\mathfrak{M}$ непрерывные частные производные до порядка $p\ge1$ по $\overline{\mu}$.

*<u>Доказательство.</u>* 1. Так как $M=\sup\limits_{(t,y,\overline{\mu})\in\tilde{G}}\left|f(t,y,\overline{\mu})\right|<+\infty$, а константа Липшица $L$ не зависит от $\overline{\mu}$, то, строя решение задачи (2.3) методом последовательных приближений, получаем, что $\exists h>0:\ \{(t,y):\ |t-t_0|\le h,\ |y-y_0|\le Mh\}\subset G$ и решение $y(t;\ \overline{\mu})$ задачи (2.3) определено на этом отрезке $[t_0-h,\ t_0+h]$ при любом $\overline{\mu}$.

2. Так как $f(t,\ y;\ \overline{\mu})$ *равномерно непрерывна* на $\tilde{G}$, то

$$\forall\delta>0\Rightarrow\exists\gamma(\delta)>0:\ \forall\left((t,y,\overline{\mu}),(t,y,\tilde{\overline{\mu}})\in\tilde{G}:\ \left|\overline{\mu}-\tilde{\overline{\mu}}\right|<\gamma\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sup_{(t,y)\in\overline{G}}\left|f(t,y,\overline{\mu})-f\left(t,y,\tilde{\overline{\mu}}\right)\right|<\delta\,.$$

Тогда второе утверждение этой теоремы следует из теоремы 2.1, если $\tilde{f}(t,y)=f\left(t,y;\tilde{\overline{\mu}}\right)$.

3. Пусть выполнено дополнительное условие. Фиксируем $\overline{\mu}$ и $\overline{\mu+\Delta\mu}\in\mathfrak{M}$. Обозначим решение задачи (2.3) при фиксированном $\overline{\mu}$ $y(t,\overline{\mu})$, а решение задачи: $y'=f\left(t,y;\overline{\mu+\Delta\mu}\right)$, $y(t_0)=y_0$ через $y\left(t,\overline{\mu+\Delta\mu}\right)$. Сначала рассмотрим $\overline{\Delta\mu}=\{\Delta\mu_1,0,\ldots,0\}$, обозначив $\overline{\mu}=\{\mu_1,\overline{\mu}'\}$. Тогда:

$$\Delta_{\mu_1}y(t,\overline{\mu})=y(t,\mu_1+\Delta\mu_1,\overline{\mu}')-y(t,\overline{\mu});$$

$$\left(\Delta_{\mu_1}y(t,\overline{\mu})\right)'_t=f\left(t,y(t;\mu_1+\Delta\mu_1,\overline{\mu}');\ \ \mu_1+\Delta\mu_1,\overline{\mu}'\right)-f\left(t,y(t,\overline{\mu}),\overline{\mu}\right)=$$

$$=\int_0^1 f'_\xi\left(t,\underbrace{y(t,\overline{\mu})+\xi\Delta_{\mu_1}y(t,\overline{\mu})};\ \underbrace{\overline{\mu}+\xi\overline{\Delta\mu}}\right)d\xi=$$

$$=\underbrace{\int_0^1 f'_y\left(t;y(t;\overline{\mu})(t,\overline{\mu})+\xi\Delta_{\mu_1}y(t,\overline{\mu});\ \overline{\mu}+\xi\overline{\Delta\mu}\right)d\xi}_{F}\cdot\Delta_{\mu_1}y(t,\overline{\mu})+$$

$$+\underbrace{\int_0^1 f'_{\mu_1}\left(t;y(t;\overline{\mu})+\xi\Delta_{\mu_1}y(t,\overline{\mu});\ \overline{\mu}+\xi\overline{\Delta\mu}\right)d\xi}_{\Phi}\cdot\Delta\mu_1=$$

$$=F(t,\overline{\mu};\Delta\mu_1)\Delta_{\mu_1}y(t,\overline{\mu})+\Phi(t,\overline{\mu},\Delta\mu_1)\cdot\Delta\mu_1,$$

где $\Phi$ и $F$ – непрерывные по $(t,\Delta\mu_1)$ функции ($\overline{\mu}$ фиксировано). Получаем задачу:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\Delta_{\mu_1} y(t,\overline{\mu})}{\Delta\mu_1}\right)'_t = F(t,\overline{\mu},\Delta\mu_1)\dfrac{\Delta_{\mu_1} y(t,\overline{\mu})}{\Delta\mu_1} + \Phi(t,\overline{\mu},\Delta\mu_1); \\ \left.\dfrac{\Delta_{\mu_1} y(t,\overline{\mu})}{\Delta\mu_1}\right|_{t=t_0} = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Параметр $\Delta\mu_1$ меняется в окрестности точки $\Delta\mu_1 = 0$. По доказанному в п. 2 решение задачи (2.4) непрерывно зависит от $\Delta\mu_1$.

Переходя тогда в (2.4) к пределу при $\Delta\mu_1 \to 0$, получаем следующую задачу (уравнение в вариациях)

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial y}{\partial\mu_1}\right)'_t = \dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y,\overline{\mu})\dfrac{\partial y}{\partial\mu_1} + \dfrac{\partial f}{\partial\mu_1}(t,y,\overline{\mu}); \\ \left.\dfrac{\partial y}{\partial\mu_1}\right|_{t=t_0} = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Аналогично устанавливаем существование производных $y'_{\mu_k}(t,\mu)$, $k = 2,\ldots,n$. Если $p > 1$, то далее применяем доказанное утверждение к задаче (2.5).

***<u>Следствия.</u>*** 1. Уравнения (2.5) получаются из (2.3) формальным дифференцированием по $\mu_1$. Аналогично *в более общем случае*:

$$\begin{cases} y' = f(t,y,\overline{\mu}) \\ y(t_0) = y_0(\overline{\mu}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{\partial y}{\partial\mu_k}\right)'_t = f'_y(t,y,\mu)\dfrac{\partial y}{\partial\mu_k} + f'_{\mu_k}(t,y,\overline{\mu}); \\ \left(\dfrac{\partial y}{\partial\mu_k}\right)(t_0) = \dfrac{\partial y_0}{\partial\mu_k}(\overline{\mu}). \end{cases}$$

2. Рассмотрим задачу (2.1): $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$.

Положим: $x = t - t_0$, $Z(x) = y(t_0 + x) - y_0$. Тогда $Z(x)$ решение задачи: $Z'(x) = f(x + t_0,\ Z + y_0), Z(0) = 0$. Следовательно:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y_0}\right)'_t = f'_y(x + t_0;\ Z + y_0)\left(1 + \frac{\partial Z}{\partial y_0}\right), \quad \frac{\partial Z}{\partial y_0}(0) = 0.$$

Возвращаясь к старым переменным, получаем *формулы дифференцирования решения по начальным данным*:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)'_t = f'_y(t,y)\frac{\partial y}{\partial y_0}; \quad \frac{\partial y}{\partial y_0}(t_0)=1, \tag{2.6}$$

которые также получаются из (2.1) формальным дифференцированием по $y_0$.

***<u>Пример 2.1.</u>*** Дана задача Коши $y' = y + \mu\left(x + y^2\right)$, $y(0)=1$. Требуется найти $(\partial y / \partial \mu)\big|_{\mu=0}$.

*<u>Решение.</u>* Уравнение в вариациях:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)'_x = (1+2\mu y)\frac{\partial y}{\partial \mu} + x + y^2; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)(0)=0.$$

При $\mu = 0 \Rightarrow \quad y' = y$, $y(0)=1 \Rightarrow \quad y(x,0)=\mathrm{e}^x$. Теперь полагаем $\frac{\partial y}{\partial \mu}(x,\mu)\big|_{\mu=0} = \varphi(x)$. Тогда $\varphi(x)$ удовлетворяет задаче:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi + x + y^2(x,0) = \varphi(x) + x + \mathrm{e}^{2x}; \quad \varphi(0)=0.$$

Отсюда $\varphi(x)=\mathrm{e}^{2x}-1-1$.

*<u>Ответ:</u>* $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = \mathrm{e}^{2x} - x - 1$.

## § 3. Элементы теории устойчивости решений ОДУ и системы ОДУ

### ***<u>3.1. Основные определения</u>***

Рассмотрим систему ОДУ

$$\begin{cases} \vec{y}\,' = \vec{f}(t,\vec{y}); \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\vec{y} = \{y_1(t),...,y_n(t)\}$, $\vec{f}(t,\vec{y}) = \{f_1(t,\vec{y}),...,f_n(t,\vec{y})\}$.

***<u>Определение 3.1</u>***. Пусть $\vec{f}(t,\vec{y})$ и $\left(t_0,\vec{y}_0^*\right)$ таковы, что на $[t_0,+\infty)$ определено и единственно решение $\vec{y}^*(t)$ задачи

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(t,\vec{y}), \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0^*.$$

Это решение $\vec{y}^*(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову при* $t \to +\infty$, если:

1) $\exists \delta_0 > 0$: $\forall\left((t_0,\vec{y}_0): \left|\vec{y}_0 - \vec{y}_0^*\right| < \delta_0\right) \Rightarrow$ на $[t_0,+\infty)$ существует и притом единственное решение задачи (3.1);

2) $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \left(\exists \delta(\varepsilon): 0 < \delta(\varepsilon) \le \delta_0\right)$: $\forall\left(\vec{y}(t)\right.$ – решение задачи (3.1) с $\vec{y}_0$: $\left.\left|\vec{y}_0 - \vec{y}_0^*\right| < \delta\right) \Rightarrow \sup\limits_{t \ge t_0}\left|\vec{y}(t) - \vec{y}^*(t)\right| < \varepsilon$.

***<u>Определение 3.2</u>***. Это решение $\vec{y}^*(t)$ называется *асимптотически устойчивым при* $t \to +\infty$, если:

1) оно устойчиво по Ляпунову;

2) любое решение $\vec{y}(t)$, удовлетворяющее условиям п. 2 определения 3.1, удовлетворяет также условию $\exists \lim\limits_{t \to +\infty}\left|\vec{y}(t) - \vec{y}^*(t)\right| = 0$.

***<u>Замечание 3.1</u>***. Задача Коши для ОДУ

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right); \\ y(t_0) = y_0^0, \;\; y'(t_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{n-1} \end{cases} \qquad (3.1')$$

может быть сведена к системе ОДУ вида (3.1), однако удобнее дать непосредственно определение устойчивости решения для (3.1′).

***<u>Определение 3.1′</u>.*** Пусть $f(t;\, z_1, \ldots, z_n)$ и $\left\{\tilde{y}_0^0,\, \tilde{y}_0^1, \ldots, \tilde{y}_0^{n-1}\right\}$ таковы, что на $[t_0,+\infty)$ существует и притом единственное решение $\tilde{y}(t)$ задачи

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right); \\ y(t_0) = \tilde{y}_0^0, \;\; y'(t_0) = \tilde{y}_0^1, \;\ldots,\; y^{(n-1)}(t_0) = \tilde{y}_0^{n-1}. \end{cases}$$

Это решение $\tilde{y}(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову при* $t \to +\infty$, если:

1) $\exists \delta_0 > 0 : \ \forall \left( \left( y_0^0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1} \right) : \left\{ \left( y_0^0 - \tilde{y}_0^0 \right)^2 + \ldots + \left( y_0^{n-1} - \right.\right.\right.$

$\left.\left.\left. - \tilde{y}_0^{n-1} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \delta_0 \right) \Rightarrow$ на $[t_0, +\infty)$ определено и притом единственное решение задачи (3.1′);

2) $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) : (0 < \delta(\varepsilon) \le \delta_0) : \ \forall \ y(t)$ – решение (3.1′) с $\vec{y}_0$ :

$\left\{ \left( y_0^0 - \tilde{y}_0^0 \right)^2 + \ldots + \left( y_0^{n-1} - \tilde{y}_0^{n-1} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \delta ) \Rightarrow \sup\limits_{t \ge t_0} \left| y(t) - \tilde{y}(t) \right| < \varepsilon$.

***<u>Определение 3.2′.</u>*** Это решение $y^*(t)$ *называется асимптотически устойчивым при* $t \to +\infty$, если:

1) оно устойчиво по Ляпунову;

2) любое решение $y(t)$ удовлетворяет условиям п. 2 определения 3.1′ и также условию $\exists \lim\limits_{t \to +\infty} \left| y(t) - \tilde{y}(t) \right| = 0$.

Далее для определенности будем формулировать и доказывать теоремы для системы ОДУ.

***<u>Замечание 3.2.</u>*** Заменой функции $\vec{x}(t) = \vec{y}(t) - \vec{y}^*(t)$ сводим исследование устойчивости решения $\vec{y}^*(t)$ системы (3.1) к исследованию устойчивости *нулевого решения* системы:

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = \vec{f}\left(t, \vec{x} + \vec{y}^*\right) - \vec{f}\left(t, \vec{y}^*\right) = \varphi(t, \vec{x}); \\ \vec{x}(t_0) = \vec{0}. \end{cases}$$

Далее считаем, что *такая замена сделана* и *исследуем на устойчивость нулевое решение* (≡ *точку покоя*) полученной системы.

<u>*Упражнение.*</u> Записать отрицание определения устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости.

## ***3.2. Устойчивость решений линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами***

***Теорема 3.1.*** Рассмотрим систему ОДУ с постоянными коэффициентами:

$$\dot{\vec{X}}(t) = A\vec{X}(t), \tag{3.2}$$

$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ – постоянная матрица; $\vec{X}(t) = \{x_1(t),\ ...,\ x_n(t)\}$ – вектор-столбец неизвестных функций. Пусть $\lambda_1,...,\ \lambda_n$ – корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$.

В этом случае:

1) нулевое решение системы *устойчиво по Ляпунову* тогда и только тогда, когда выполняются:

а) $\forall m = 1,\ 2,\ ...,\ n \Rightarrow \operatorname{Re}\lambda_m \le 0$;

б) $\forall \lambda_m:\ \operatorname{Re}\lambda_m = 0 \Rightarrow$ число *линейно независимых* собственных векторов, отвечающих $\lambda_m$, равно кратности $\lambda_m$;

2) нулевое решение асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда $\forall m = 1,\ 2,\ ...,\ n \Rightarrow\ \operatorname{Re}\lambda_m < 0$.

*Доказательство.* 1. Пусть $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{n}$ – фундаментальная система решений (ФСР) системы (3.2), построенная по собственным значениям матрицы *A*. Тогда очевидно, что при выполнении условий п. 1 получаем

$$\exists M > 0:\ \max_{1\le k\le n}\left\{\sup_{t\in[t_0;+\infty)}\left|\vec{\varphi}_k(t)\right|\right\} \le M < +\infty .$$

Далее рассмотрим ФСР $\{\vec{\psi}_k(t)\}_{k=1}^{n}$, такую, что $\vec{\Psi}_k(t)$ удовлетворяют условиям Коши: $\vec{\Psi}_k(t) = \{0,\ ...,\ 0,\ 1,\ 0,\ ...,\ 0\}$. Получаем:

$$\forall i = 1,\ 2,\ ...,\ n \Rightarrow\ \vec{\psi}_i(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\,\vec{\varphi}_k(t) \Rightarrow \left|\vec{\psi}_i(t)\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|c_{ik}\right|\left|\vec{\varphi}_k(t)\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\vec{\psi}_i(t)\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|c_{ik}\right|\left|\vec{\varphi}_k(t)\right| \Rightarrow\ \exists N > 0:\ \max_{1\le k\le n}\left\{\sup_{t\ge t_0}\left|\vec{\psi}_k(t)\right|\right\} \le N .$$

Пусть теперь $\vec{x}(t)$ – решение системы (3.2), такое, что $\vec{x}(t_0) = \{x_{10},\ \ldots,\ x_{n0}\} = \vec{x}_0$. Тогда

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} \vec{x}_{k0}\, \vec{\psi}_k(t).$$

Если теперь $|\vec{x}_0| < \delta$, то

$$\left|\vec{x}(t) - \vec{0}\right| \le \sum_{k=1}^{n} |x_{k0}| \left|\vec{\Psi}_k(t)\right| \le N \sum_{k=1}^{n} |x_{k0}| \le N \left\{ \sum_{k=1}^{n} |x_{k0}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{n} = N\sqrt{n}\,\delta.$$

Очевидно, что для системы $\dot{\vec{X}}(t) = A\vec{X}(t)$ решение определено на всей оси при любых начальных данных в любой точке $t_0$. Из полученной оценки следует, что нулевое решение устойчиво по Ляпунову $\left(\delta(\varepsilon) = \varepsilon N^{-1} n^{-1/2}\right)$. Действительно, если условие п.1 не выполнено, то в ФСР $\{\vec{\varphi}_k(t)\}_{k=1}^{n}$ хотя бы одна из величин $\left|\vec{\varphi}_k(t)\right|$ не ограничена при $t \to +\infty$. Пусть это, например, $\left|\vec{\varphi}_1(t)\right|$. Тогда $\forall C > 0 \Rightarrow \left|C\,\vec{\varphi}_1(t)\right|$ также не ограничен при $t \to +\infty$. С другой стороны, при $t = t_0$ величину $\left|c\,\vec{\varphi}_1(t_0)\right|$ можно сделать сколь угодно малой. Таким образом, нулевое решение не устойчиво при $t \to +\infty$.

2. В случае выполнения условий п.2 справедливы все выкладки п.1, т.е. решение $\vec{x}(t) \equiv \vec{0}$ устойчиво по Ляпунову. Кроме того, $\forall (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \Rightarrow \left|\vec{\varphi}_k(t)\right| \to 0$ при $t \to +\infty \Rightarrow$

$$\left|\vec{\psi}_i(t)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_{ik} \vec{\varphi}_k(t)\right| \to 0 \text{ при } t \to +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\vec{x}(t)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_{0k} \vec{\psi}_k(t)\right| \to 0 \text{ при } t \to +\infty,$$

т.е. нулевое решение устойчиво асимптотически.

***<u>Замечание 3.3</u>***. Для системы с постоянными коэффициентами (3.2) из устойчивости нулевого решения следует *устойчивость любого решения* в том же смысле, а из неустойчивости – неустойчивость. Поэтому всякую такую *линейную систему* называют либо *устойчивой*, либо *неустойчивой*.

*Упражнение.* Для системы: $\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y; \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$ провести полное исследование устойчивости нулевого решения.

***Замечание 3.4***. Имеются критерии неположительности действительных частей характеристических уравнений (критерий Рауса-Гурвица, критерий Михайлова и т.п.).

## *3.3. Устойчивость решений линейных систем ОДУ*

Теперь рассмотрим систему

$$\dot{\vec{X}}(t) = A(t)\vec{X}(t) + \vec{F}(t), \tag{3.3}$$

где функциональная матрица $A(t) = \left\{a_{ij}(t)\right\}_{i,j=1}^{n}$ и правая часть вектора-столбца $\vec{F}(t) = \left\{f_1(t), \ldots, f_n(t)\right\}$ непрерывны на $\left[t_0, +\infty\right)$. Тогда при любом $\vec{X}_0 = \left\{x_{10}, \ldots, x_{n0}\right\}$ задача Коши:

$$\begin{cases} \dot{\vec{X}}(t) = A(t)\vec{X}(t) + \vec{F}(t); \\ \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0 \end{cases}$$

имеет определенное на $\left[t_0, +\infty\right)$ единственное решение.

***Лемма 3.1.*** Любое решение системы (3.3) устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) в том и только том случае, если устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) нулевое решение однородной системы:

$$\dot{\vec{X}}(t) = A(t)\vec{X}(t). \tag{3.4}$$

*Доказательство.* Доказательство очевидно следует из линейности системы, так как если $\vec{Y}(t)$ и $\vec{Y}^*(t)$ – два решения (3.3), то $\vec{X}(t) = \vec{Y}(t) - \vec{Y}^*(t)$ – решение системы (3.4). Следовательно, $\vec{Y}^*(t)$ устойчиво (или неустойчиво) в том же смысле, что нулевое решение системы (3.4).

*Упражнение.* Доказать, что система (3.4) устойчива по Ляпунову (асимптотически устойчива) тогда и только тогда, когда каждое

ее решение ограничено на полуоси $\left[t_0,+\infty\right)$ (соответственно, $\left|\vec{y}(t)\right|\to 0$ при $t\to+\infty$ ).

Для линейных систем имеется много теорем, позволяющих исследовать устойчивость. Приведем одну из них.

***<u>Теорема 3.2.</u>*** Пусть матрицу $A(t)$ в (3.4) можно представить в виде: $A(t)=A+B(t)$, где:

а) $A$ – постоянная матрица, причем система $\dot{\vec{X}}(t)=A\vec{X}(t)$ устойчива при $t\to+\infty$;

б) $B(t)$ – непрерывная на $\left[t_0,+\infty\right)$ матрица, удовлетворяющая условию: $\int\limits_{t_0}^{+\infty}\left\|B(t)\right\|dt<+\infty$.

Тогда система (3.4) устойчива по Ляпунову при $t\to+\infty$.

*<u>Доказательство.</u>* Пусть $\mathrm{X}(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{\underset{\downarrow}{X}}(t)=A\underset{\downarrow}{X}(t)$, удовлетворяющая условию $\mathrm{X}\left(t_0\right)=E$. Тогда общее решение этой системы $\underset{\downarrow}{X}(t)=\mathrm{X}(t)\underset{\downarrow}{X}\left(t_0\right)$.

Будем искать общее решение системы (3.4) в виде $\underset{\downarrow}{y}(t)=\mathrm{X}(t)\underset{\downarrow}{u}(t)$. Тогда:

$$\dot{\underset{\downarrow}{y}}(t)=\dot{\mathrm{X}}(t)\underset{\downarrow}{u}(t)+\mathrm{X}(t)\dot{\underset{\downarrow}{u}}(t)=(A+B(t))\mathrm{X}(t)\underset{\downarrow}{u}(t);$$

$$\cancelto{0}{\left(\dot{\mathrm{X}}(t)-A\mathrm{X}(t)\right)}\underset{\downarrow}{u}(t)+\mathrm{X}(t)\dot{\underset{\downarrow}{u}}(t)=B(t)\mathrm{X}(t)\underset{\downarrow}{u}(t);$$

$$\dot{\underset{\downarrow}{u}}(t)=\mathrm{X}(t)B(t)\mathrm{X}(t)\underset{\downarrow}{u}(t),$$

откуда:

$$\underset{\downarrow}{u}(t)=\underset{\downarrow}{u}\left(t_0\right)+\int\limits_{t_0}^{t}\mathrm{X}^{-1}(s)B(s)\mathrm{X}(s)\underset{\downarrow}{u}(s)\,ds,$$

и, используя $\underset{\downarrow}{y}(t)=\mathrm{X}(t)\underset{\downarrow}{u}(t)$, $\underset{\downarrow}{y}(t_0)=\underset{\downarrow}{u}(t_0)$, получаем

$$\underset{\downarrow}{y}(t)=\mathrm{X}(t)\underset{\downarrow}{y}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\underbrace{\mathrm{X}(t)\mathrm{X}^{-1}(s)}B(s)\underset{\downarrow}{y}(s)\,ds\,.$$

Учитывая $\mathrm{X}(t)=\mathrm{e}^{At}E$, имеем: $\mathrm{X}(t)\mathrm{X}^{-1}(t_1)=\mathrm{e}^{A(t-s)}E=\mathrm{X}(t-s)$.

$\mathrm{X}(t)$ − фундаментальная матрица устойчивой линейной системы, поэтому $\exists K>0$: $\|\mathrm{X}(t)\|\le K$ при всех $t\in[t_0,+\infty)$. Но тогда:

$$\|\underset{\downarrow}{y}(t)\|\le K\,\|\underset{\downarrow}{y}(t_0)\|+Kn\int_{t_0}^{t}\|B(s)\|\,\|\underset{\downarrow}{y}(s)\|\,ds\,,$$

отсюда *по лемме Гронуолла–Беллмана* получаем:

$$\|\underset{\downarrow}{y}(t)\|\le K\,\|\underset{\downarrow}{y}(t_0)\|\exp\{Kn\int_{t_0}^{t}\|B(s)\|\,ds\}\le$$

$$\le K\,\|\underset{\downarrow}{y}(t_0)\|\exp\{Kn\int_{t_0}^{+\infty}\|B(s)\|\,ds\}.$$

Из этой оценки и следует устойчивость по Ляпунову нулевого решения, а в силу линейности и системы (3.4).

## ***3.4. Второй метод Ляпунова (метод функций Ляпунова)***

Вновь возвращаемся к исследованию устойчивости *нулевого решения* общей системы ОДУ (*определенного* на $[t_0,+\infty)$)

$$\vec{y}\,'=\vec{f}(t,\vec{y})\,. \qquad (3.5)$$

***Теорема 3.3.*** Пусть в некоторой окрестности точки $O$ $(0,...,0)\in R^n_{\vec{y}}$ определена дифференцируемая функция $v(\vec{y})$, удовлетворяющая условиям:

1) $v(\vec{y})\ge 0$, причем $v(\vec{y})=0\Leftrightarrow\vec{y}=\vec{0}$ (т.е. $v(\vec{y})$ имеет в точке $O$ (0,..., 0) строгий минимум);

2) $\left.\dfrac{dv(\vec{y})}{dt}\right|_{\text{в силу системы}} \overset{def}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial v}{\partial y_i} f_i(t,\vec{y}) \le 0$ при всех $t \ge t_0$.

Тогда нулевое решение системы (3.1) устойчиво по Ляпунову.

<u>*Доказательство.*</u> В пространстве $R^{n+1}_{\vec{y},z}$ рассмотрим график функции $z = v(\vec{y})$. Так как $v(\vec{y})$ – *непрерывная функция*, $v(\vec{y}) > 0$ при $\vec{y} \ne \vec{0}$, то, задав достаточно малое $\varepsilon > 0$, получим, что $\exists C(\varepsilon) > 0$, такая, что:

а) проекция поверхности уровня $v(\vec{y}) = C$ на гиперплоскость $(y_1,\ldots,y_n)$ целиком лежит в $U_\varepsilon(0) = \{\vec{y} : |\vec{y}| < \varepsilon\}$;

б) $\exists \delta(C) = \delta(\varepsilon) > 0$: $U_\delta(0)$ лежит внутри этой проекции.

Возьмем точку $M_0(\vec{y}_0) \in U_\delta(0)$. Пусть $\vec{y}(t)$ – фазовая траектория системы (3.1), проходящая при $t = t_0$ через $M_0$, т.е. $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$. Тогда $v(\vec{y}_0) = C_1 < C$ и по условию

$$\left.\frac{dv(\vec{y}(t))}{dt}\right|_{\text{в силу системы}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i} f_i(t,\vec{y}(t)) \le 0,$$

т.е. $v(\vec{y})$ не возрастает вдоль фазовой траектории $\vec{y}(t)$. В этом случае $\forall t \ge t_0 \Rightarrow v(\vec{y}(t)) \le v(\vec{y}(t_0)) = v(\vec{y}_0) = C_1 < C \Rightarrow |\vec{y}(t)| < \varepsilon$. И тогда $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (\vec{y}_0 : |\vec{y}_0 - \vec{0}| < \delta) \Rightarrow \sup\limits_{t \ge t_0} |\vec{y}(t) - \vec{0}| < \varepsilon$.

Что и доказывает устойчивость по Ляпунову нулевого решения системы (3.1).

***<u>Замечание 3.5</u>***. Функция $v(\vec{y})$, удовлетворяющая указанным в условии теоремы свойствам, называется *функцией Ляпунова.* Общего способа ее построения нет.

***<u>Замечание 3.6</u>***. Если в п. 2 теоремы потребовать выполнения более сильного условия:

$$\forall t \ge t_0 \Rightarrow \left.\frac{dv(\vec{y})}{dt}\right|_{\text{в силу системы}} \le -w(\vec{y}),$$

где $w(\vec{y}) \geq 0$ и непрерывна в некоторой $U_{\delta_0}(0)$, причем $w(\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{0}$, то нулевое решение будет *асимптотически устойчивым*.

<u>*Упражнение.*</u> Провести доказательство.

***<u>Пример 3.1.</u>*** Исследуем на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^4; \\ \dot{y} = yx^4. \end{cases}$$

<u>*Решение.*</u> Рассмотрим функцию $v(x, y) = x^4 + y^4$. Она удовлетворяет условию п. 1 теоремы, и, кроме того:

$$\left.\frac{dv(x,y)}{dt}\right|_{\text{в силу системы}} = -4x^4y^4 + 4y^4x^4 = 0,$$

что означает выполнение п. 2 (но не удовлетворяет условию замечания 3.6). Следовательно, нулевое решение этой системы устойчиво по Ляпунову.

***<u>Теорема 3.4 (Четаева).</u>*** Пусть область $D \subset R^n_{\vec{y}}$ и функция $v(\vec{y})$ таковы, что:

1) $O\,(0,..., 0) \in \partial D$, т.е. начало координат лежит на границе $D$;

2) $v(\vec{y})$ определена в $\overline{D}$, непрерывно дифференцируема и $v(\vec{y}) > 0$ в $D$, $v(\vec{y}) = \vec{0}$ на $\partial D \bigcap U_{\varepsilon_0}(0)$, $\varepsilon_0 > 0$;

3) при любом $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$\left.\frac{dv(y)}{dt}\right|_{\text{в силу системы}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i} f_i(t, \overline{y}) \geq w(\overline{y}) > 0,$$

где $w(\overline{y})$ непрерывная в $D$ функция.

Тогда нулевое решение системы (3.5) *неустойчиво*.

<u>*Доказательство.*</u> Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$, удовлетворяющее условиям теоремы. Пусть задано любое $\delta > 0$, возьмем $\vec{y}_0 \in D$: $|\vec{y}_0| < \delta$. И, следовательно, $v(\vec{y}_0) = \alpha > 0$. Пусть $\vec{y}(t)$ – фазовая траектория

(3.5), проходящая при $t = t_0$ через точку $\vec{y}_0$, т.е. $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$. Тогда, так как

$$\left.\frac{dv(\vec{y}(t))}{dt}\right|_{\text{в силу системы}} = w(\vec{y}(t)) > 0,$$

то $v(\vec{y}(t)) \geq \alpha > 0$ для всех $t \geq t_0$, т.е. траектория при всех $t \geq t_0$ лежит в $D$ и не пересекает линию уровня $v(\vec{y}) = \alpha$. Поэтому $\exists \delta_1 > 0$: $|\vec{y}(t)| > \delta_1$ при всех $t \geq t_0$, а тогда и $w(\vec{y}(t)) \geq \beta > 0$ при всех $t \geq t_0$. Следовательно,

$$v(\vec{y}(t)) \geq v(\vec{y}(t_0)) + \beta(t - t_0) \to +\infty, \quad t \to +\infty.$$

Но это означает, что решение $\overline{y}(t)$ выйдет при некотором $t$ на границу шара $|\overline{y}| = \varepsilon_0$. Отсюда следует, что

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \ \forall \delta > 0 \Rightarrow \exists (\overline{y}_0: \ |\overline{y}_0| < \delta): \ |y(t)| \geq \varepsilon_0$$

при некотором $t > t_0$. Поэтому нулевое решение неустойчиво, что и требовалось доказать.

***<u>Пример 3.2.</u>*** Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x^5 + y^3; \\ \dot{y} = x^3 + y^5. \end{cases}$$

<u>*Решение.*</u> $v(x, y) = x^4 - y^4$, $D = \{(x, y): \ |x| > |y|\}$. Тогда:

а) $O\,(0,\,0) \in \partial D$;

б) $v(x, y) > 0$ при $|x| > |y|$;

$v(x, y) = 0$ при $|x| = |y|$, т.е. на $\partial D$;

в) $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{\text{в силу системы}} = 4x^3\left(x^5 + y^3\right) - 4y^3\left(x^3 + y^5\right) = 4\left(x^8 - y^8\right) =$

$= w(x, y) > 0$ при $|x| > |y|$. Следовательно, по теореме Четаева нулевое решение данной системы неустойчиво.

## ***3.5. Устойчивость по первому приближению***

***Определение 3.3.*** Пусть при $\forall t \ge t_0$ система (3.1) представима в виде

$$\vec{y}' = A(t)\,\vec{y} + \vec{R}(t,\vec{y}), \tag{3.6}$$

где $A(t) = \left\{a_{ij}(t)\right\}_{i,j=1}^{n}$ – функциональная матрица с непрерывными на $\left[t_0,+\infty\right)$ коэффициентами, а вектор-функция $\vec{R}(t,\vec{y})$ удовлетворяет условию:

$$\forall\left(\vec{y}:\ \left|\vec{y}\right| \le C_0\right) \Rightarrow \sup_{t\ge t_0}\left|\vec{R}(t,\vec{y})\right| \le C_1\left|\vec{y}\right|^{1+\alpha},$$

где $C_0$, $C_1$ и $\alpha$ – некоторые положительные постоянные. В этом случае линейная система $\vec{y}' = A(t)\,\vec{y}$ называется *системой первого приближения* для исходной системы (3.6).

***Теорема 3.5.*** Пусть при $\forall(t \ge t_0)$ $\vec{R}(t,\vec{y})$ – непрерывно дифференцируемая функция для всех $\left|\vec{y}\right| \le C_0$ (где $C_0 > 0$ – некоторое число), а $A(t) \equiv A$, т.е. система первого приближения – система с постоянными коэффициентами. Тогда:

1) если $\forall\lambda_i:\ \det\left(A - \lambda_i E\right) = 0 \Rightarrow\ \operatorname{Re}\lambda_i < 0$, то нулевое решение системы (3.6) *асимптотически устойчиво*;

2) если $\exists\lambda_i:\ \operatorname{Re}\lambda_i > 0$, то нулевое решение *неустойчиво*.

***Примеры.***

***3.3.*** Исследовать на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y; \\ \dot{y} = 2 - \mathrm{e}^{x} - 3y - \cos y. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\left(y - \dfrac{y^3}{6} + o\left(y^3\right)\right); \\ \dot{y} = 2 - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) - 3y - \left(1 - \dfrac{y^2}{2} + o\left(y^2\right)\right). \end{cases}$$

Таким образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right); \\ \dot{y} = -x - 3y + o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right). \end{cases}$$

Система первого приближения:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y \\ \dot{y} = -x - 3y \end{cases} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i \Rightarrow \operatorname{Re}\lambda_i < 0.$$

Следовательно, по теореме об устойчивости по первому приближению получаем, что нулевое решение устойчиво.

***<u>3.4.</u>*** Исследовать на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3; \\ \dot{y} = 3x - y^3. \end{cases}$$

*<u>Решение.</u>* Система первого приближения:

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y \\ \dot{y} = 3x \end{cases} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12 = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\lambda_i = 0 \; -$$

теорема об устойчивости по первому приближению не дает ответа. Подбираем функцию Ляпунова: $v(x, y) = 3x^2 + 4y^2$, имеем

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{\text{в силу системы}} = 6x\left(-4y - x^3\right) + 8y\left(3x - y^3\right) = -\left(6x^4 + 8y^4\right) < 0,$$

причем $w(x, y) = 6x^4 + 8y^4 > 0$ при $x^2 + y^2 \neq 0$. Следовательно, нулевое решение асимптотически устойчиво (по замечанию 3.6 к теореме Ляпунова).

## § 4. Фазовое пространство

### ***4.1. Показательная функция линейного оператора***

Пусть $E^n$ – $n$-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Введем норму, используя скалярное произведение: $\forall x \in E^n \Rightarrow \|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Пусть далее оператор $\hat{A}$: $E^n \to E^n$ – линейный в $E^n$.

***Определение 4.1.*** *Нормой* оператора $\hat{A}$ называется число

$$\|\hat{A}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\hat{A}x\|.$$

*Упражнение.* Докажите, что:

1) $\|\hat{A}\| \geq 0$, причем $\|\hat{A}\| = 0 \Leftrightarrow \hat{A} = \theta$ (т.е. $\forall x \in E^n \Rightarrow \hat{A}x = \theta$);

2) $\|\lambda\hat{A}\| = |\lambda|\,\|\hat{A}\|$; $\forall \lambda \in R$;

3) $\|\hat{A} + \hat{B}\| \leq \|\hat{A}\| + \|\hat{B}\|$;

4) $\|\hat{A} \cdot \hat{B}\| \leq \|\hat{A}\| \cdot \|\hat{B}\|$.

Свойства $(1-3)$ из упражнения означают, что множество линейных операторов в $E^n$ само является линейным нормированным пространством: $L\left(E^n, E^n\right)$.

***Определение 4.2.*** Пусть $\left\{\hat{A}_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность линейных операторов в $E^n$. Тогда $\hat{A} = \lim\limits_{k\to\infty} \hat{A}_k \overset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} \|\hat{A} - \hat{A}_k\| \to 0$, $k \to \infty$.

*Упражнение.* Докажите, что $L\left(E^n, E^n\right)$ – полное нормированное пространство.

***Определение 4.3.*** Рассмотрим ряд, составленный из операторов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k\,. \tag{4.1}$$

Этот ряд называется сходящимся к $\hat{S}$, если к оператору $\hat{S}$ сходится последовательность его частичных сумм $\hat{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \hat{A}_k$.

***<u>Признак Вейерштрасса.</u>*** Пусть ряд (4.1) таков, что:

1) $\forall k \Rightarrow \exists C_k > 0 : \left\| \hat{A}_k \right\| \le C_k$;

2) $\sum_{k=1}^{\infty} C_k < +\infty$.

Тогда ряд (4.1) сходится.

Зафиксируем в $E^n$ какой-либо базис (необязательно ортонормированный). Пусть $\hat{A} \to A$ – матрица оператора $\hat{A}$ в этом базисе.

***<u>Определение 4.4.</u>*** Экспонентой от оператора $\hat{A}$ называется ряд: $\exp(\hat{A}) \overset{\text{def}}{=} \hat{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{A}^k}{k!}$, где $\hat{E}$ – единичный оператор.

Если $\left\| \hat{A} \right\|$ – норма оператора $\hat{A}$, то $\left\| \hat{A}^k \right\| \le \left\| \hat{A} \right\|^k$, ряд экспоненты *мажорируется* сходящимся числовым рядом $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\| \hat{A} \right\|^k}{k!}$ и тогда по признаку Вейерштрасса он *сходится*.

Если $A$ – матрица оператора $\hat{A}$ в каком-либо базисе, то в силу изоморфизма имеем: $\mathrm{e}^{\hat{A}} \leftrightarrow \mathrm{e}^{A}$ в том же базисе (матрица $\mathrm{e}^{A}$ определяется аналогично). Таким образом, достаточно научиться считать величину $\mathrm{e}^{A}$, где $A$ – квадратная матрица $(n \times n)$.

***Свойства матричной экспоненты.***

1. Если $AB = BA$, т.е. матрицы $A$ и $B$ коммутируют, то $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}$.

*<u>Доказательство.</u>* В силу выполнения признака Вейерштрасса ряды матриц ведут себя как абсолютно сходящиеся числовые ряды. Поэтому

$$\mathrm{e}^{A}\cdot\mathrm{e}^{B}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B^m}{m!}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A^kB^m}{k!m!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}A^kB^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A+B)^n}{n!}=\mathrm{e}^{A+B}.$$

2. Если $B=S^{-1}AS$, то $\mathrm{e}^{B}=S^{-1}\mathrm{e}^{A}S$.

<u>*Доказательство.*</u> Так как $B^k=S^{-1}A^kS$, то отсюда и следует утверждение.

3. Если $B=\mathrm{diag}\left(A_1,\ldots,A_m\right)$, то $\mathrm{e}^{B}=\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{A_1},\ldots,\mathrm{e}^{A_m}\right)$.

<u>*Доказательство.*</u> Доказательство следует из того, что $\left(\mathrm{diag}\left(A_1,\ldots,A_m\right)\right)^k= =\mathrm{diag}\left(A_1^k,\ldots,A_m^k\right)$.

4. Рассмотрим $J_p=\lambda_pE_r+I_r^{(1)}$, где $E_r$ – единичная матрица размера $(r\times r)$, а $I_r^{(1)}$ – первый косой ряд единиц. Так как $\lambda_pE_r$ и $I_r^{(1)}$ коммутируют, то по свойству 1 получаем:

$$\mathrm{e}^{J_p}=\mathrm{e}^{\lambda_pE_r}\cdot\mathrm{e}^{I_r^{(1)}}.$$

Легко увидеть, что $\mathrm{e}^{\lambda_pE_r}=\mathrm{e}^{\lambda_p}\cdot E_r$. Далее

$$\left(I_r^{(1)}\right)^2=\begin{pmatrix}0&1&0&\ldots&0\\0&0&1&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&\ldots&1\\0&0&0&\ldots&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&1&\ldots&0\\0&0&0&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&\ldots&1\\0&0&0&\ldots&0\\0&0&0&\ldots&0\end{pmatrix}=I_r^{(2)}\ -$$

второй косой ряд единиц. Таким образом:

$$\left(I_r^{(1)}\right)^k=I_r^{(k)},\quad 1\le k\le r-1,\quad \left(I_r^{(1)}\right)^r=0,$$

где $(r\times r)$ – размерность этой матрицы.

5. Пусть жорданова форма матрицы $A$ связана с самой матрицей $A$ через матрицу перехода $S$ по закону:

$J=S^{-1}AS\Rightarrow A=SJS^{-1}$. Тогда $\mathrm{e}^{tA}=S^{-1}\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{tJ_1(\lambda_1)},\ldots,\mathrm{e}^{tJ_m(\lambda_m)}\right)S$,

где $e^{tJ_p(\lambda_p)} = e^{\lambda_p t} E_r \cdot e^{tI_r^{(1)}}$, и

$$e^{tI_r^{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{r-3}}{(r-3)!} & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

***<u>Пример 4.1.</u>*** Вычислить $e^{tA}$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

*<u>Решение.</u>* Так как $A$ – жорданова клетка, то

$$e^{tA} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*<u>Упражнения.</u>*

1. Докажите признак Вейерштрасса.

2. Докажите, что отображение $\hat{A} \to A$ является изоморфизмом пространства $L\left(E^n, E^n\right)$ на пространство матриц $(n \times n)$.

## ***4.2. Однопараметрическая группа преобразований*** $\left\{ \mathrm{e}^{tA} \right\}$

***Определение 4.5.*** Множество элементов $G = \{g\}$ называется *группой*, если для любых элементов $g_1$, $g_2 \in G$ определена *групповая операция* «$*$», удовлетворяющая следующим условиям:

1) $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$ – *ассоциативность*;

2) $\exists \mathrm{e} \in G$: $\mathrm{e} * g = g * \mathrm{e}$ для $\forall g \in G$; e – *единица* группы;

3) $\forall g \in G \Rightarrow \exists g^{-1} \in G$: $g^{-1} * g = g * g^{-1} = \mathrm{e}$; $g^{-1}$ – *обратный элемент для* $g$.

***Примеры.***

***4.2.*** Группа матриц $n \times n$ относительно операции умножения (эта группа некоммутативная).

***4.3.*** R – группа вещественных чисел относительно операции сложения (коммуникативная ≡ абелева группа).

***4.4.*** $SO(n)$ – группа ортогональных матриц $(n \times n)$ с определителем равным 1 (специальная ортогональная группа).

***4.5.*** $\left\{ \mathrm{e}^{tA} \right\}_{t \in R}$, A – фиксированная матрица – абелева группа, так как:

а) $\mathrm{e}^{t_1 A} \cdot \mathrm{e}^{t_2 A} = \mathrm{e}^{(t_1 + t_2) A}$;

б) ассоциативность очевидна;

в) $\exists \mathrm{e}^{0A} = E$ – единица группы;

г) $\mathrm{e}^{-tA}$ – обратный элемент этой группы.

Эту группу будем называть однопараметрической группой преобразований пространства $E^n$. Имеем:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{tA} = \frac{d}{dt}\left( E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right) = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = A\mathrm{e}^{tA}.$$

***Теорема 4.1.*** Рассмотрим систему $\dot{X}(t) = AX(t)$. Тогда решение с начальным условием $X(0) = X_0$ задается формулой $X(t) = \mathrm{e}^{tA} X_0$.

*Доказательство.* Дифференцируя $X(t)$, имеем:

$$\frac{d}{dt}X(t) = A\mathrm{e}^{tA}X_0 = AX(t),\ X(0) = X_0.$$

## 4.3. Фазовое пространство, фазовый поток, фазовые кривые

***Определение 4.6.*** Рассмотрим систему

$$\dot{\vec{X}} = A\vec{X},\ \vec{X} = \left(x_1,\ldots,x_n\right)^T. \qquad (4.2)$$

Тогда пространство $E^n$ называется *фазовым пространством* этой системы, точки $E^n$ – *фазовые*.

***Определение 4.7.*** Пара $\left(E^n, \left\{\mathrm{e}^{tA}\right\}_{t\in R}\right)$ называется *фазовым потоком*.

***Определение 4.8.*** Кривая в $E^n$ $X(t) = \mathrm{e}^{tA}X_0$ называется *фазовой*, проходящей через точку $X_0 \in E^n$. Фазовая кривая – это фазовая траектория точки $X_0$ под действием группы $\left\{\mathrm{e}^{tA}\right\}$.

***Определение 4.9.*** Точка $\vec{X}_0 \in E^n$ называется *положением равновесия* системы $\dot{\vec{X}} = A\vec{X}$ (неподвижной точкой фазового потока), если $\forall t \in R \Rightarrow \dot{\vec{X}}(t) = \mathrm{e}^{tA}\vec{X}_0 \equiv \vec{X}_0$.

***Замечание.*** Для рассматриваемого случая $\vec{X}_0 = \vec{0}$ – неподвижная точка.

***Определение 4.10.*** Пространство $E^{n+1} = E^1 \times E^n = \left\{\left(t, \vec{X}\right)\right\}$, где $E^n$ – фазовое пространство системы (4,2), называется *расширенным фазовым пространством* системы (4.2).

График $X(t) = \mathrm{e}^{tA}X_0$ в расширенном фазовом пространстве называется *интегральной кривой* потока $\left(E^n, \left\{\mathrm{e}^{tA}\right\}\right)$ (системы 4.2).

## 4.4. Фазовые траектории на плоскости

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами с двумя искомыми функциями:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Фазовое пространство в этом случае двумерно – *фазовая плоскость*, соответствующая группа фазового потока $\left\{ e^{tA} \right\}$, где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Исследуем в этом случае *все фазовые траектории*.

Сразу отметим, что при любой матрице $A$ точка $\vec{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ является *положением равновесия* системы. Поведение кривых будет определяться корнями характеристического уравнения:

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть $\lambda_1$ и $\lambda_2$ – корни этого уравнения.

Возможны следующие случаи.

I. $\Delta = \det A \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

а) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – *вещественные*. Общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t},$$

где $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ – два линейно независимых собственных вектора матрицы $A$ (рис. 4.1).

1. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Рассмотрим на фазовой плоскости $0xy$ прямые, проходящие через начало координат в направлении собственных векторов $\vec{h}_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ и $\vec{h}_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ матрицы $A$. Эти прямые сами являются фазовыми траекториями:

$$C_1 \neq 0,\ \ C_2 = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \qquad C_1 = 0,\ \ C_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

Строим эти траектории. Далее, если $t \to +\infty$, то:

$$x(t) = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t} \to 0, \quad y(t) = C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t} \to 0,$$

т.е. при $t \to +\infty$ *по любой траектории точка движется в начало координат*. Считаем производную $y'_x$:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{C_1\beta_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1\alpha_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}} = \frac{C_1\beta_1\lambda_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + C_2\beta_2\lambda_2}{C_1\alpha_1\lambda_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + C_2\alpha_2\lambda_2}.$$

При $t \to +\infty \Rightarrow\ y'_x \to \beta_2/\alpha_2$, это означает, что при $t \to +\infty$ все траектории входят в начало координат, касаясь прямой с направляющим вектором $\vec{h}_2$ (отвечающим меньшему по модулю собственному значению матрицы *A*). Если же $t \to -\infty$, то $y'_x \to \beta_1/\alpha_1$. Это означает, что на «$-\infty$» фазовые траектории имеют асимптоты, параллельные прямой с направляющим вектором $\vec{h}_1 = \{\alpha_1, \beta_1\}$ (отвечающим большему по абсолютной величине собственному значению *A*). Кроме того, *точка O* (0, 0) – сама является *фазовой траекторией*. Это *положение равновесия*, которое называется *устойчивым узлом* (см. рис 4.1, *а*).

2. $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. В этом случае замена $t \to -t$ сводит рассматриваемые траектории к траекториям пункта 1. Начертание фазовых траекторий не изменится (см. рис 4.1, *б*), но направление движения точки по траектории с возрастанием *t* сменится на противоположное. *O* (0, 0) – *точка покоя*, в этом случае положение равновесия – *неустойчивый узел*.

3. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. В этом случае: $y'_x \to \beta_2/\alpha_2$ при $t \to +\infty$, $y'_x \to \beta_1/\alpha_1$ при $t \to -\infty$. *O* (0, 0) – *точки покоя*. Она называется *седлом* (см. рис 4.1, *в*).

б) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – *комплексные*. Тогда $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = \alpha + i\beta$.

Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = \left(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t\right)e^{\alpha t}; \\ y(t) = \left(\tilde{C}_1\cos\beta t + \tilde{C}_2\sin\beta t\right)e^{\alpha t}, \end{cases}$$

где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные, а $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ – их линейные комбинации. Возможны следующие случаи (рис. 4.2).

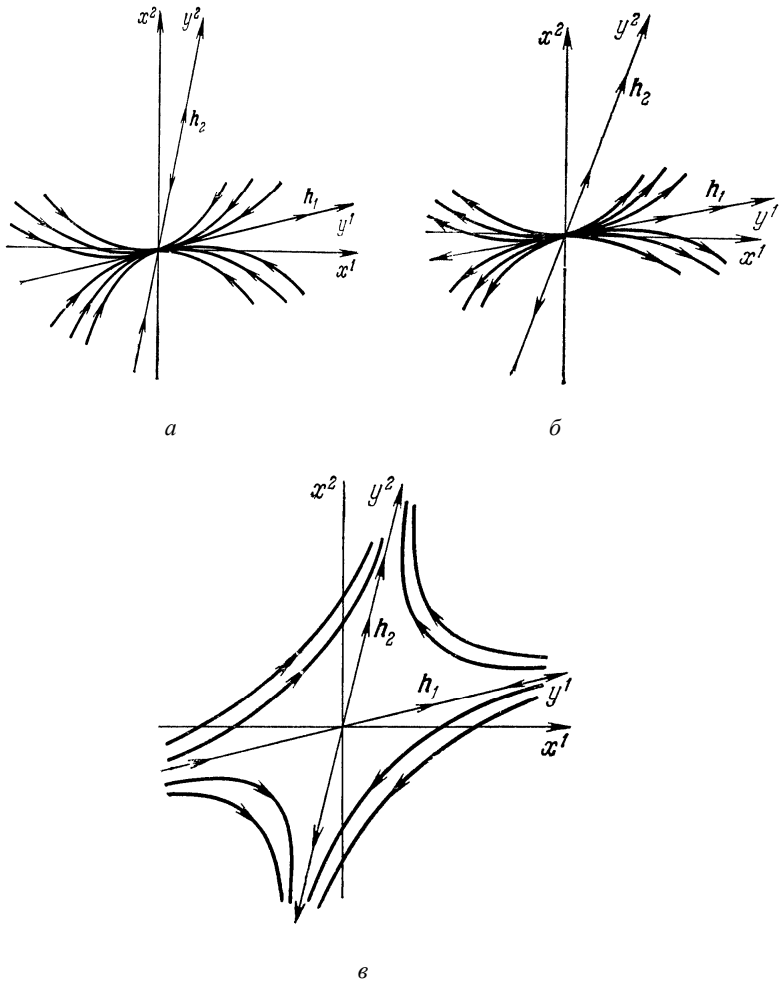



Рис. 4.1. Фазовые траектории вблизи точки равновесия в случае действительных, отличных от нуля собственных значений $\lambda_1 \neq \lambda_2$:
*а* – устойчивый узел; *б* – неустойчивый узел; *в* – «седло»

1. $\alpha = 0$. Тогда

$$\begin{cases} \tilde{C}_1 x - C_1 y = \left(\tilde{C}_1 C_2 - \tilde{C}_2 C_1\right)\sin\beta t; \\ \tilde{C}_2 x - C_2 y = \left(\tilde{C}_2 C_1 - \tilde{C}_1 C_2\right)\cos\beta t, \end{cases}$$

т.е. получаем *семейство кривых*

$$\frac{\left(\tilde{C}_1 x - C_1 y\right)^2}{\left(\tilde{C}_1 C_2 - \tilde{C}_2 C_1\right)^2} + \frac{\left(\tilde{C}_2 x - C_2 y\right)^2}{\left(\tilde{C}_1 C_2 - \tilde{C}_2 C_1\right)^2} = 1.$$

В этом случае точка покоя $O(0, 0)$ называется *центром* (см. рис. 4.2, *а*).

*Центр* – траектория, *устойчивая по Ляпунову*, но *не асимптотически устойчивая*. Все траектории центра замкнутые. Для того чтобы найти направления движения по этим траекториям, нужно взять точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$, подсчитать вектор скорости $\vec{V}(x, y)$ в этой точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$ из системы (4.3).

Имеем: $\vec{V} = \left\{\dot{x}(t), \dot{y}(t)\right\}\Big|_{M_0} = \{ax + by,\ cx + dy\}\big|_{M_0}$.

*Замечательное свойство поля скоростей* $\vec{V}(t)$: так как точка покоя только одна (точка $O(0, 0)$) и $\vec{V}(t)$ непрерывно зависит от $M(x, y)$, то *вдоль любой траектории направление движения не меняется, на всех траекториях направление движения одинаково*!

2. $\alpha \neq 0$. Аналогичные выкладки дают:

$$\frac{\left(\tilde{C}_1 x - C_1 y\right)^2}{\left(\tilde{C}_1 C_2 - \tilde{C}_2 C_1\right)^2} + \frac{\left(\tilde{C}_2 x - C_2 y\right)^2}{\left(\tilde{C}_1 C_2 - \tilde{C}_2 C_1\right)^2} = \mathrm{e}^{2\alpha t}.$$

В этом случае точка покоя $O(0, 0)$ называется *фокусом*. Если $\alpha < 0$, то при $t \to +\infty$ точка по любой траектории неограниченно приближается к точке $O(0, 0)$, т.е. при $\alpha < 0$ *фокус асимптотически устойчив* (см. рис. 4.2, *б*). Если же $\alpha > 0$, то при $t \to +\infty$ точка по любой траектории уходит на бесконечность, т.е. при $\alpha > 0$ точка $O(0, 0)$ неустойчива – *неустойчивый* фокус (см. рис. 4.2, *б*).

в) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ (так как $\Delta \neq 0$). В этом случае $\lambda_1$ и $\lambda_2$ – обязательно вещественные числа. Возможны следующие случаи.

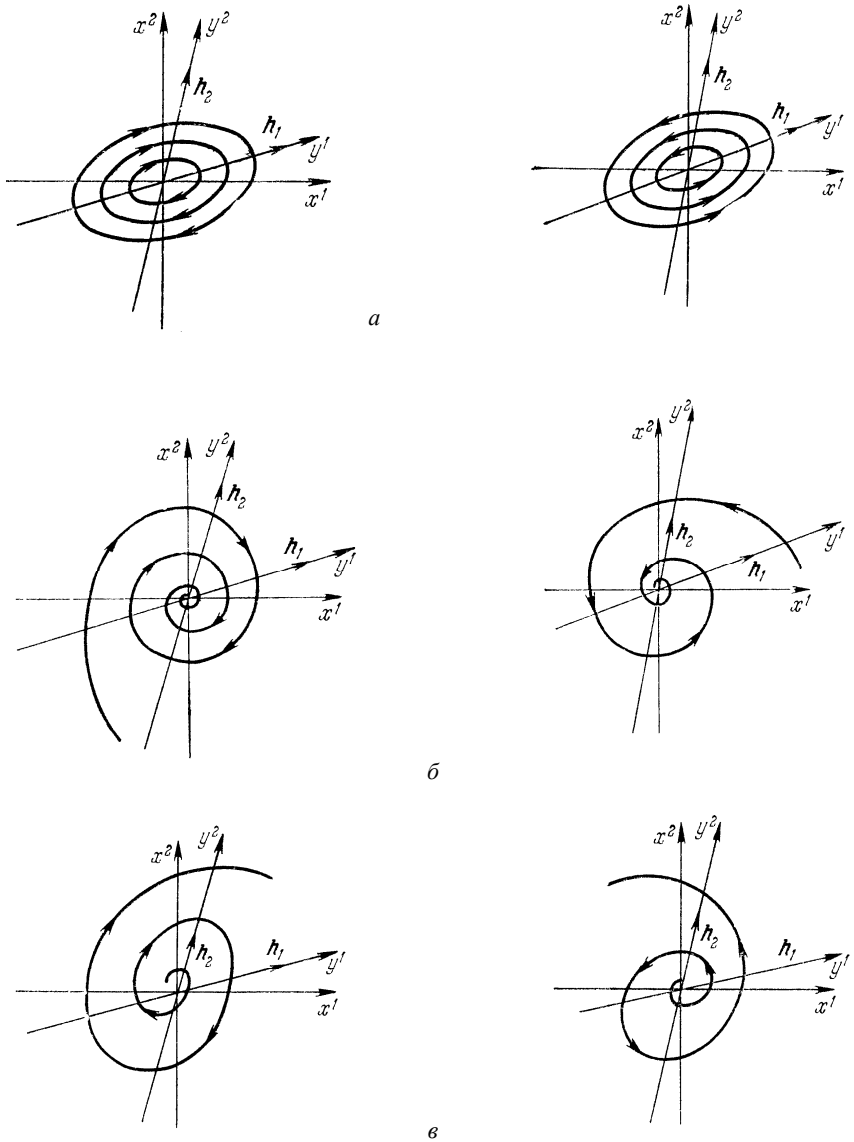
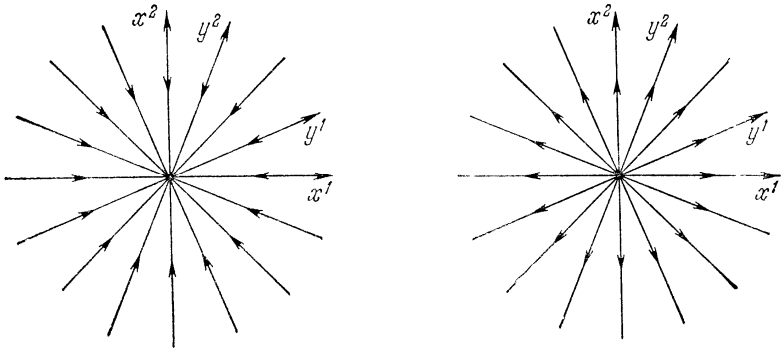



Рис. 4.2. Фазовые траектории вблизи точки равновесия в случае комплексных собственных значений $\lambda_1 \neq \lambda_2$:
*а* – центр; *б* – устойчивый фокус; *в* – неустойчивый фокус

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, $\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 0$, т.е. $A - \lambda E = O$ – нулевая матрица. Но тогда исходная система (4.3) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x; \\ \dot{y} = \lambda y, \end{cases} \Rightarrow \quad x(t) = C_1 e^{\lambda t}, \quad y(t) = C_2 e^{\lambda t}, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Фазовые траектории – *всевозможные полупрямые*, исходящие из начала координат. Точка покоя $O$ (0, 0) в этом случае называется *дикритическим узлом* (рис. 4.3).




*а* *б*

Рис. 4.3. Фазовые траектории вблизи точки равновесия в случае действительных собственных значений $\lambda_1 = \lambda_2$ (дикритический узел): *а* – устойчивый; *б* – неустойчивый

Если $\lambda < 0$, то дикритический узел *асимптотически устойчив* (см. рис.4.3, *а*), если $\lambda > 0$ – то *неустойчив* (см. рис.4.3, *б*).

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, $\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 1$. Общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left[ C_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 t \\ \beta_2 + \beta_3 t \end{pmatrix} \right] e^{\lambda t},$$

где $\vec{h}_1 = \{\alpha_1, \beta_1\}$ – собственный вектор, а $\vec{h}_2 = \{\alpha_2, \beta_2\}$, $\vec{h}_3 = \{\alpha_3, \beta_3\}$ – некоторые векторы. Уточним структуру решения, имеем:

$$\left(\left[C_1 \underset{\downarrow}{h_1} + C_2\left(\underset{\downarrow}{h_2} + \underset{\downarrow}{h_3}\, t\right)\right]\mathrm{e}^{\lambda t}\right)' = A\left[C_1 \underset{\downarrow}{h_1} + C_2\left(\underset{\downarrow}{h_2} + \underset{\downarrow}{h_3}\, t\right)\right]\mathrm{e}^{\lambda t},$$

приравнивая коэффициенты при $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, получаем: $\lambda \underset{\downarrow}{h_3} = A \underset{\downarrow}{h_3}$, т.е. $\underset{\downarrow}{h_3}$ – *собственный вектор A*. Тогда $\underset{\downarrow}{h_3} \sim \underset{\downarrow}{h_1}$. Следовательно, меняя константы, можно считать, что $\underset{\downarrow}{h_3} = \underset{\downarrow}{h_1}$ (!).

Получили *общее решение*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left[C_1 \underset{\downarrow}{h_1} + C_2\left(\underset{\downarrow}{h_2} + \underset{\downarrow}{h_1}\, t\right)\right]\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Точка покоя $O\,(0, 0)$ в этом случае называется *вырожденным узлом* (рис. 4.4). Если $\lambda < 0$, то вырожденный узел *асимптотически устойчив* (см. рис. 4.4, *а*), а если $\lambda > 0$ – то *неустойчив* (см. рис. 4.4, *б*). Среди фазовых траекторий имеется *одна прямолинейная* – $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$, т.е. траектория в направлении собственного вектора $\vec{h}_1$.

Далее имеем:

$$y'_x = \frac{C_2\beta_1 + \lambda\left(C_1\beta_1 + C_2\left(\beta_2 + \beta_1 t\right)\right)}{C_2\alpha_1 + \lambda\left(C_1\alpha_1 + C_2\left(\varepsilon_2 + \alpha_1 t\right)\right)} \to \frac{\beta_1}{\alpha_1} \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Следовательно, при $\lambda < 0$ все траектории входят в точку $O\,(0, 0)$, при $t \to +\infty$ касаясь прямой $y = (\beta_1 / \alpha_1)x$, и уходят из "$-\infty$" под этим же углом (аналогично при $\lambda > 0$). Для уточнения хода траекторий строятся несколько векторов поля скоростей.

II. Рассмотрим случай $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$. В этом случае хотя бы один из корней характеристического уравнения *равен нулю* (а следовательно, оба корня действительны).

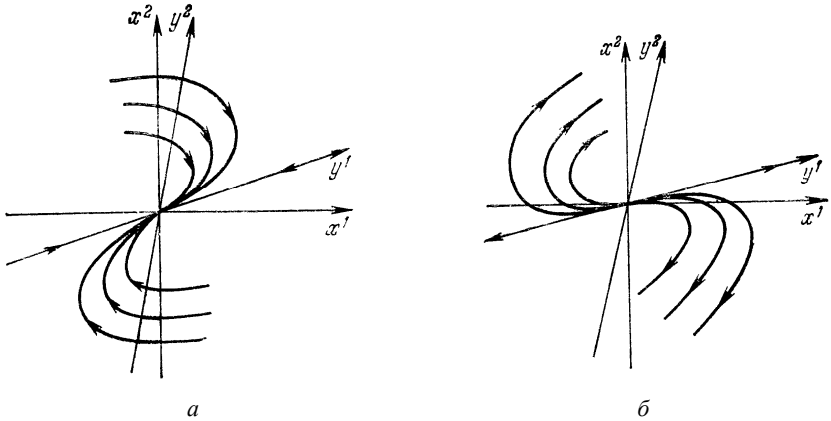
а) $\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 \neq 0$. Общее решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{t\lambda_2},$$

где $\vec{h}_1 = \{\alpha_1, \beta_2\}$ и $\vec{h}_2 = \{\alpha_2, \beta_2\}$ – собственные векторы матрицы $A$. Если $C_2 = 0$, $C_1 \neq 0$, то получаем фазовую траекторию $y = (\beta_1 / \alpha_1)x$. *На этой траектории каждая точка – точка покоя!* Все остальные траектории $(C_2 \neq 0)$ – также прямолинейные

$$\frac{y - C_1\beta_1}{x - C_1\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}.$$

Все они параллельны вектору $\vec{h}_2$. При $\lambda < 0$ точки по этим траекториям "движутся" к прямой $y = (\beta_1 / \alpha_1)x$. При $\lambda < 0$ все точки покоя *устойчивы по Ляпунову* (*но не асимптотически*), при $\lambda > 0$ – неустойчивы.




*а* *б*

Рис. 4.4. Фазовые траектории вблизи точки равновесия в случае действительных собственных значений $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ (вырожденный узел): *а* – устойчивый; *б*– неустойчивый

б) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. В этом случае возможны следующие ситуации.

1. $\mathrm{Rang}(A - 0E) = 0$. Тогда $A = O$ – нулевая матрица. *Общее решение* $x(t) = C_1$, $y(t) = C_2$. *Каждая точка плоскости – точка покоя*, устойчивая по Ляпунову, но не асимптотически.

2. $\operatorname{Rang}(A-0E)=1$. *Общее решение*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 t \\ \beta_2 + \beta_3 t \end{pmatrix},$$

где $\vec{h}_1 = \{\alpha_1, \beta_2\}$ – собственный вектор. Вновь показываем, что $\vec{h}_3 = \{\alpha_3, \beta_3\} = \vec{h}_1$. *Среди траекторий имеется* $(C_2 = 0,\ C_1 \neq 0)$ *траектория* $y = (\beta_1 / \alpha_1)x$, *целиком состоящая из точек покоя*. Остальные траектории – *прямые*, *параллельные прямой* $y = (\beta_1 / \alpha_1)x$:

$$\frac{y - C_1\beta_1 - C_2\beta_2}{x - C_1\alpha_1 - C_2\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

*Поле скоростей* $\vec{V}(t) = \left\{\dot{x}(t), \dot{y}(t)\right\} = C_2\vec{h}_1$ *меняет направление* при изменении знака $C_2$. Точка $O$ (0,0) и другие положения равновесия неустойчивы.

Были рассмотрены всевозможные виды фазовых траекторий в этом простейшем случае.

## § 5. Первые интегралы системы ОДУ

Вновь рассматриваем систему ОДУ

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(t, \vec{y}), \tag{5.1}$$

где $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\vec{f} = (f_1(t, \vec{y}), \ldots, f_n(t, \vec{y}))$ – *непрерывно дифференцируемая в некоторой области* $G \subseteq E^{n+1}_{t,\vec{y}}$ вектор-функция.

***<u>Определение 5.1.</u>*** Функция $\psi(t, \vec{y})$, удовлетворяющая в некоторой подобласти $G' \leq G$ условиям:

1) $\psi(t, \vec{y})$ непрерывно дифференцируема в $G'$ и не равна в $G'$ тождественно постоянной;

2) $\psi(t, \vec{y}) \equiv \text{const}$ *вдоль любого решения* $\vec{y} = \vec{y}(t)$ системы (5.1), проходящего в $G'$, называется *первым интегралом системы* (5.1) в $G'$.

***<u>Теорема 5.1 (критерий первого интеграла).</u>*** Пусть $\vec{f}(t,\vec{y}) \in C^1(G)$, $G \subseteq E^{n+1}_{t,\vec{y}}$. Тогда не равная тождественно постоянной, непрерывно дифференцируемая в $G' \subseteq G$ функция $\psi(t,\vec{y})$ будет в $G'$ первым интегралом системы (5.1) в том и только в том случае, если

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial y_i} f_i(t,\vec{y}) \equiv 0 \quad \text{в} \quad G'.$$

*<u>Доказательство.</u> Необходимость.* Если $\psi(t,\vec{y})$ – первый интеграл системы (5.1) в $G'$, то для любого решения $\vec{y}(t)$ системы (5.1) в $G'$ получаем $\psi(t,\vec{y}(t)) \equiv \text{const}$ (при этом вдоль разных решений константы, вообще говоря, разные). Дифференцируя это тождество, получаем

$$0 \equiv \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial y_i} f_i(t,\vec{y})$$

всюду в области $G'$, так как через каждую точку $G'$ в силу теоремы существования и единственности (ТСЕ) проходит решение системы (5.1).

*<u>Достаточность.</u>* Если функция $\psi(t,\vec{y})$ удовлетворяет в $G'$ условиям теоремы, а $\vec{y}(t)$ – какое-либо решение (5.1) в $G'$, то

$$0 \equiv \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial y_i} f_i(t,\vec{y}) = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} = \frac{d}{dt}\psi(t,\vec{y}(t)),$$

где справа записана *производная вдоль решения*. Но тогда $\psi(t,\vec{y}(t)) \equiv \text{const}$ вдоль этого решения. Таким образом $\psi(t,\vec{y})$ – первый интеграл системы (5.1).

***<u>Замечание.</u>*** Иногда первым интегралом системы (5.1) называют равенство $\psi(t,\vec{y}) \equiv \text{const}$, где $\psi(t,\vec{y})$ – функция из определения 5.1.

Напомним следующие определения.

***<u>Определение 5.2.</u>*** Система функций $\{\psi_k(t,\vec{y})\}_{k=1}^{m}$ называется *зависимой в* $G$, если хотя бы одна из этих функций, например $\psi_1(t,\vec{y})$, представима на $G$ в виде

$$\psi_1(t,\vec{y}) = \Phi\left(\psi_2(t,\vec{y}),\ldots,\psi_m(t,\vec{y})\right), \tag{5.2}$$

где $\Phi(z_1,\ldots,z_{m-1})$ – некоторая функция, которую далее считаем *непрерывно дифференцируемой* в соответствующей области переменной $\vec{z}=(z_1,\ldots,z_{m-1})$. Если же представление (5.2) не имеет места в $G$ ни для одной из $\psi_i(t,\vec{y})$, то система $\{\psi_k\}_{k=1}^{m}$ называется *независимой в G*.

***<u>Теорема 5.2 (о существовании первых интегралов).</u>*** Если $\vec{f}(t,\vec{y})\in C^1(G)$, $G\subseteq E_{t,\vec{y}}^{n+1}$, то $\forall(t_0,\vec{y}_0)\in G\Rightarrow\ \Rightarrow\exists U_\delta(t_0,\vec{y}_0)$, в которой система (5.1) *имеет n независимых первых интервалов*.

***<u>Теорема 5.3.</u>*** Пусть $\{\psi_k(t,\vec{y})\}_{k=1}^{m}$ – $n$ первых интегралов системы (5.1) в некоторой окрестности точки $M_0(t_0,\vec{y}_0)\in G$. Допустим, что

$$J=\left.\frac{D(\psi_k(t,\vec{y}),\ldots,\psi_n(t,\vec{y}))}{D(y_1,\ldots,y_n)}\right|_{M_0}\neq 0.$$

Тогда в некоторой окрестности точки $M_0$ система уравнений

$$\begin{cases}\psi_1(t,\vec{y})=C_1;\\ \ldots;\\ \psi_n(t,\vec{y})=C_n\end{cases}\qquad(3)$$

определяет (при подходящем выборе констант $C_1,\ldots,C_n$) любое решение системы (5.1), – *общее решение* (5.1) в окрестности точки $M_0$.

<u>*Доказательство.*</u> В силу непрерывной дифференцируемости функций $\psi_k(t,\vec{y})\Rightarrow J\neq 0$ в некоторой окрестности точки $M_0$. По теореме о системе неявных функций получаем, что существует и притом единственное решение системы (5.3)

$$y_1=\varphi_1(t,C_1,\ldots,C_n),\ldots,\ y_n=\varphi_n(t,C_1,\ldots,C_n),$$

*определенное* и *непрерывно дифференцируемое* в некоторой окрестности точки $t_0$. Положим $C_i=\psi_i(t_0,\vec{y}_0)$. Тогда в силу единственности решения системы (5.3) получим: $\vec{y}(t_0)=\vec{\varphi}(t_0,\vec{\psi}(t_0,\vec{y}_0))=$

$= \vec{y}_0$, т.е. кривая $\vec{y} = \vec{\varphi}\left(t, \vec{\psi}\left(t_0, \vec{y}_0\right)\right) = \vec{y}\left(t; \vec{y}_0, t_0\right)$ проходит через точку $\left(t_0, \vec{y}_0\right)$. Далее из (5.3), дифференцируя эти равенства, получаем:

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_k}{\partial y_i} y'_i(t) = 0, \; k = 1, 2, \ldots n, \tag{5.4}$$

и в силу критерия первого интеграла

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_k}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \psi_k}{\partial y_i} f_i(t, \vec{y}) = 0; \\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{5.5}$$

Из систем (5.4) и (5.5), в силу того, что $\dfrac{D\left(\psi_1, \ldots, \psi_n\right)}{D\left(y_1, \ldots, y_n\right)} \neq 0$ в окрестности точки $M_0$, получаем, что $\vec{y}'(t) \equiv \vec{f}(t, \vec{y})$, т.е. $\vec{y}\left(t; t_0, \vec{y}_0\right)$ есть решение системы (5.1) с данными Коши $\vec{y}\left(t_0\right) = \vec{y}_0$. Таким образом, (5.3) определяет общее решение системы (1) *в форме Коши.*

***<u>Замечание.</u>*** Для вычисления первых интегралов системы (5.1) часто бывает удобно переписать эту систему в симметричной форме, положив сначала $\dfrac{dy_1}{f_1(t, \vec{y})} = \dfrac{dy_2}{f_2(t, \vec{y})} = \ldots = \dfrac{dy_n}{f_n(t, \vec{y})} = dt$,

а затем переобозначив

$$y_i \to x_i, \; t \to x_{n+1}, \; f_i\left(t, y_i\right) = f_i(\vec{x}), \quad n+1 \to n.$$

Тогда (5.1) запишется в виде: $\dfrac{dx_1}{f_1(\vec{x})} = \ldots = \dfrac{dx_n}{f_n(\vec{x})}$.

***<u>Примеры.</u>***

***<u>5.1.</u>*** $\dfrac{dx}{y+z} = \dfrac{dy}{x+z} = \dfrac{dz}{x+y}$.

<u>*Решение.*</u> $\dfrac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} = \dfrac{d(x-y)}{y-x} \Rightarrow (x+y+z)(x-y)^2 = C_1$,

$$\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} = \frac{d(y-z)}{z-y} \Rightarrow (x+y+z)(y-z)^2 = C_2.$$

*Ответ.* $\begin{cases}(x+y+z)(x-y)^2=C_1,\\(x+y+z)(y-z)^2=C_2.\end{cases}$

***5.2.*** $\dfrac{dx}{x+y^2+z^2}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}$.

*Решение.* $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}\Rightarrow\dfrac{y}{z}=C_1$;

$$\frac{dx-2ydy-2zdz}{x-y^2-z^2}=\frac{dz}{z}\Rightarrow\frac{x-y^2-z^2}{z}=C_2.$$

*Ответ.* $\begin{cases}y=C_1z,\\x-y^2-z^2=C_2z.\end{cases}$

***5.3.*** Дана система

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{x^2-t}{y},\\\dot{y}=-x.\end{cases}$$

Являются ли функции $\psi_1=t^2+2xy$, $\psi_2=x^2-ty$ первыми интегралами системы?

*Решение.*

$$\left.\frac{d\psi_1}{dt}\right|_{\text{вдоль решения}}=2t+2y\frac{x^2-t}{y}+2x(-x)\equiv 0,$$

т.е. $\psi_1=t^2+2xy$ – первый интеграл системы;

$$\left.\frac{d\psi_2}{dt}\right|_{\text{вдоль решения}}=-y+2x\frac{x^2-t}{y}-t(-x)\not\equiv 0,$$

т.е. $\psi_2=x^2-ty$ не является первым интегралом системы.

***5.4.*** Проверить, являются ли независимыми первые интегралы $\dfrac{x+y}{z+x}=C_1$, $\dfrac{z-y}{x+y}=C_2$ системы $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}$.

*Решение.* Сначала проверим, что это первые интегралы данной системы:

$$\frac{d(x+y)}{x+y}=\frac{d(x+z)}{x+z}\Rightarrow\frac{x+y}{x+z}=C_1;$$

$$\frac{d(z-y)}{z-y}=\frac{d(x+y)}{x+y}\Rightarrow\frac{z-y}{x+y}=C_2,$$

т.е. это первые интегралы.

Однако

$$C_2-\frac{1}{C_1}=-1,$$

следовательно,

$$C_2=\frac{1-C_1}{C_1},$$

т.е. эти интегралы зависимы.

## § 6. Линейные однородные уравнения с частными производными первого порядка

***Определение 6.1.*** Уравнение вида

$$\alpha_1(\vec{x})\frac{\partial z}{\partial x_1}+\alpha_2(\vec{x})\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+\alpha_n(\vec{x})\frac{\partial z}{\partial x_n}=0, \qquad (6.1)$$

где $\vec{\alpha}(\vec{x})$ – заданная в некоторой области $G\subseteq E^n_{\vec{x}}$ вектор-функция, а $z=z(\vec{x})$ – искомая функция, называется (*однородным*) *линейным* дифференциальным уравнением первого порядка с частными производными.

***Определение 6.2.*** Непрерывно дифференцируемая в $G$ функция $z=z(\vec{x})$ называется решением (6.1) в $G$, если после подстановки ее в уравнение (6.1), оно обращается в тождество в $G$.

***Замечания.*** 1. Таким образом, ищем *потенциальное поле* $\vec{A}(\vec{x})=\operatorname{grad}z(\vec{x})$, *ортогональное* в $G$ заданному полю $\vec{\alpha}(\vec{x})$.

2. Если в точке $\vec{x}_0 \in G \Rightarrow \left|\vec{\alpha}\left(\vec{x}_0\right)\right| = 0$, то точка $\overline{x}_0$ называется *особой точкой* уравнения (6.1) (и, соответственно, поля $\vec{\alpha}(\vec{x})$).

3. Далее рассмотрим *непрерывно дифференцируемое* в $G$ поле $\vec{\alpha}(\vec{x})$ *без особых точек*.

***<u>Теорема 6.1.</u>*** Рассмотрим уравнение (6.1) и систему ОДУ

$$\frac{dx_1}{\vec{\alpha}_1(\vec{x})} = \frac{dx_2}{\vec{\alpha}_2(\vec{x})} = \ldots = \frac{dx_n}{\vec{\alpha}_n(\vec{x})}. \qquad (6.2)$$

Тогда непрерывно дифференцируемая в $G$ функция $z(\vec{x}) \not\equiv \text{const}$ в $G$ является *решением* уравнения (6.1) $\Leftrightarrow$ $z(\vec{x})$ – *первый интеграл* (6.2). Кроме того, $z(\vec{x}) \equiv \text{const}$ также очевидно решение (6.1).

<u>*Доказательство.*</u> Уравнение (6.1) означает, что производная вдоль решения системы (6.2) равна нулю. Пользуясь критерием первого интеграла (теорема 5.1), получаем нужное утверждение.

***<u>Теорема 6.2 (общий вид решения уравнения (6.1)).</u>*** Пусть $\left\{\psi_k(\vec{x})\right\}_{k=1}^{n-1}$ – $(n-1)$ независимый первый интеграл системы (6.2) на $G$; $\vec{x}_0 \in G$ и

$$\frac{D\left(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}\right)}{D\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)} \neq 0$$

в $\vec{x}_0$.

Тогда:

1) если $z = z(\vec{x})$ – решение (6.1) на $G$, то, по крайней мере, в некоторой окрестности точки $\vec{x}_0$ имеет место представление $z(\vec{x}) = \Phi\left(\psi_1(\vec{x}),\ldots,\psi_{n-1}(\vec{x})\right)$, где $\Phi$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция;

2) обратно, любая функция $z(\vec{x}) = \Phi\left(\psi_1(\vec{x}),\ldots,\psi_{n-1}(\vec{x})\right)$ является решением (6.1), если только $\Phi\left(y_1,\ldots,y_{n-1}\right)$ – непрерывно дифференцируемая в соответствующей области функция.

<u>*Доказательство.*</u> 1. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1(\vec{x})\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\alpha_2(\vec{x})\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\ldots+\alpha_n(\vec{x})\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n}=0; \\ \ldots; \\ \alpha_1(\vec{x})\dfrac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1}+\alpha_2(\vec{x})\dfrac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2}+\ldots+\alpha_n(\vec{x})\dfrac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n}=0; \\ \ldots; \\ \alpha_1(\vec{x})\dfrac{\partial z}{\partial x_1}+\alpha_2(\vec{x})\dfrac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+\alpha_n(\vec{x})\dfrac{\partial z}{\partial x_n}=0 \end{cases}$$

относительно $\vec{\alpha}(\vec{x})$. Так как $|\vec{\alpha}(\vec{x})|\neq 0$ ни в одной точке (и в частности в точке $\vec{x}_0$), то

$$\frac{D(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1},z)}{D(x_1,\ldots,x_n)}\equiv 0 \quad \text{в} \quad G.$$

Кроме того, по крайней мере, один минор порядка $(n-1)$, стоящий в $(n-1)$ первой строке, не равен нулю в точке $\vec{x}_0$, а следовательно, и в некоторой окрестности точки $\vec{x}_0$.

Без ограничений общности можно считать, что

$$\frac{D(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1})}{D(x_1,\ldots,x_{n-1})}\neq 0 \quad \text{в} \quad U_\delta(x_0).$$

Тогда по теореме о достаточных условиях зависимости функций получим, что существует непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(y_1,\ldots,y_{n-1})$, такая, что $z(\vec{x})=\Phi(\psi_1(\vec{x}),\ldots,\psi_{n-1}(\vec{x}))$.

2. *Обратно*. Дифференцируя функцию $z(\vec{x})$ по $x_i$ и складывая, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial y_k}\frac{\partial\psi_k}{\partial x_i} \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\vec{x})\frac{\partial z}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial y_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\vec{x})\frac{\partial\psi_k}{\partial x_i}\right)=0,$$

т.е. $z=z(\vec{x})$ – решение уравнения (6.1).

***<u>Пример 6.1.</u>*** Найти общее решение уравнения:

$$(x-z)\frac{\partial n}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial n}{\partial y}+2z\frac{\partial n}{\partial z}=0.$$

*Решение.* Соответствующая система ОДУ

$$\frac{dx}{x-z}=\frac{dy}{y-z}=\frac{dz}{2z}.$$

Отсюда

$$\frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{dz}{2z}\Rightarrow\frac{(x-y)^2}{z}=C_1;$$

$$\frac{d(x+y+2z)}{x+y+2z}=\frac{dz}{2z}\Rightarrow\frac{(x+y+2z)^2}{z}=C_2.$$

*Ответ:*

$$u=\Phi\left(\frac{(x-y)^2}{z};\ \frac{(x+y+2z)^2}{z}\right).$$

## § 7. Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка

### *7.1. Характеристики и общее решение*

Здесь рассмотрим более общее (чем (6.1)) уравнение:

$$a_1(\vec{x},z)\frac{\partial z}{\partial x_n}+\ldots+a_n(\vec{x},z)\frac{\partial z}{\partial x_n}=b(\vec{x},z), \qquad (7.1)$$

где $a_i(\vec{x},z)$, $b(\vec{x},z)\in C^1(G)$, $G\subseteq E^{n+1}_{\vec{x},z}$ – некоторая область, причем $a_1^2(\vec{x},z)+\ldots+a_n^2(\vec{x},z)>0$ в $G$. Уравнение (7.1) называется *квазилинейным* уравнением с частными производными первого порядка.

***Определение 7.1.*** Система ОДУ

$$\frac{dx_1}{a_1(\vec{x},z)}=\ldots=\frac{dx_n}{a_n(\vec{x},z)}=\frac{dz}{b(\vec{x},z)} \qquad (2)$$

называется *системой характеристик* уравнения (7.1), а каждая интегральная кривая системы (7.2) – *характеристикой* уравнения (7.1).

***Определение 7.2.*** Поверхность $S\subset G$: $z=f(\vec{x})$, $x\in\Omega$, называется *состоящей из характеристик уравнения* (7.1), если через каж-

дую точку $S$ проходит характеристика, целиком лежащая на $S$ в области $G$.

***<u>Теорема 7.1.</u>*** Функция $z = f(\vec{x}) \in C^1(\Omega)$ является решением уравнения (7.1) в $\Omega$ тогда и только тогда, когда поверхность $S:\ z = f(\vec{x})$, $x \in \Omega$, целиком состоит из характеристик уравнения (7.1).

*<u>Доказательство.</u> Необходимость.* Пусть $z = f(\vec{x})$ – решение (7.1), $x \in \Omega$. Рассмотрим повторяемость $S:\ f(\vec{x}) - z = 0$. Тогда вектор $\vec{N} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}; \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n}; -1 \right\}$ – *нормаль к S*. Рассмотрим линию, проходящую через точку $M(\vec{x}, f(\vec{x}))$, целиком лежащую на $S$ и удовлетворяющую системе уравнений

$$\frac{dx_1}{a_1(\vec{x}, f(\vec{x}))} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(\vec{x}, f(\vec{x}))} = dt,$$

т.е. рассмотрим линию:

$$\vec{x} = \vec{x}(t), z = f(\vec{x}(t)). \tag{7.3}$$

Покажем, что это характеристика уравнения (7.1). Так как $z = f(\vec{x})$ – решение (7.1), то

$$dz = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \dot{x}_n \right) dt =$$

$$= \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} a_1(\vec{x}, f(\vec{x})) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} a_n(\vec{x}, f(\vec{x})) \right] dt = b(\vec{x}, f(\vec{x}))\, dt,$$

т.е. $dz = b(\vec{x}, f(\vec{x}))\, dt$, таким образом функция $z = f(\vec{x})$ удовлетворяет вместе с $(x_1, \ldots, x_n)$ системе характеристик (7.2). Следовательно, кривая (7.3) является характеристикой уравнения (7.1).

*Обратно*, если $S:\ z = f(\vec{x})$, $x \in \Omega$, целиком состоит из характеристик, то $\vec{N} = \left\{ f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n}; -1 \right\}$ и $\vec{e} = \{a_1, \ldots, a_n; b\}$ – соответственно нормаль к $S$ и касательный вектор к характеристике $\Rightarrow \vec{N} \perp \vec{e} \Rightarrow$ выполнено уравнение (7.1).

***<u>Теорема 7.2 (общий вид решения).</u>*** Рассмотрим уравнение (7.1) и систему (7.2). Пусть $\{\psi_k(\vec{x},z)\}_{k=1}^{n} - n$ независимых первых интегралов системы (7.2) в $G$, а функция $\Phi(y_1,\ldots,y_n)$ такова, что в некоторой точке $(\vec{x}_0,z_0)\in G \Rightarrow$

$$1)\ \Phi\left(\psi_1(\vec{x}_0,z_0),\ldots,\psi_n(\vec{x}_0,z_0)\right)=0\,;$$

$$2)\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}\left(\psi_1(\vec{x}_0,z_0),\ldots,\psi_n(\vec{x}_0,z_0)\right)\neq 0\,.$$

Тогда в некоторой окрестности точки $(\vec{x}_0,z_0)$ уравнение

$$\Phi\left(\psi_1(\vec{x},z),\ldots,\psi_n(\vec{x},z)\right)=0$$

определяет общее решение $z=f(\vec{x})$ уравнения (7.1).

***<u>Пример 7.1.</u>*** Решить уравнение $\sin^2 x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\operatorname{tg} z\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos^2 z$.

<u>*Решение.*</u> $$\frac{dx}{\sin^2 x}=\frac{dy}{\operatorname{tg} z}=\frac{dz}{\cos^2 z}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-\operatorname{ctg} z=\operatorname{tg} z+C_1;\\ y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 z+C_2\end{cases}$$ – два независимых первых интеграла.

<u>*Ответ:*</u> $\Phi=\left(\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} z,\ y-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 z\right)=0$.

## ***<u>7.2. Задача Коши</u>***

Здесь рассмотрим случай $n = 2$, т.е. уравнение

$$a_1(\vec{x},z)\frac{\partial z}{\partial x_1}+a_2(\vec{x},z)\frac{\partial z}{\partial x_2}=b(\vec{x},z)\,, \qquad (7.4)$$

где $a_i(\vec{x},z)$, $b(\vec{x},z)\in C^1(G)$, $G\subseteq E^3_{\vec{x},z}$, и $a_1^2(\vec{x},z)+a_2^2(\vec{x},z)>0$ в $G$.

Пусть в $G$ задана *гладкая кривая* $L$: $x_1=\psi_1(t)$, $x_2=\psi_2(t)$, $z=\psi_3(t)$, $\alpha\le t\le\beta$.

Поставим *следующую задачу*: найти поверхность $z = f(x_1, x_2)$, удовлетворяющую уравнению (7.4) и проходящую через заданную линию $L$. Эту задачу называют *задачей Коши* для уравнения (7.4).

***Замечание***. Если $z = f(x_1, x_2)$ – решение (7.4), проходящее через $L$, то по теореме 7.1 поверхность $S$: $z = f(x_1, x_2)$ целиком состоит из характеристик уравнения (7.4). Поэтому требуется через каждую точку $M \in L$ провести характеристику уравнения (7.4) и рассмотреть поверхность, образованную этими характеристиками.

Отметим, что если $L$ является характеристикой, то такое построение возможно не всегда, а может оказаться не единственным.

***Теорема 7.3.*** Рассмотрим уравнение (7.4) и указанную кривую $L$. Пусть $M_0(x_{10}, x_{20}, z_0) \in L$, где $x_{10} = \psi_1(t_0)$, $x_{20} = \psi_2(t_0)$, $z_0 = \psi_3(t_0)$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$, и пусть

$$\begin{vmatrix} \psi_1'(t_0) & a_1(\psi_1(t_0), \psi_2(t_0), \psi_3(t_0)) \\ \psi_2'(t_0) & a_2(\psi_1(t_0), \psi_2(t_0), \psi_3(t_0)) \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (7.5)$$

Тогда в некоторой окрестности точки $M_0$ существует единственное решение уравнения (7.4), проходящее через заданную кривую $L$.

*Доказательство.* Запишем уравнение характеристик

$$\frac{dx_1}{a_1(\vec{x}, z)} = \frac{dx_2}{a_2(\vec{x}, z)} = \frac{dz}{b(\vec{x}, z)} = ds. \qquad (7.6)$$

Пусть $M = M(t) = M(\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ \psi_3(t)) \in L$ – точка линии $L$, отвечающая значению параметра $t$. Проведем через $M$ решение системы (7.6), т.е. системы

$$\frac{dx_1}{ds} = a_1(\vec{x}, z), \quad \frac{dx_2}{ds} = a_2(\vec{x}, z), \quad \frac{dz}{ds} = b(\vec{x}, z)$$

с начальными условиями:

$$x_1(0, t) = \psi_1(t), \quad x_2(0, t) = \psi_2(t), \quad z(0, t) = \psi_3(t).$$

Такое решение при каждом $t \in (\alpha, \beta)$ существует, единственно и выходит на границу области $G$:

$$x_1 = x_1(s, t), \quad x_2 = x_2(s, t), \quad z = z(s, t).$$

Рассмотрим поверхность:

$$S=\{(x_1,x_2,z)\in G:\ x_1=x_1(s,t),\ \ x_2=x_2(s,t),\ z=z(s,t)\}.$$

Тогда:

а) $L\in S$ и, соответственно, $s=0$;

б) функции $x_1=(s,t)$, $x_2=(s,t)$, $z(s,t)$ непрерывно дифференцируемы по $s$ (в силу системы (7.6)) и по $t$ (в силу непрерывной дифференцируемости по начальным данным). В силу условия (7.5) в *некоторой окрестности точки* $t_0$ на $L$

$$0\neq\begin{vmatrix} a_1(\psi_1(t),\psi_2(t),\psi_3(t)) & \psi_1'(t) \\ a_2(\psi_1(t),\psi_2(t),\psi_3(t)) & \psi_2'(t) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial s} & \dfrac{\partial x_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial s} & \dfrac{\partial x_2}{\partial t} \end{vmatrix}_L .$$

Тогда по теореме о неявной функции система алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1=x_1(s,t); \\ x_2=x_2(s,t) \end{cases}$$

в некоторой окрестности точки $M_0(\psi_1(t_0),\ \varphi_2(t_0),\ \psi_3(t_0))$ имеет единственное решение $s=s(x_1,x_2)$, $t=t(x_1,x_2)$. Это решение непрерывно дифференцируемо. Но тогда в некоторой окрестности точки $M_0$ уравнение поверхности $S$ имеет вид

$$S:\ z=z(S(x_1,x_2),\ t(x_1,x_2))=f(x_1,x_2).$$

По построению $S$ состоит из характеристик. Следовательно, $z=f(x_1,x_2)$ – решение поставленной задачи Коши.

***<u>Пример 7.2.</u>*** Решить задачу Коши

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2,$$

$$L:\ y=-2;\quad z=x-x^2.$$

<u>*Решение.*</u> $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z-x^2-y^2}\Rightarrow\begin{cases} y/x=C_1; \\ (z+x^2+y^2)/x=C_2. \end{cases}$

Имеем на L: $x=t$, $y=-2$, $z=t-t^2$. Тогда $C_1=-\frac{2}{t}$; $\frac{t-t^2+t^2+4}{t}=C_2 \Rightarrow \quad C_2=1-2C_1$. Таким образом, $\frac{z+x^2+y^2}{x}=$ $=1-2\frac{y}{x} \Rightarrow z=x-2y-x^2-y^2$.

<u>*Ответ:*</u> $z=x-2y-x^2-y^2$.

## § 8. Краевые задачи для ОДУ и функция Грина

### <u>*8.1. Постановка задачи и функция Грина*</u>

<u>***Постановка задачи.***</u> На функциях $y \in C^2[a;b]$ рассматриваем дифференциальное выражение:

$$l(y) \equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y, \quad \text{где } p(x)>0 \text{ на } [a;b],$$

$$p(x) \in C^1[a;b];\ q(x) \geq 0 \text{ на } [a;b],\ q(x) \in C[a;b].$$

Для дифференциального выражения $l(y)$ рассматриваем *краевую задачу*: требуется найти $y \in C^2(a;b) \cap C^1[a;b]$, удовлетворяющую обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$l(y)=\lambda y(x)+f(x),\ x \in (a;b) \tag{8.1}$$

и краевым условиям:

$$\alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=0, \quad \alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=0, \tag{8.2}$$

где $f(x) \in C[a;b]$ заданная функция, $\lambda \in \mathbb{C}$ (или $\lambda \in \mathbb{R}$) − параметр, а $\alpha_i, \beta_i$: $\alpha_i^2+\beta_i^2>0$, $i=1,2$ – заданные числа.

<u>***Замечание.***</u>

1. Если $\beta_1=\beta_2=0 \Rightarrow \quad \alpha_1$ и $\alpha_2 \neq 0$, то получаем *первую краевую задачу*; если $\alpha_1=\alpha_2=0$, то получаем *вторую краевую задачу.*

2. Наряду с задачей (8.1)–(8.2) рассматриваем также однородную задачу (8.1′)–(8.2), т.е.

$$l(y)=0, \tag{8.1′}$$

где (8.1′) определяется условиями $\lambda=0, f \equiv 0$.

***<u>Определение 8.1.</u>*** Функцией Грина $G(x,\xi)$ задачи (8.1)–(8.2) называется заданная на $Q=[a;b]\times[a;b]$ функция, удовлетворяющая условиям:

1) $G(x,\xi)\in C(Q)$ – непрерывная на $Q$ функция;

2) $\forall\xi\in(a;b)\Rightarrow$ на $[a,\xi)$ и на $(\xi;b]$ функция $G(x,\xi)$ имеет непрерывные производные первого порядка по переменной $x$ и при этом выполняется условие «скачка» первой производной:

$$G_x^{'}(x,x-0)-G_x^{'}(x,x+0)=-1/\,p(x)\,;$$

3) на $[a,\xi)$ и $(\xi;b]$ $G(x,\xi)$ удовлетворяет по $x$ уравнению (8.1′);

4) по $x$ функция $G(x,\xi)$ удовлетворяет краевым условиям (8.2).

***<u>Теорема 8.1 (о существовании функции Грина).</u>*** Если задача (8.1′)–(8.2) имеет только нулевое решение, то существует функция Грина $G(x,\xi)$ задачи (8.1)–(8.2).

*<u>Доказательство.</u>* Пусть $\{y_i(x)\}_{i=1}^{2}$ – фундаментальная система решений (ФСР) уравнения (8.1′).

Тогда $G(x,\xi)=\begin{cases}a_1(\xi)y_1(x)+a_2(\xi)y_2(x), & a\le x\le\xi;\\ b_1(\xi)y_1(x)+b_2(\xi)y_2(x), & \xi<x\le b.\end{cases}$

Из условия *непрерывности* $G(x,\xi)$ при $x=\xi$ получаем:

$$[a_1(x)y_1(x)+a_2(x)y_2(x)]-[b_1(x)y_1(x)+b_2(x)y_2(x)]=0,$$

а из условия «*скачка*»:

$$-[b_1(x)y'_1(x)+b_2(x)y'_2(x)]+[a_1(x)y'_1(x)+a_2(x)y'_2(x)]=1/\,p(x),$$

т.е. получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}(a_1-b_1)y_1(x)+(a_2-b_2)y_2(x)=0;\\ (a_1-b_1)y'_1(x)+(a_2-b_2)y'_2(x)=1/\,p(x).\end{cases}\qquad(8.3)$$

Главный определитель $\Delta$ этой системы является определителем Вронского: $\Delta=W[y_1(x),y_2(x)]\ne0\quad\forall x\in[a;b]$, поэтому разности $(a_i-b_i),\ i=1,2$, однозначно вычисляется по формулам Крамера:

$$a_1(x)-b_1(x)=\frac{-y_2(x)}{p(x)W(x)},\quad a_2(x)-b_2(x)=\frac{y_1(x)}{p(x)W(x)}.$$

Теперь воспользуемся краевыми условиями:

$$\begin{cases}\alpha_1(a_1(\xi)y_1(a)+a_2(\xi)y_2(a))+\beta_1(a_1(\xi)y'_1(a)+a_2(\xi)y'_2(a)=0;\\ \alpha_2(b_1(\xi)y_1(b)+b_2(\xi)y_2(b))+\beta_2(b_1(\xi)y'_1(b)+b_2(\xi)y'_2(b))=0.\end{cases}.$$

Перепишем эту систему в виде:

$$\begin{cases}a_1(\xi)(\alpha_1 y_1(a)+\beta_1 y'_1(a))+a_2(\xi)(\alpha_1 y_2(a)+\beta_1 y'_2(a))=0;\\ a_1(\xi)(\alpha_2 y_1(b)+\beta_2 y'_1(b))+a_2(\xi)(\alpha_2 y_2(b)+\beta_2 y'_2(b))=\\ =(a_1(\xi)-b_1(\xi))(\alpha_2 y_1(b)+\beta_2 y_1(b))+\\ +(a_2(\xi)-b_2(\xi))(\alpha_2 y'_2(b)+\beta_2 y'_2(b))\end{cases} \qquad (8.4)$$

и рассмотрим главный определитель этой системы:

$$\Delta=\det\begin{pmatrix}\alpha_1 y_1(a)+\beta_1 y'_1(a) & \alpha_1 y_2(a)+\beta_1 y'_2(a)\\ \alpha_2 y_1(b)+\beta_2 y'_1(b) & \alpha_2 y_2(b)+\beta_2 y'_2(b)\end{pmatrix}.$$

Если $\Delta=0$, то столбцы определителя пропорциональны, и, следовательно, существуют постоянные $C_1, C_2$ ($C_1^2+C_2^2\neq 0$), такие, что:

$$\begin{cases}\alpha_1(C_1 y_1(a)+C_2 y_2(a))+\beta_1(C_1 y'_1(a)+C_2 y'_2(a))=0;\\ \alpha_2(C_1 y_1(b)+C_2 y_2(b))+\beta_2(C_1 y'_1(b)+C_2 y'_2(b))=0.\end{cases}.$$

Рассмотрим $y(x)=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)$. Тогда $y(x)$ − решение однородной задачи (8.1´)–(8.2). По условию получаем $y(x)\equiv 0$; это противоречит тому, что $\{y_i(x)\}_{i=1}^2$ – ФСР для уравнения (8.1´). Противоречие показывает, что столбцы не пропорциональны и $\Delta\neq 0$. Но тогда из (8.4) однозначно находим $a_i(\xi)$, $i=1,\ 2$, и по известным разностям $(a_i-b_i)$, $i=1,\ 2$, находим все компоненты $a_i(\xi)$, $b_i(\xi)$, $i=1,2$, а с ними находим *однозначно* функцию Грина. Тем самым теорема доказана.

***<u>Замечание.</u>*** Указанное определение и построение функции $G(x,\xi)$ сохраняются и для более общих операторов и краевых условий.

***<u>Теорема 8.2 (Гильберта).</u>*** Если задача (8.1´)–(8.2) имеет только нулевое решение, то задача (8.1)–(8.2) при $\lambda=0$ однозначно разрешима для $\forall f(x)\in C[a;b]$ и это решение задается формулой

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi\,, \qquad (8.5)$$

Если же $\lambda\neq 0$, то задача (8.1)–(8.2) эквивалентна интегральному уравнению:

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi+F(x)\,, \qquad (8.6)$$

где $F(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$.

<u>*Доказательство.*</u> 1. Пусть $\lambda=0$. Рассмотрим $y(x)$, определяемую равенством (8.5), и покажем, что это – решение задачи (8.1)–(8.2).

Отметим сразу, что так как $G(x,\xi)\in C(Q)$, а $G'_x(x,\xi)$ непрерывна на $[a,\xi)$ и на $(\xi;b]$, то, следовательно, по теореме о непрерывности интеграла по параметру получаем, что $y(x)$ удовлетворяет краевым условиям (8.2). Далее $\forall x\in(a;b)$ справедливы равенства

$$y(x)=\int_a^x G(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_x^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi;$$

$$y'(x)=\int_a^x G'_x(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_x^b G'_x(x,\xi)f(\xi)d\xi+$$
$$+(G(x,x-0)-G(x,x+0))f(x)=$$
$$=\int_a^x G'_x(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_x^b G'_x(x,\xi)f(\xi)d\xi\,;$$

$$y''(x)=\int_a^x G''_{xx}(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_x^b G''_{xx}(x,\xi)f(\xi)d\xi+$$
$$+(G'_x(x,x-0)-G'_x(x,x+0))f(x).$$

Умножая $y''(x)$ на $(-p(x))$, $y'(x)$ на $(-p'(x))$, $y(x)$ на $q(x)$ и пользуясь условием скачка, получаем:

$l(y)=\int_a^b l_x(G(x,\xi))f(\xi)d\xi+f(x)$, а так как $l_x(G(x,\xi))=0,\ (x\neq\xi)$,

то $l(y)=f(x)$ на $[a+\varepsilon;b-\varepsilon]\Rightarrow(a;b)$.

2. Теперь, переобозначив $\lambda y(x)+f(x)\leftrightarrow f(x)$ и применив доказанное в п. 1, получаем уравнение (8.6). Обратно проделывая выкладки с равенством (8.6), получаем, что (8.6) эквивалентно задаче (8.1)–(8.2).

<u>*Упражнение.*</u> Построив функцию Грина, записать решение задачи:

$$\begin{cases} y''(x)=f(x); \\ y(0)=0,\ y(0)+y'(1)=0. \end{cases}$$

## <u>*8.2. Задача Штурма–Лиувилля*</u>

Рассмотрим задачу (8.1)–(8.2) с $f(x)\equiv 0$ на $[a;b]$, т.е. задачу:

$$\begin{cases} l(y)=-(p(x)y'(x))'+q(x)y(x)=\lambda y(x); & (8.1'') \\ \alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=0,\ \ \alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=0. & (8.2) \end{cases}$$

<u>***Определение 8.2.***</u> Задача: найти все такие $\lambda\in C$, при которых задача (8.1")–(8.2) имеет нетривиальные решения, называется *задачей Штурма–Лиувилля.*

<u>***Теорема 8.3 (об эквивалентности).***</u> Если задача (8.1´)–(8.2) *имеет только нулевое решение*, то задача Штурма–Лиувилля (8.1´´)–(8.2) эквивалентна *интегральному уравнению с непрерывным ядром* $G(x,\xi)$:

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)y(\xi)d\xi\,, \qquad (8.5)$$

где $G(x,\xi)$ - функция Грина задачи (8.1)–(8.2).

<u>*Доказательство.*</u> Доказательство буквально уже получено в теореме Гильберта.

<u>***Теорема 8.4 (о симметричности функции Грина).***</u> Для задачи (8.1)–(8.2) $G(x,\xi)=G(\xi,x)$.

<u>*Доказательство.*</u> $G(x,\xi)$ – ядро *обратного* оператора к оператору задачи (8.1)–(8.2). Поэтому достаточно проверить, что оператор задачи (8.1)–(8.2) является симметричным. Для любых функций $y(x)$ и $z(x)$, таких, что $y(x),z(x)\in C^2(a;b)\cap C^1[a;b]$ и удовлетворяющим условиям (8.2), выполняется:

$$\int_a^b [-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x)]z(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} [-(p(x)y'(x))'z(x)dx + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} q(x)y(x)z(x)dx\right] =$$

$$= -p(x)[y'(x)z(x) - z'(x)y(x)]\Big|_a^b +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} y(x)[-(p(x)z'(x))' + q(x)z(x)dx\right].$$

Проверим, что $y'(b)z(b) - z'(b)y(b) = 0$ (и, аналогично, при $x = a$). Это следует из краевых условий:

$$\begin{cases} \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0; \\ \alpha_2 z(b) + \beta_2 z'(b) = 0 \end{cases}$$

при $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$, следовательно, определитель системы равен нулю:

$$\det\begin{pmatrix} y(b) & y'(b) \\ z(b) & z'(b) \end{pmatrix} = 0,$$

что и требуется.

Таким образом, оператор задачи (8.1)–(8.2) *симметричен*, а так как $(L^{-1})^* = (L^*)^{-1}$, то и обратный оператор симметричен, а тогда и его ядро также *симметричная функция*.

***<u>Теорема 8.5 (о собственных значения и собственных функциях задачи Штурма–Лиувилля).</u>*** 1. Множество собственных значений задачи (8.1)–(8.2) не пусто, не более, чем счетно, не имеет конечных предельных точек. Собственные числа вещественны. Собственные числа – простые. 2. Собственные функции задачи (8.1)–(8.2) ортогональны.

*<u>Доказательство.</u>* Все свойства, кроме простоты, собственных чисел следуют из общих свойств интегрального оператора с непрерывным симметричным ядром. Докажем простоту собственных чисел. Если $\lambda$ − собственное число и $y_1(x), y_2(x)$ − две, отвечающие этому $\lambda$, собственные функции, то

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) = 0; \\ \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) = 0 \end{cases} \quad \text{при} \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0.$$

Отсюда определитель Вронского $W[y_1(a), y_2(a)] = 0$, следовательно, $y_1(x), y_2(x)$ − зависимые функции на $[a;b]$, т.е. $\lambda$ − простое собственное число.

***<u>Теорема 8.6 (Стеклова).</u>*** Пусть $F(x) \in C^2(a;b) \cap C^1[a;b]$ и удовлетворяет условиям (8.2). Тогда $F(x)$ раскладывается в равномерно и абсолютно сходящийся на $[a;b]$ ряд по собственным функциям задачи (8.1)–(8.2).

*<u>Доказательство.</u>* Пусть $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ − максимальная ортонормированная система (ОНС) собственных функций задачи (8.1)–(8.2), отвечающих собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, и $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда $F(x)$ является решением задачи (8.1)–(8.2) с $f(x) = l(F)$, $l(x) \in C[a;b]$. Из теоремы Гильберта следует:

$$F(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi,$$

т.е. $F(x)$ – истокообразно представима через непрерывное, симметричное ядро $G(x,\xi)$. Но тогда по теореме Гильберта ряд

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (F, y_k) y_k(x)$$

сходится равномерно и абсолютно на $[a;b]$.

***<u>Теорема 8.7.</u>*** Рассмотрим условие (8.2) вида:

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) - \beta_1 y'(a) = 0; \\ \alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0, \end{cases} \quad \alpha_i, \beta_i \ge 0, \quad \alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0. \qquad (8.2^*)$$

Тогда задача (8.1´)–(8.2*) имеет только тривиальное решение, за исключением случая $q(x) \equiv 0$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

*<u>Доказательство</u>.* Если $y(x) \in C^2(a;b) \cap C^1[a;b]$ − решение задачи (8.1´)–(8.2*), то

$$0 = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[ \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} [-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x)] y(x) dx \right] =$$

$$= \int_a^b [(p(x)(y'(x)^2) + q(x)y^2(x)] dx - p(x)y'(x)y(x)\Big|_a^b.$$

Из (8.2*) следует, что $p(a)y(a)y'(a) - p(b)y(b)y'(b) \ge 0$. Следовательно, $y(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [a;b]$. Теорема доказана.

# II. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

## § 9. Линейные нормированные пространства

### ***9.1. Основные определения***

***Определение 9.1***. Пусть $X$ – некоторое линейное пространство над полем $K$ (здесь, как правило, $K = R$; иногда $K = C$) и пусть $\forall f \in X$ поставлено в соответствие действительное число $\|f\|$, удовлетворяющее свойствам:

1) $\forall f \in X \Rightarrow \|f\| \geq 0$, причем $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = \theta$ в $X$;

2) $\forall \alpha \in K \Rightarrow \|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|$;

3) $\forall f,\ g \in X \Rightarrow \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (неравенство треугольника).

Тогда это число $\|f\|$ называется *нормой элемента* $f$ в $X$, а пространство $X$ с этой нормой – *нормированным пространством*; обозначение $(X,\ \|\cdot\|)$.

***Примеры.***

***9.1.*** $X = \{$множество функций, непрерывных на $[a,\ b]\}$, $\forall f \in X \Rightarrow \|f\| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Тогда $(X,\ \|\cdot\|) = C[a;b]$ – нормированное пространство.

***9.2.*** $C^k[a,b] = \Big\{ f:\ \forall 0 \leq n \leq k \Rightarrow \exists f^{(n)}(x) \in C[a,b];$

$$\|f\|_{C^k[a,b]} = \max_{1 \leq n \leq k} \left\| f^{(k)} \right\|_{C^k[a,b]} \Big\}.$$

***9.3.*** $C^n(G)$, где $G$ – некоторое подмножество (открытое) в $R^m$, – это пространство функций, имеющих на $G$ непрерывные производные $D^\alpha f$ с $|\alpha| \leq n$ и $\|f\|_{C^n[G]} = \max\limits_{0 < |\alpha| \leq n} \sup\limits_{x \in G} \left| D^\alpha f(x) \right|$.

***Определение 9.2.*** Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (X, \|\cdot\|)$ называется: 1) *фундаментальной* в $X$, если $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N(\varepsilon)$:

$$\forall n,\ m > N(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \varepsilon;$$

2) *сходящейся к* $f \in X$, если $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N(\varepsilon)$:

$$\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon \text{. Обозначение } f \overset{X}{=} \lim_{n\to\infty} f_n .$$

Очевидно, что:

1) если $f_n \to f$ в $X$, то $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ограничена* в $X$, т.е. $\exists M:\ \forall n \Rightarrow \|f_n\| < M$;

2) если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n \overset{X}{=} f$, то он – *единственный*.

***<u>Определение 9.3.</u>*** Нормированное пространство $(X,\ \|\cdot\|)$ называется *полным*, если любая фундаментальная в $X$ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел $f \in X$.

***<u>Определение 9.4.</u>*** Полное нормированное пространство называется *банаховым*.

***<u>Утверждение 9.1.</u>*** Пространства $C[a,b]$, $C^k[a,b]$ – банаховы пространства.

*Упражнение*. Провести доказательство утверждения 9.1.

## ***<u>9.2. Евклидовы пространства</u>***

***<u>Определение 9.5</u>***. Линейное пространство $X$ называется *евклидовым* (над полем $K = C$), если каждой паре $f,\ g \in X$ поставлено в соответствие число $(f,g) \in C$, удовлетворяющее условиям:

1) $\forall f \in X \Rightarrow (f,f) \geq 0$, причем $(f,f) = 0 \Leftrightarrow f = \theta$ в $X$;

2) $(f,g) = \left(\overline{g,f}\right)$;

3) $\forall \alpha, \beta \in C \Rightarrow (\alpha f_1 + \beta f_2, g) = \alpha(f_1, g) + \beta(f_2, g)$.

***<u>Утверждение 9.2.</u>*** Всякое евклидово пространство является нормированным с нормой

$$\|f\| = (f,f)^{1/2}.$$

<u>*Доказательство.*</u> 1. Очевидно, что $\|f\| \overset{\text{def.}}{=} (f,f)^{1/2}$ удовлетворяет первым двум аксиомам нормы.

2. Докажем неравенство Коши–Буняковского–Шварца

$$|(f,g)| \le (f,f)^{1/2}(g,g)^{1/2} = \|f\|\cdot\|g\|.$$

Выберем угол φ так, чтобы $(f,g) = |(f,g)|\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, и рассмотрим $\lambda = t\mathrm{e}^{i\varphi}$, где $t \in R$. Тогда:

$$0 \le (f+\lambda g, f+\lambda g) = \|f\|^2 + \lambda(g,f) + \overline{\lambda}(f,g) + \lambda\overline{\lambda}\|g\|^2 =$$
$$= \|f\|^2 + 2t|(f,g)| + t^2\|g\|^2.$$

Но тогда $D/4 = |(f,g)|^2 - \|f\|^2\cdot\|g\|^2 \le 0$, т.е. получили нужное неравенство: $|(f,g)| \le \|f\|\cdot\|g\|$.

3. Теперь установим выполнение неравенства треугольника. Имеем:

$$\|f+g\|^2 = (f+g, f+g) = \|f\|^2 + (f,g) + \left(\overline{f,g}\right) + \|g\|^2 =$$
$$= \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f,g) \le \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2|(f,g)| \le$$
$$\le \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\|\cdot\|g\| = (\|f\| + \|g\|)^2.$$

Отсюда $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$ и таким образом выполнено и третья аксиома нормы.

***<u>Утверждение 9.3.</u>***

1. Скалярное произведение – непрерывная в $X \times X$ функция.
2. Скалярное произведение – счетно-аддитивная функция.

<u>*Доказательство.*</u> 1. Если $f_n \to f$, $g_m \to g$ в $X$, то

$$|(f_n, g_m) - (f,g)| = |(f_n - f, g_m) + (f, g_m - g)| \le$$
$$\le |(f_n - f; g_m)| + |(f, g_m - g)| \le \|f_n - f\|\cdot\|g_m\| +$$
$$+ \|f\|\|g_m - g\| \to 0 \text{ при } m,n \to +\infty.$$

3. Если $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$, т.е. $\left\|g - \sum_{k=1}^{n} g_k\right\| \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f, g_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(f, g_k) = \lim_{n\to\infty}\left(f, \sum_{k=1}^{n} g_k\right),$$

откуда

$$\left|(f,g)-\sum_{k=1}^{\infty}(f,g_k)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(f,g-\sum_{k=1}^{n}g_k\right)\right|\le$$

$$\le\|f\|\cdot\lim_{n\to\infty}\left\|g-\sum_{k=1}^{n}g_k\right\|=0.$$

Таким образом,

$$\left(f,\sum_{k=1}^{\infty}g_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}(f,g_k).$$

***<u>Определение 9.6.</u>*** Полное евклидово пространство называется *гильбертовым пространством*. Обозначаем далее буквой $E$.

***<u>Примеры.</u>***

***<u>9.4.</u>*** $CL_2[a,b]=\left\{f\in C[a,b],\ \text{с нормой}\ \|f\|_{CL_2}=\left(\int_a^b|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\right\}.$

Норма в $CL_2[a,b]$ порождается скалярным произведением

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

***<u>9.5.</u>*** $l^2=\left\{x:x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots):\|x\|_{l^2}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{1/2}\right\}.$

Скалярное произведение в $l_2$ определяется равенством:

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\,\overline{y}_k.$$

***<u>Утверждение 9.4.</u>*** Пространство $CL_2[a,b]$ не является полным. Пространство $l_2$ – полное евклидово (гильбертово).

*<u>Упражнение</u>*. Провести доказательство утверждения 9.4.

## § 10. Ряды Фурье по ортогональным системам в евклидовых пространствах

### ***10.1. Основные определения***

***Определение 10.1.*** Система элементов $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \subset X$ называется *линейно независимой в X*, если $\forall f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \ldots, f_{\alpha_m}$ равенство $C_1 f_{\alpha_1} + \ldots + C_m f_{\alpha_m} = \theta$ возможно тогда и только тогда, когда $C_1 = C_2 = \ldots = C_m = 0$.

***Определение 10.2.*** Система элементов $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ называется:

1) *всюду плотной* в *X*, если

$$\forall(\varepsilon > 0, f \in X) \Rightarrow \exists f_\alpha \in \{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} : \|f_\alpha - f\| < \varepsilon;$$

2) *линейно плотной в X*, если $\forall(f \in X,\ \varepsilon > 0) \Rightarrow \exists\left(f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_m};\right.$ $\left.C_1, \ldots, C_m\right)$: $\left\|f - \sum_{k=1}^{m} C_k d_{\alpha_k}\right\| < \varepsilon$ (т.е. в *X* всюду плотная оболочка, натянутая на $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$).

***Определение 10.3.*** Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} C_k f_k$ называется *сходящимся в X к f*, если $\left\|f - \sum_{k=1}^{n} C_k f_k\right\| \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае $f$ – *сумма* ряда.

***Определение 10.4.*** Система (не более чем *счетная*) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *базисом* в *X*, если $\forall f \in X \Rightarrow f = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e_k$ и это представление единственно.

***Определение 10.5.*** Система $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ называется *ортогональной* (ОС) в евклидовом пространстве *E*, если $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}\right) = 0$ при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и *ортонормированной* (ОНС), если $\left(f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}\right) = \delta_{\alpha_1\alpha_2}$.

***<u>Определение 10.6.</u>*** Базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $E$ называется *ортонормированным базисом* (ОНБ), если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – базис и ОНС.

***<u>Определение 10.7.</u>*** Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНС в $E$. Для $\forall f \in E$ положим $\alpha_k = (f, e_k)$ и поставим в соответствие элементу $f \in E$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k .$$

Тогда – это *ряд Фурье* функции $f$ по ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $(f, e_k)$ – *коэффициенты Фурье*.

***<u>Утверждение 10.1 (единственность ряда по ОНС).</u>*** Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНС и $f \overset{E}{=} \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, то $c_k = (f, e_k)$, т.е. этот ряд – ряд Фурье функции $f$ по ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

<u>*Доказательство.*</u> Используя единственность скалярного произведения, получаем

$$\forall f \Rightarrow (f, e_k) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} (c_i e_i), e_k \right) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i (e_i, e_m) = c_k .$$

## ***<u>10.2. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя</u>***

***<u>Теорема 10.1 (минимальное свойство коэффициентов Фурье).</u>*** Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНС в $E$, $f \in E$, то

$$\min_{\bar{\beta}} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|,$$

где $\alpha_k = (f, e_k)$, а минимум слева берется по всевозможным наборам $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

<u>*Доказательство.*</u> Распишем квадрат нормы:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|^2 = \left( f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k, f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right) =$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \overline{(f, e_k)} - \sum_{k=1}^{n} \overline{\beta}_k (f, e_k) =$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} \left( \alpha_k \overline{\beta}_k + \overline{\alpha}_k \beta_k \right) =$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\beta_k - \alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2,$$

так как $|\beta_k - \alpha_k|^2 = (\overline{\beta}_k - \overline{\alpha}_k)(\beta_k - \alpha_k) = |\beta_k|^2 + |\alpha_k|^2 - \overline{\beta}_k \alpha_k - \beta_k \overline{\alpha}_k$. Отсюда

$$\inf_{\overline{\beta}} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \qquad (10.1)$$

и инфимум достигается при $\beta_k = \alpha_k = (f, e_k)$.

***<u>Следствие (неравенство Бесселя).</u>*** Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНС в *E*, то

$$\forall f \in E \Rightarrow \exists \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 \le \|f\|^2.$$

***<u>Замечание.</u>*** Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – такая ОНС, что $\forall f \in E \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 = \|f\|^2$, то это называют *равенством Парсеваля*.

## ***<u>10.3. Критерий базисности ОНС в E</u>***

***<u>Теорема 10 2.</u>*** Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНС в *E*, то следующие условия равносильны.

1. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНБ в $E$.

2. $\forall f \in E \Rightarrow \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2$, т.е. справедливо равенство Парсеваля.

3. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – линейно плотная в $E$ система.

4. $\forall (f \in E:\ (f, e_k) = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots) \Rightarrow f = \theta$.

<u>*Доказательство.*</u> Проведем по схеме: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$.

$1 \to 2$. Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНБ в $E$, то $\forall f \in E \Rightarrow f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$, а тогда

$$\|f\|^2 = \left( \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k,\ \sum_{m=1}^{\infty} (f, e_m) e_m \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) \left( e_k,\ \sum_{m=1}^{\infty} (f, e_m) e_m \right) = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 .$$

$2 \to 3$. Пусть $c_k = (f, e_k)$. Тогда

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 \to 0 ,$$

так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится. Таким образом, в $E$ линейно плотна система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

$3 \to 4$. По условию: $\forall (\varepsilon > 0, f \in E) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \left( c_{k_1}, \ldots, c_{k_n}; e_{k_1}, \ldots, e_{k_n} \right) : \left\| f - \sum_{p=1}^{n} c_{k_p} e_{k_p} \right\|^2 < \varepsilon .$$

Пусть $N = k_n$, дополним $c_{k_1}, \ldots, c_{k_n}$ до $c_1, \ldots, c_N$ нулями и получим:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k \right\| < \varepsilon .$$

Но тогда по минимальному свойству коэффициентов Фурье и подавно

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} \left(f, e_k\right) e_k \right\| < \varepsilon .$$

Отсюда, если $\forall k \Rightarrow \left(f, e_k\right) = 0$, то $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \|f\| < \varepsilon$, т.е. $\|f\| = 0 \Rightarrow f = \theta$.

$4 \to 1$. Пусть $f \in E$ – любой элемент. Положим $g = f - \sum_{k=1}^{\infty} \left(f, e_k\right) e_k$. Тогда, используя счетную аддитивность скалярного произведения, имеем: $\forall m \Rightarrow \left(g, e_m\right) = \left(f, e_m\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(f, e_k\right)\left(e_k, e_m\right) = \left(f, e_m\right) - \left(f, e_m\right) = 0$. Отсюда по условию $g = \theta$, т.е. $\forall f \in E \Rightarrow f = \sum_{k=1}^{\infty} \left(f, e_k\right) e_k$. Так как $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНС, то это разложение единственно. Следовательно, $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНБ.

***<u>Замечание.</u>*** Если $\left\{\varphi_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ – ОС, но не нормированная, то $\left\{\dfrac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|}\right\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНС и, следовательно, ряд Фурье функции $f \in E$ по ОС $\left\{\varphi_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ имеет вид $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\|\varphi_k\|^2} \left(f, \varphi_k\right) \varphi_k$.

## § 11. Линейные операторы в линейных нормированных пространствах

### ***<u>11.1. Основные определения и свойства</u>***

***<u>Определение 11.1.</u>*** Пусть $\left(X, \|\cdot\|_X\right)$ и $\left(Y, \|\cdot\|_Y\right)$ – два нормированных пространства. Отображение $\hat{A}$ множества $D\left(\hat{A}\right) \subseteq X$ в $Y$,

ставящее в соответствие каждому элементу $x \in D\left(\hat{A}\right)$ единственный элемент $\hat{A}(x) = y \in Y$, называется *оператором* с областью определения $D\left(\hat{A}\right) \subseteq X$ и множеством значений $E\left(\hat{A}\right) \subseteq Y$.

***<u>Определение 11.2</u>***. Оператор $\hat{A} : X \to Y$ называется *ограниченным*, если:

1) $D\left(\hat{A}\right) = X$;

2) $\exists C > 0 : \ \forall x \in X \Rightarrow \left\|\hat{A}(x)\right\|_Y \le C\|x\|_X$.

***<u>Определение 11.3.</u>*** Если $\hat{A} : X \to Y$ – ограниченный оператор, то число

$$\left\|\hat{A}\right\|_{X \to Y} = \sup_{X \ne \theta} \frac{\left\|\hat{A}(x)\right\|_Y}{\|x\|_X}$$

называется *нормой* оператора *A*.

***<u>Определение 11.4.</u>*** Оператор $\hat{A} : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in D\left(\hat{A}\right)$, если

$$\forall\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \ \|x_n - x_0\|_X \to 0\right) \Rightarrow \ \left\|\hat{A}(x_n) - \hat{A}(x_0)\right\|_Y \to 0, \quad n \to \infty .$$

Оператор, непрерывный в каждой точке множества $M \subseteq D\left(\hat{A}\right)$, называется *непрерывным на M.*

***<u>Определение 11.5.</u>*** Оператор $\hat{A} : X \to Y$ называется *линейным*, если:

1) $D\left(\hat{A}\right) \subseteq X$ – линейное подпространство в *X*;

2) $\forall x_1, x_2 \in D\left(\hat{A}\right), \ \forall C_1, C_2 \in K \Rightarrow \hat{A}\left(C_1 x_1 + C_2 x_2\right) = c_1 \hat{A} x_1 + c_2 \hat{A} x_2$.

***<u>Замечание.</u>*** Если $\hat{A}$ – линейный оператор, то обычно пишут $\hat{A}(x) = \hat{A}x$.

***<u>Утверждение 11.1.</u>*** Если $\hat{A} : X \to Y$ – *линейный*, $D\left(\hat{A}\right) = X$, то он *ограничен* тогда и только тогда, когда он *непрерывен на X.*

*Доказательство.* 1. Если $A$ линеен и ограничен, то

$$\forall\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X:\ \|x_n-x_0\|_X\to 0\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\|\hat{A}x_n-\hat{A}x_0\right\|_X=\left\|\hat{A}\left(x_n-x_0\right)\right\|_Y\le C\|x_n-x_0\|_X\to 0,$$

т.е. он непрерывен в любой точке $x_0\in X$.

2. Допустим, что $A$ линеен и непрерывен на $X$, но *не ограничен*:

$$\forall n\Rightarrow\exists x_n\in X:\ x_n\ne\theta\ \text{ и }\ \left\|\hat{A}x_n\right\|_Y\ge n\|x_n\|_X.$$

Отсюда $\left\|\hat{A}\dfrac{x_n}{n\|x_n\|_X}\right\|_Y\ge 1$. С другой стороны, так как $\left\|\dfrac{x_n}{n\|x_n\|_X}-\theta\right\|_X=\dfrac{1}{n}\to 0$, а $\hat{A}\theta_x=\theta_y$, то $\left\|\hat{A}\dfrac{x_n}{n\|x_n\|_X}-\hat{A}\theta\right\|_Y\to 0$ в силу непрерывности $\hat{A}$ в точке θ. Пришли к противоречию, которое доказывает, что оператор $\hat{A}$ ограничен.

***Определение 11.6.*** Множество $M\subset X$ называется *относительно компактным* в $X$, если $\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq M\Rightarrow$ из $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить фундаментальную по норме $X$ последовательность.

Далее рассматриваем *линейные* операторы.

***Определение 11.7.*** Оператор $\hat{A}:X\to Y$ называется *вполне непрерывным* (или *компактным*), если $D\left(\hat{A}\right)=X$ и он переводит всякое ограниченное в $X$ множество в множество, относительно компактное в $X$.

***Утверждение 11.2.*** Если оператор $\hat{A}$ вполне непрерывен, то он ограничен. *Обратное неверно.*

*Доказательство.* 1. Сначала докажем, что всякое относительно компактное в $Y$ множество $N$ ограничено в $Y$. Допустим противное. Тогда берем $y_1\in N\Rightarrow$

$$\exists y_2\in N:\ \|y_2-y_1\|_Y\ge 1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, y_3 \in N:\ \|y_3 - y_1\|_Y \ge 1,\ \|y_3 - y_2\|_Y \ge 1 \Rightarrow$$

. . . ,

$$\Rightarrow \exists\, y_n \in N:\ \|y_n - y_1\|_Y \ge 1, \ldots, \|y_n - y_{n-1}\|_Y \ge 1 \ \text{ и т.д.}$$

Таким образом, построена последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$, из которой *нельзя выделить* сходящуюся подпоследовательность. Но это противоречит относительной компактности *N*.

Если теперь $K_1 = \{x \in X:\ \|x\|_X \le 1\}$ – единичный шар в *X*, то $\hat{A}K_1 = N \subset Y$ – относительно компактное, а значит, и ограниченное, в *Y* множество. Но тогда:

$$\exists C > 0:\ \forall x \in K_1 \Rightarrow \|\hat{A}x\|_Y \le C \ \text{, т.е. } \forall x \in X\ ,$$

$$\|\hat{A}x\|_Y \le C\|x\| \ \Rightarrow\ \hat{A} \text{ ограничен.}$$

2. Пусть $X = Y$, $\hat{A} = \hat{I}$ – тождественный оператор. Тогда $\hat{I}$ очевидно ограничен, но не компактен.

## ***11.2. Основные примеры***

Пусть $G \subseteq R^n$ – некоторое множество и $D(\hat{K})$ – множество всех функций *f*, определенных на *G*, для которых при $\forall t \in G$ существует (хотя бы как несобственный) интеграл:

$$\left(\hat{K} f\right)(t) = \int_G K(t,\tau) f(\tau)\, d\tau. \qquad (11.1)$$

Тогда на $D(\hat{K})$ задан *оператор Фредгольма с ядром* $\hat{K}(t,\tau)$.

Аналогично, если для $\forall f \in D(\hat{K})$ и любого $t \in [a,b]$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, определен оператор

$$\left(\hat{k} f\right)(t) = \int_a^t k(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad (11.2)$$

то на множестве $D(\hat{k})$ задан оператор *Вольтерра* $\hat{k}$ *с ядром* $k(t,\tau)$.

***<u>Утверждение 11.3.</u>*** Пусть $G$ – ограниченное, измеримое множество ($[a,b]$ – отрезок), ядро $K(t,\tau)\in C\left(\overline{G}\times\overline{G}\right)$ $\left(k(t,\tau)\in C([a,b]\times[a,b])\right)$, то операторы $\hat{K}$ и $\hat{k}$ являются *линейными*, *ограниченными* операторами в пространствах $C(G)$ и $C[a,b]$ соответственно.

*<u>Доказательство.</u>* Линейность операторов очевидна. То, что $\forall f\in C(G)$ $(\forall f\in C[a,b])\Rightarrow \hat{K}f\in C(G)$ $\left(\hat{k}f\in C[a,b]\right)$, следует из теоремы о непрерывности собственного интеграла по параметру. Наконец, ограниченность операторов (11.1) и (11.2) в этом случае следует из оценок:

$$\left\|\hat{K}f\right\|_{C(G)}=\sup_{t\in G}\left|\int_G K(t,\tau)f(\tau)d\tau\right|\le$$

$$\le\sup_{t,\tau\in G}|K(t,\tau)|\cdot\sup_{\tau\in G}|f(\tau)|\mu(G)=C\|f\|_{C(G)},$$

$$\left\|\hat{k}f\right\|_{C[a,b]}\le\sup_{t,\tau\in[a,b]}|k(t,\tau)|\sup_{\tau\in[a,b]}|f(\tau)|(b-a)=C\|f\|_{C[a,b]}.$$

Напомним следующую теорему.

***<u>Теорема Арцела.</u>*** Множество $M$ относительно компактно в $C(G)$ *тогда и только тогда*, когда:

1) множество $M$ *равномерно ограничено в* $C(G)$, т.е. $\exists C>0$: $\forall f\in M\Rightarrow\|f\|_{C(G)}\le C$;

2) множество $M$ *равностепенно непрерывно в* $C(G)$, т.е. $\forall\varepsilon>0\Rightarrow\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall\left(t_1,t_2\in G:\rho\left(t_1,t_2\right)<\delta\right)\Rightarrow\sup\limits_{f\in M}\left|f\left(t_1\right)-f\left(t_2\right)\right|<\varepsilon.$

*<u>Упражнение.</u>* Провести доказательство достаточности в теореме Арцелла.

***<u>Утверждение 11.4.</u>*** Операторы $\hat{K}$, $\hat{k}$ являются вполне непрерывными операторами в $C(G)$ и $C[a,b]$ соответственно, при выполнении требований утверждения 3.

*<u>Доказательство.</u>* Проведем доказательство для оператора $\hat{K}$. Пусть $X\subset C(G)$ – любое ограниченное множество, т.е. $\exists C_0>0$: $\forall f\in X\Rightarrow\|f\|_{C(G)}\le C_0$.

Обозначим $M = \hat{K}X$ и докажем, что $M$ – относительно компактное в $C(G)$ множество.

Воспользуемся теоремой Арцела. Имеем:

а) $\forall g = \hat{K} f \in M \Rightarrow$

$$\|g\|_{C(G)} = \left\|\hat{K}f\right\|_{C(G)} \le \sup_{t,\tau\in\overline{G}} |K(t,\tau)| \|f\|_{C(G)} \cdot \mu(G) \le$$

$$\le C_0 \mu(G) \sup_{t,\tau\in\overline{G}} |K(t,\tau)| = C,$$

т.е. $M$ – равномерно ограничено;

б) $$\sup_{g\in M} \left|g(t_1) - g(t_2)\right| = \sup_{f\in X} \left|\left(\hat{K}f\right)(t_1) - \left(\hat{K}f\right)(t_2)\right| \le$$

$$\le \sup_{f\in X} \int_G \left|K(t_1,\tau) - K(t_2,\tau)\right| \left|f(\tau)\right| d\tau .$$

Так как $K(t,\tau)$ равномерно непрерывная на $\overline{G}\times\overline{G}$ функция, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon > 0): \ \forall \left((t_1,\tau),(t_2,\tau): \rho(t_1;t_2) < \delta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|K(t_1,\tau) - K(t_2,\tau)\right| < \ \varepsilon / c_0 \mu(G) .$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$, выбираем $\delta(\varepsilon) > 0$. Тогда $\forall \left(t_1, t_2 \in G: \rho(t_1,t_2) < \delta\right) \Rightarrow \sup_{g\in M} \left|g(t_1) - g(t_2)\right| < \varepsilon$, т.е. множество $M$ равностепенно непрерывно. По теореме Арцела получаем, что $M$ относительно компактно, а тогда $\hat{K}$ вполне непрерывен в $C\left(\overline{G}\right)$.

<u>*Упражнение.*</u> Провести доказательство утверждения 2 для оператора $\hat{k}$.

## <u>*11.3. Интегральный оператор с полярным ядром*</u>

<u>***Определение 11.8.***</u> Ядро $K_\alpha(t,\tau) = \dfrac{K(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha}$, где $K(t,\tau) = C\left(\overline{G}\right)\times$ $\times C\left(\overline{G}\right)$, а $0 < \alpha < n$, называется *полярным ядром*. Здесь, как и ранее, $G \subseteq R^n$, а $|t-\tau| = \rho(t,\tau)$.

Далее рассмотрим оператор

$$\left(\hat{K}_\alpha f\right)(t)=\int\limits_G K_\alpha(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau\,. \qquad (11.3)$$

***<u>Утверждение 11.5.</u>*** Если $G$ – измеримое, ограниченное множество, то $\hat{K}_\alpha$ – линейный, вполне непрерывный оператор в $C(G)$.

*<u>Доказательство.</u>* 1. Пусть $X$ – любое ограниченное в $C(G)$ множество, т.е. $\exists C_0>0:\ \forall f\in X \Rightarrow\ \|f\|_{C(G)}\le C_0$. Тогда:

$$\sup_{f\in X}\sup_{t\in G}\left|\left(\hat{K}_\alpha f\right)(t)\right|\le\sup_{f\in X}\|f\|_{C(G)}\cdot\sup_{(t,\tau)\in\overline{G}}K(t,\tau)\cdot\sup_{t\in G}\int\limits_G\frac{d\tau}{|t-\tau|^\alpha}\le$$

$$\le C_1\sup_{t\in G}\int\limits_{K_{R_0}(t)}\frac{d\tau}{|t-\tau|^\alpha}=\{\textit{в сферических координатах}\ \tau=t+\eta\rho,\ \textit{где}$$

$$\eta=\left(\cos\alpha_1,\ldots,\cos\alpha_n\right)-\textit{единичная нормаль к сфере}\ S_{R_0}(t)\}=$$

$$=C_1\mu\left(S_1\right)\int\limits_0^{R_0}\frac{\rho^{n-1}}{\rho^\alpha}d_\rho=C_2<+\infty\,.$$

Здесь $K_{R_0}(t)$ – шар радиусом $R_0$ с центром в точке $t$, а $R_0$ выбрано так, чтобы $\overline{G}\subset K_{R_0}(t)$ при любом $t\in G$; $\mu\left(S_1\right)$ – площадь единичной сферы в $R^n$. Таким образом, множество $\hat{K}_\alpha X$ *равномерно ограничено* в $C(G)$.

2. Докажем равностепенную непрерывность $\hat{K}_\alpha X$ (и тем самым непрерывность любой функции $\left(\hat{K}_\alpha f\right)(t)$ в любой точке $t\in G$).

Имеем:

$$\forall\left(t_1,t_2\in G:\ \left|t_1-t_2\right|<\delta\right)\Rightarrow\sup_{f\in X}\left|\left(\hat{K}_\alpha f\right)(t_1)-\left(\hat{K}_\alpha f\right)(t_2)\right|\le$$

$$\le C_0\int\limits_G\left|\frac{K(t_1,\tau)}{|t_1-\tau|^\alpha}-\frac{K(t_2,\tau)}{|t_2-\tau|^\alpha}\right|d\tau=C_0\left[\int\limits_{K_{2\delta}(t_1)}+\int\limits_{G\setminus K_{2\delta}(t_1)}\right]=C_0\left(J_1+J_2\right).$$

Для $J_1$ получаем, положив $C_1 = \sup\limits_{t,\tau\in\overline{G}} |K(t,\tau)|$:

$$C_0 J_1 \le C_0 C_1 \left[ \int\limits_{K_{2\delta}(t_1)} \frac{d\tau}{|t_1-\tau|^\alpha} + \int\limits_{K_{2\delta}(t_1)} \frac{d\tau}{|t_2-\tau|^\alpha} \right] \le$$

$$\le 2C_0C_1 \int\limits_{K_{4\delta}(t_1)} \frac{d\tau}{|t_1-\tau|^\alpha} = 2C_0C_1\mu(S_1)\int\limits_0^{4\delta} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{\rho^\alpha} = 2C_0C_1\mu(S_1)\frac{(4\delta)^{n-\alpha}}{n-\alpha}.$$

Теперь задаем $\varepsilon > 0$ и подбираем $\delta_1(\varepsilon) > 0$ так, чтобы $2C_0C_1\mu(S_1)\frac{(4\delta_1)^{n-\alpha}}{n-\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}$. Фиксируем далее такое $\delta_1(\varepsilon) > 0$. Тогда функция $\frac{K(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha}$ равномерно непрерывна на множестве $\{(t,\tau)$: $t\in\overline{G},\ |t-\tau|\ge\delta_1\}$. Поэтому для выбранного $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\delta_2(\varepsilon) > 0$: $\forall(t_1,t_2\in G:\ |t_1-t_2|<\delta_2) \Rightarrow \left|\frac{K(t_1,\tau)}{|t_1-\tau|^\alpha} - \frac{K(t_2,\tau)}{|t_2-\tau|^\alpha}\right| < \frac{\varepsilon}{2C_0\mu(G)}$ сразу для $\forall(\tau:\ \min(|t_1-\tau|,|t_2-\tau|)\ge\delta_1)$. Поэтому и $C_0|J_2| < \varepsilon/2$, если $t_1,\ t_2:\ |t_1-t_2| < \delta(\varepsilon) = \min(\delta_1,\delta_2)$. Это означает, что

$$\forall\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\delta(\varepsilon) > 0:\ \forall(t_1,t_2\in G:\ |t_1-t_2|<\delta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{f\in X} \left|(\hat{K}_\alpha f)(t_1) - (\hat{K}_\alpha f)(t_2)\right| < \varepsilon,$$

т.е. множество $\hat{K}_\alpha X$ равностепенно непрерывно. Поэтому оператор $\hat{K}_\alpha$: $C(G)\to C(G)$ – вполне непрерывный оператор. Его линейность теперь очевидна.

***<u>Замечание.</u>*** Нам в дальнейшем понадобятся также интегральные операторы вида $(\hat{K}_\alpha f)(t) = \int\limits_S \frac{K(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha} f(\tau)\,dS_\tau$, где $S$ – граница ограниченной области $G$, $K(t,\tau)\in C(S\times S)$, $0<\alpha<n-1$. Параметри-

зацией поверхности $S$ сводим рассмотрение такого оператора к оператору утверждения 11.5.

## § 12. Интегральный оператор Фредгольма с вырожденным ядром в пространстве $C\left(\overline{G}\right)$

Здесь рассматриваем оператор

$$\left(\hat{K}y\right)(t)=\int_G K(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau \tag{12.1}$$

с ядром $K(t,\tau)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(t)\beta_j(\tau)$, где $\alpha_j(t),\beta_j(t)\in C\left(\overline{G}\right)$, $j=1,2,\ldots,m$. Такие ядра называются *вырожденными*. Область $G$ считаем ограниченной. Системы функций $\left\{\alpha_j\right\}_{j=1}^{m}$ и $\left\{\beta_j\right\}_{j=1}^{m}$ можно считать линейно независимыми без ограничения общности

*Рассмотрим следующую задачу*: для заданного числа $\mu\in C$ и функции $f\in C\left(\overline{G}\right)$ найти функцию $y\in C\left(\overline{G}\right)$, удовлетворяющую уравнению

$$y(t)=\mu\int_G K(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau+f(t)\,. \tag{12.2}$$

Уравнение (12.2) называется *интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром*. Наряду с уравнением (12.2) рассмотрим отвечающее ему *однородное*

$$y(t)=\mu\int_G K(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau \tag{12.3}$$

и пару *союзных* (или *сопряженных*) *уравнений*:

$$z(t)=\overline{\mu}\int_G K^*(t,\tau)\,z(\tau)\,d\tau+g(t), \tag{12.4}$$

$$z(t)=\overline{\mu}\int_G K^*(t,\tau)\,z(\tau)\,d\tau\,, \tag{12.5}$$

где $K^*(t,\tau)=\overline{K(\tau,t)}=\sum_{j=1}^{m}\overline{\alpha_j(\tau)}\,\overline{\beta_j(\tau)}$, а $g\in C\left(\overline{G}\right)$ – также заданная функция.

Подставляя в (12.2) ядро (12.1), получим

$$y(t)=f(t)+\mu\sum_{j=1}^{m}y_j\alpha_j(t),\quad \text{где } y_j=\int_G y(\tau)\beta_j(\tau)\,d\tau.$$

Далее, подставляя $y(t)$ в (12.2), получаем при $\mu\neq 0$:

$$f(t)+\mu\sum_{j=1}^{m}y_j\alpha_j(t)f(t)+\mu\int_G\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(t)\beta_j(\tau)\right)\times$$

$$\times\left(f(\tau)+\mu\sum_{j=1}^{m}y_j\alpha_j(\tau)\right)d\tau;$$

$$\sum_{j=1}^{m}y_j\alpha_j(t)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(t)\left[\int_G\beta_j(\tau)f(\tau)\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\mu\sum_{i=1}^{m}\left(\int_G\beta_j(\tau)\alpha_i(\tau)\,d\tau\right)y_i\right].$$

Функции $\left\{\alpha_j\right\}_{j=1}^{m}$ линейно независимы, поэтому решение уравнения (12.2) *равносильно* решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$y_j=\mu\sum_{i=1}^{m}C_{ij}y_i+f_j,\quad j=1,2,\ldots,m,\qquad (12.2')$$

$$y_j=\int_G\beta_j(\tau)y(\tau)\,d\tau;\quad f_j=\int_G\beta_j(\tau)f(\tau)\,d\tau;\quad C_{ij}=\int_G\alpha_j(\tau)\beta_j(\tau)\,d\tau.$$

В самом деле, если $y\in C\left(\overline{G}\right)$ – решение (12.2), то из приведенных выкладок следует, что $\vec{y}=\left\{y_1,\ldots,y_m\right\}$, $y_i=\int_G\beta_j(\tau)y(\tau)\,d\tau$ удовлетворяет системе (12.2′). Обратно, если $\vec{y}=\left(y_1,\ldots,y_m\right)$ – какое-либо

решение (12.2′), то функция $y(t)=f(t)+\mu\sum_{j=1}^{m} y_j\alpha_j(t)$, как следует из тех же выкладок, удовлетворяет уравнению (12.2).

Отметим, что уравнения (12.3)–(12.5) тем же образом переходят в эквивалентные им системы линейных алгебраических уравнений:

$$y_j=\mu\sum_{i=1}^{m} C_{ij}\,y_i\,, \qquad (12.3')$$

$$z_j=\overline{\mu}\sum_{i=1}^{m}\overline{C_{ji}}\,z_i+g_j\,, \qquad (12.4')$$

$$z_j=\overline{\mu}\sum_{i=1}^{m}\overline{C_{ji}}\,z_i\,, \qquad (12.5')$$

где $\quad z_j=\int\limits_G \overline{\alpha_j(\tau)}\,z(\tau)\,d\tau,\;\; g_j=\int\limits_G \overline{\alpha_j(\tau)}\,g(\tau)\,d\tau\,,$

и функция $\quad z(t)=g(t)+\overline{\mu}\sum_{j=1}^{m}\overline{\beta_j(t)}\,z_j\,.$

Для систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (12.3′)–(12.5′) справедлива следующая теорема (*теорема Фредгольма*).

***<u>Теорема 12.1′.</u>*** 1. Либо уравнение (12.2′) имеет единственное решение при любом $\vec{f}=\{f_1,\ldots,f_m\}$, либо уравнение (12.3′) имеет ненулевое решение (*альтернатива Фредгольма*);

2. Уравнение (12.3′) и (12.5′) имеют одно и то же число линейно независимых решений (т.е. размерности пространств решений уравнений (12.3′) и (12.5′) равны);

3. Уравнение (12.2′) разрешимо для тех и только тех $\vec{f}$, которые ортогональны всем решениям $\vec{z}$ уравнения (12.5′): $\sum_{j=1}^{m} f_j\,\overline{z}_j=0$.

*Доказательство.* Обозначив $C=\left\{c_{ij}\right\}_{i,j=1}^{m}$, запишем уравнения (12.2′)–(12.5′) в матричной форме (стрелка вниз обозначает представление вектора в виде вектора-столбца):

$$(E-\mu C)\underset{\downarrow}{y}=\underset{\downarrow}{f}, \qquad (12.2'')$$

$$(E-\mu C)\underset{\downarrow}{y}=\underset{\downarrow}{0}, \qquad (12.3'')$$

$$\left(E-\overline{\mu}C^{*}\right)\underset{\downarrow}{z}=\underset{\downarrow}{g}, \qquad (12.4'')$$

$$\left(E-\overline{\mu}C^{*}\right)\underset{\downarrow}{z}=\underset{\downarrow}{0}, \qquad (12.5'')$$

где $C^{*}$ – сопряженная с $C$ матрица. Тогда:

1) (12.2″) однозначно разрешимо $\forall\vec{f}\Leftrightarrow\det(E-\mu C)\neq 0\Leftrightarrow$ (12.3″) имеет только нулевое решение;

2) $E-\overline{\mu}C^{*}=(E-\mu C)^{*}\Rightarrow r=\mathrm{Rang}(E-\mu C)=\mathrm{Rang}(E-\overline{\mu}C^{*})\Rightarrow$ размерность пространств решений (12.3″) и (12.5″) равны $(m-r)$, т.е. они равны между собой;

3) если $\underset{\downarrow}{f}=(E-\mu C)\underset{\downarrow}{y}$, а $\left(E-\overline{\mu}C^{*}\right)\underset{\downarrow}{z}=\underset{\downarrow}{0}$, то $\left(\vec{f},\vec{z}\right)=\left((E-\mu C)\,\vec{y},\vec{z}\right)=$ $=\left(y,\left(E-\overline{\mu}C^{*}\right)\vec{z}\right)=\left(\vec{y},\vec{0}\right)=0$, т.е. если (12.2″) имеет при заданном $\vec{f}$ решение, то $\vec{f}$ ортогональна любому решению (12.5″). Обратно, пусть $\vec{f}$ такова, что она ортогональна всем решениям (12.5″). Тогда, в силу того, что

$$R^{m}=\mathrm{Ker}(E-\mu C)^{*}\oplus\mathrm{Im}(E-\mu C)\Rightarrow\underset{\downarrow}{f}\in\mathrm{Im}(E-\mu C)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\exists y\in R^{m}:\ (E-\mu C)\underset{\downarrow}{y}=\underset{\downarrow}{f}.$$

Здесь $\mathrm{Ker}(E-\mu C)^{*}$ и $\mathrm{Im}(E-\mu C)$ – ядро и образ операторов, отвечающих указанным здесь матрицам.

В качестве следствия получаем соответствующую теорему для уравнений (12.2)–(12.5).

***Теорема 12.1.*** 1. Либо уравнение (12.2) имеет единственное решение при любой $f \in C\left(\overline{G}\right)$, либо уравнение (12.3) имеет ненулевое решение в $C\left(\overline{G}\right)$.

2. Размерности пространств решений уравнений (12.3) и (12.5) конечны и равны между собой.

3. Уравнение (12.2) разрешимо для тех и только тех $f \in C\left(\overline{G}\right)$, которые для любого решения $z$ уравнения (12.5) удовлетворяют условию

$$\int_G f(\tau)\overline{z(\tau)}\,d\tau = 0.$$

*Доказательство.* Пункты 1 и 2 следуют из взаимной однозначности между решениями уравнений (12.2)–(12.5) и СЛАУ (12.2′–12.5′). Для доказательства пункта 3 осталось убедиться, что если $f(\tau) \leftrightarrow \overline{f}$ и $z(\tau) \leftrightarrow \overline{z}$, то $\int_G f(\tau)\overline{z(\tau)}\,d\tau = 0 \Leftrightarrow \left(\vec{f}, \vec{z}\right) = 0$. В силу выписанных ранее соотношений:

$$\int_G f(\tau)\overline{z(\tau)}\,d\tau = \int_g f(\tau)\overline{\overline{\mu}\sum_{j=1}^{m}\overline{\beta_j(\tau)}z_j}\,d\tau =$$

$$= \mu\sum_{j=1}^{m}\left(\int_g f(\tau)\beta_j(\tau)\,d\tau \cdot \overline{z}_j\right) = \mu\sum_{j=1}^{m} f_j\overline{z}_j = \mu\left(\vec{f}, \vec{z}\right).$$

***Замечание.*** Данная теорема остается справедливой *для любого вполне непрерывного* в $C\left(\overline{G}\right)$ оператора. В частности, она справедлива для операторов Фредгольма *с непрерывным* в $C\left(\overline{G} \times \overline{G}\right)$ ядром $K(t,\tau)$ и *с полярным* $\dfrac{K(t,\tau)}{|t-\tau|^{\alpha}}$, $0 < \alpha < n$, ядром.

Здесь эту теорему доказывать не будем, но полностью ее *докажем в случае евклидовых* пространств.

## § 13. Метод последовательных приближений решения интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма второго рода

Для заданного параметра $\mu \in C$ и функции $f \in C\left(\overline{G}\right)$ рассмотрим интегральные уравнения

$$y(t) = \mu\left(\hat{k}y\right)(t) + f(t), \tag{13.1}$$

$$y(t) = \mu\left(\hat{K}y\right)(t) + f(t), \tag{13.2}$$

$$y(t) = \mu\left(\hat{K}_{\alpha}y\right)(t) + f(t), \tag{13.3}$$

где операторы $\hat{k}$, $\hat{K}$ и $\hat{K}_{\alpha}$ были введены ранее. Уравнение (13.1), (13.2), (13.3) называются, соответственно, интегральными уравнениями Вольтерра, Фредгольма и уравнением Фредгольма с полярным ядром второго рода.

### ***13.1. Теорема существования и единственности (ТСЕ) решения интегрального уравнения Вольтера***

***Теорема 13.1.*** $\forall f \in C[a,b]$, $\forall \mu \in C \Rightarrow$ уравнение (13.1) имеет и притом единственное решение $y \in C[a,b]$.

*Доказательство.* 1. Применим *метод последовательных приближений*. Пусть:

$$M = \|f\|_{C[a,b]} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|, \quad L = \|k\|_{C([a,b]\times[a,b])}.$$

Положим:

$$y_0(t) = f(t),$$

$$y_1(t) = f(t) + \mu\int_a^t k(t,\tau)\, y_0(\tau)\, d\tau,$$

. . . ,

$$y_n(t) = f(t) + \mu\int_a^t k(t,\tau)\, y_{n-1}(\tau)\, d\tau.$$

Тогда по индукции, используя теорему о непрерывности интеграла по параметру, получаем: $\forall n \Rightarrow y_n \in C[a,b]$.

Далее:

$$\left|y_1(t)-y_0(t)\right| = |\mu|\left|\int_a^t k(t,\tau) f(\tau)\, d\tau\right| \le LM\,|\mu|(t-a);$$

$$\left|y_2(t)-y_1(t)\right| = |\mu|\left|\int_a^t k(t,\tau)\left(y_1(\tau)-y_0(\tau)\right) d\tau\right| \le$$

$$\le ML^2|\mu|^2 \int_a^t (\tau-a)\, d\tau = ML^2|\mu|^2 \frac{(t-a)^2}{2!};$$

и т.д. Для $n$-й разности получаем:

$$\left|y_n(t)-y_{n-1}(t)\right| = |\mu|\left|\int_a^t k(t,\tau)\left(y_{n-1}(\tau)-y_{n-2}(\tau)\right) d\tau\right| \le$$

$$\le ML^n|\mu|^n \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (\tau-a)^{n-1}\, d\tau = ML^n|\mu|^n \frac{(t-a)^n}{n!}.$$

Теперь рассмотрим ряд: $y(t) = y_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(y_k(t)-y_{k-1}(t)\right)$.

Это ряд из непрерывных функций, который, в силу полученных оценок, по теории Вейерштрасса сходится *равномерно* на $[a,b]$ при $\forall \mu \in C$. Но тогда его сумма $y(t) \in C[a,b]$. Покажем, что $y(t)$ *удовлетворяет уравнению* (13.1). Так как

$$y_n(t) = y_0(t) + \sum_{k=1}^{n}\left(y_k(t)-y_{k-1}(t)\right) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} y(t),$$

то, по теореме о переходе к пределу под знаком собственного интеграла, получаем:

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t) = \lim_{n\to\infty}\left(f(t) + \mu\int_a^t k(t,\tau)\, y_{n-1}(\tau)\, d\tau\right) =$$

$$= f(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau)\, y(\tau)\, d\tau,$$

т.е. найденная функция есть решение уравнения (13.1).

2. Докажем *единственность* этого решения. Если $y_1(t)$ и $y_2(t) \in C[a,b]$ два решения (13.1), то $z(t) = y_1(t) - y_2(t) \in C[a,b]$ и удовлетворяют уравнению:

$$z(t) = \mu \int_a^t k(t,\tau)\, z(\tau)\, d\tau\,.$$

Но тогда $\forall n \Rightarrow z(t) = \mu \int_a^t k(t,\tau_1)\, d\tau_1 \int_a^{\tau_1} k(\tau_1,\tau_2)\, z(\tau_2)\, d\tau_1 = \ldots =$

$$= \mu^n \int_a^t k(t,\tau_1)\, d\tau_1 \int_a^{\tau_1} k(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_2 \ldots \int_a^{\tau_{n-1}} k(\tau_{n-1},\tau_n)\, z(\tau_n)\, d\tau_n.$$

Отсюда получаем оценку для модуля функции:

$$|z(t)| \le |\mu|^n L^n \|z\|_{C[a,b]} \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_a^{\tau_{n-1}} d\tau_n =$$

$$= |\mu|^n L^n \|z\|_C \frac{(t-a)^n}{n!} \le |\mu|^n L^n \frac{(b-a)^n}{n!} \|z\|_C\,.$$

Следовательно, справедливо неравенство:

$$\forall n: \quad \|z\|_C = \sup_{t\in[a,b]} |z(t)| \le |\mu|^n L^n (b-a)^n \|z\|_C \frac{1}{n!}.$$

Это возможно лишь при $\|z\|_C = 0$, так как $\dfrac{(|\mu| L(b-a))^n}{n!} \to 0$ при $n \to +\infty$. Следовательно, $z(t) \equiv 0$ на $[a,b]$. Теорема доказана.

## *13.2. ТСЕ решения интегрального уравнения Фредгольма*

***Теорема 13.2.*** Пусть $L = \|K\|_{C(\bar{G}\times\bar{G})}$, $\mu(G) < +\infty$ – мера области $G$. Тогда $\forall\left(\mu:\ |\mu| < \dfrac{1}{L\mu(G)}\right) \Rightarrow$ уравнение (13.2) имеет и притом единственное решение.

*Доказательство*. Доказательство проводим методом последовательных приближений. Полагаем: $y_0(t) = f(t)$,

$$y_1(t) = f(t) + \mu\int_G K(t,\tau)\, y_0(\tau)\, d\tau,$$

$$\ldots,$$

$$y_n(t) = f(t) + \mu\int_G K(t,\tau)\, y_{n-1}(\tau)\, d\tau.$$

Имеем $\forall n \Rightarrow\ y_n \in C(\bar{G})$ и, положив $M = \|f\|_C$, получаем:

$$|y_1(t) - y_0(t)| \le |\mu| ML\mu(G);$$

$$|y_2(t) - y_1(t)| \le M\,(|\mu| L\mu(G))^2,$$

$$\ldots,$$

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \le M\,(|\mu| L\mu(G))^n, \quad n = 1,\ 2, \ldots.$$

Тогда в силу условий теоремы, используя теорему Вейерштрасса, получаем, что ряд

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(y_n(t) - y_{n-1}(t)\right)$$

сходится на $\bar{G}$ равномерно. Следовательно, $y(t) \in C(\bar{G})$ и $y(t) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(t)$. Используя теорему о переходе к пределу под знаком интеграла, получаем, что $y(t)$ есть решение уравнения (13.2). Наконец, если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – два решения, то $z(t) = y_1(t) - y_2(t)$ удовлетворяет уравнению

$$z(t) = \mu\int_G K(t,\tau)\, z(\tau)\, d\tau,$$

откуда $\|z\|_C \le |\mu| L\mu(G)\|z\|_C$. В силу того, что $|\mu| L\mu(G) < 1$ получаем: $\|z\|_C = 0$ т.е. решение уравнения (13.2) единственно.

## ***13.3. ТСЕ решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с полярным ядром***

Рассмотрим теперь уравнение (13.3) с полярным ядром $K_\alpha(t,\tau)$:

$$K_\alpha(t,\tau) = \frac{K(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha}, \quad K(t,\tau) \in C\left(\overline{G} \times \overline{G}\right), \quad 0 < \alpha < n.$$

Обозначим: $\sup\limits_{t,\tau \in \overline{G}} |K(t,\tau)| = L$, $\operatorname{diam} G = d$, $|S_1|$ – площадь единичной сферы в $R^n$.

Тогда

$$\sup_{t,\tau\in\overline{G}} \left( \int_G |K_\alpha(t,\tau)| d\tau \right) \le L \sup_{t\in\overline{G}} \left( \int_G \frac{d\tau}{|t-\tau|^\alpha} \right) \le$$

$$\le \sup_{t\in\overline{G}} \left( L \int_{|\tau - t| \le d} \frac{d\tau}{|t-\tau|\alpha} \right) = L|S_1| \int_0^d \rho^{n-\alpha-1} d\rho = L|S_1| \frac{d^{n-\alpha}}{n-\alpha}.$$

***<u>Теорема 13.3.</u>*** Пусть $d = \operatorname{diam} G < +\infty$. Положим $r_0 = \left( L|S_1| \frac{d^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right)^{-1}$. Тогда $\forall f \in C\left(\overline{G}\right)$, $\forall (\mu: |\mu| < r_0) \Rightarrow$ существует и единственное решение уравнения (13.3) $y \in C\left(\overline{G}\right)$.

*<u>Доказательство.</u>* Вновь проводим доказательство методом последовательных приближений, положив:

$$y_0(t) = f(t),$$

$$y_n(t) = f(t) + \mu \int_G K_\alpha(t,\tau)\, y_{n-1}(\tau)\, d\tau .$$

Тогда $\forall n \Rightarrow y_n \in C\left(\overline{G}\right)$, так как $\hat{K}_\alpha :\ C\left(\overline{\theta}\right) \to C\left(\overline{G}\right)$. Далее имеем:

$$\left|y_0(t)\right| \le M = \|f\|_{C(G)};$$

$$\left|y_1(t) - y_0(t)\right| \le M\,|\mu| \int_G \left|K_\alpha(t,\tau)\right| d\tau \le M\left(|\mu| r_0^{-1}\right);$$

. . . ;

$$\left|y_n(t) - y_{n-1}(t)\right| \le M\left(|\mu| r_0^{-1}\right)^n, \quad n = 1,\ 2,\ 3\ldots .$$

Так как $|\mu| r_0^{-1} < 1$, то по теореме Вейерштрасса ряд

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(y_k(t) - y_{k-1}(t)\right)$$

сходится равномерно на $\overline{G}$. Но тогда $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(t) \in C\left(\overline{G}\right)$.

Далее:

$$y_n(t) = \mu \int_G K_\alpha(t,\tau)\, y(\tau)\, d\tau + \mu \int_G K_\alpha(t,\tau)\left(y_{n-1}(\tau) - y(\tau)\right) d\tau$$

и так как при $n \to +\infty$:

$$\mu \left| \int_G K_\alpha(t,\tau)\left(y_{n-1}(\tau) - y(\tau)\right) d\tau \right| \le |\mu| \left\|y_{n-1} - y\right\|_C \cdot r_0^{-1} \to 0,$$

то при $n \to +\infty$ получаем, что $y(t)$ – решение уравнения (13.3). *Единственность* доказывается так же, как в теореме 13.2.

## ***13.4. Принцип сжимающих отображений***

Выкладки разд. 13.1–13.3 носят общий характер. Пусть $X$ – нормированное пространство, а $\hat{A} : X \to X$ некоторый (не обязательно линейный) оператор.

***Определение 13.1.*** Оператор $\hat{A} :\ X \to X$ называется *сжатием* (*сжимающим оператором*), если

$$\exists\, 0 \le \alpha < 1 :\ \forall x, y \in X \Rightarrow \left\|\hat{A}x - \hat{A}y\right\| \le \alpha \|x - y\| .$$

*Упражнение.* Если $\hat{A}: X \to X$ линейный, то $\hat{A}$ сжатие $\Leftrightarrow \left\|\hat{A}\right\| < 1$.

***Теорема 13.4 (принцип сжимающих отображений).*** Если $X$ – *банахово* пространство, и оператор $\hat{A}: X \to X$ – *сжатие*, то уравнение $x = \hat{A}x$ имеет в $X$ единственное решение, которое может быть найдено *методом последовательных приближений*:

$$x_n = \hat{A}x_{n-1}, \quad x_0 \in X \text{ – произвольно.}$$

*Доказательство.* Пусть $x_0 \in X$ – произвольно. Положим $x_n = \hat{A}x_{n-1} = \hat{A}^n x_0$. Тогда

$$\forall n \geq m \Rightarrow \left\|x_n - x_m\right\| = \left\|\hat{A}^n x_0 - \hat{A}^m x_0\right\| \leq \alpha \left\|\hat{A}^{n-1}x_0 - \hat{A}^{m-1}x_0\right\| \leq$$

$$\leq \ldots \leq \alpha^m \left\|\hat{A}^{n-m}x_0 - x_0\right\| = \alpha^m \left\|x_{n-m} - x_{n-m-1} + x_{n-m-1} - \ldots + x_1 - x_0\right\| \leq$$

$$\leq \alpha^m \left(\left\|x_{n-m} - x_{n-m-1}\right\| + \ldots + \left\|x_1 - x_0\right\|\right) \leq$$

$$\leq \alpha^m \left(\alpha^{n-m-1}\left\|x_1 - x_0\right\| + \alpha^{n-m-2}\left\|x_1 - x_0\right\| + \ldots + \left\|x_1 - x_0\right\|\right) \leq$$

$$\leq \alpha^m \left\|x_1 - x_0\right\|\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots\right) = \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\left\|\hat{A}x_0 - x_0\right\| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Следовательно, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная в $X$ последовательность. Так как $X$ – полное, то $\exists x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in X$. Далее, так как $\hat{A}$ – сжатие: $\left\|\hat{A}x_n - \hat{A}x\right\| \leq \alpha \left\|x_n - x\right\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, т.е. и $\hat{A}x_n \to \hat{A}x$ в $X$. Тогда $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{A}x_{n-1} = \hat{A}x$, т.е. $x$ – решение уравнения $x = \hat{A}x$. Единственность очевидна, так как если $x_1$ и $x_2$ – решения этого уравнения, то $\left\|x_1 - x_2\right\| = \left\|\hat{A}x_1 - \hat{A}x_2\right\| \leq \alpha \left\|x_1 - x_2\right\|$, т.е. $\left\|x_1 - x_2\right\| = 0$.

*Упражнение.* Взяв $X = C\left(\overline{G}\right)$, а $\hat{A} = \hat{K}$ (или $\hat{K}_\alpha$), доказать теоремы 13.2 и 13.3.

## § 14. Спектр и резольвента линейного оператора в нормированной пространстве

### ***14.1. Общие определения***

***Определение 14.1***. Пусть $X$ – нормированное пространство, $\hat{A}$ – оператор в $X$ с областью определения $D(\hat{A})$. Оператор $\hat{B}$ с областью определения $D(\hat{B})$, действующий в $X$, называется *обратным* к $\hat{A}$ *(обозначается* $\hat{B} = \hat{A}^{-1}$), если

$$\begin{cases} \exists \hat{A}\hat{B}x = x, & \forall x \in D\left(\hat{B}\right), \\ \exists \hat{B}\hat{A}x = x, & \forall x \in D\left(\hat{A}\right). \end{cases}$$

*Упражнение.* Доказать свойства:

1) $\left(\hat{A}^{-1}\right)^{-1} = \hat{A}$;

2) $\hat{A}^{-1}$ линейный $\Leftrightarrow$ $\hat{A}$ – линейный.

***Определение 14.2.***

1. Множество всех точек $\mu \in C$, для которых *существует* и *ограничен* оператор $\left(\hat{I} - \mu\hat{A}\right)^{-1}$, называется *резольвентным множеством* оператора $\hat{A}$, а его точки – *регулярными точками* оператора $\hat{A}$.

2. Все остальные точки $\mu \in C$ называются точками *характеристического спектра*.

3. Оператор $\left(\hat{I} - \mu\hat{A}\right)^{-1} = R_{\mu}\left(\hat{A}\right)$ называется *резольвентой оператора* $\hat{A}$.

***Пример 14.1.*** Если $X = C[a,b]$, $\hat{A} = \hat{k}$ – интегральный оператор Вольтерра, то вся плоскость С состоит из регулярных точек, т.е. совпадает с резольвентным множеством.

***<u>Теорема 14.1.</u>*** Пусть $\hat{A}: X \to X$ – линейный ограниченный оператор. Тогда $\forall\left(\mu \in C:\ |\mu| < \left\|\hat{A}\right\|^{-1}\right) \Rightarrow\ \exists R_{\mu}\left(\hat{A}\right)$ и $R_{\mu}\left(\hat{A}\right)$ представляется *рядом Неймана* $\hat{R}_{\mu}\left(\hat{A}\right) = \hat{I} + \sum\limits_{K=1}^{\infty} \mu^{k} \hat{A}^{k}$.

*<u>Доказательство.</u>* Рассмотрим оператор $\hat{R}_{n} = \hat{I} + \sum\limits_{K=1}^{n} \mu^{k} \hat{A}^{k}$.

Тогда $\hat{R}_{n}\left(\hat{I} - \mu\hat{A}\right) = \hat{I} - \mu^{n+1}\hat{A}^{n+1}$, $\left(\hat{I} - \mu\hat{A}\right)\hat{R}_{n} = \hat{I} - \mu^{n+1}\hat{A}^{n+1}$.

Отсюда $\left\|\left(\hat{R}_{n}\left(\hat{I} - \mu\hat{A}\right) - \hat{I}\right)\right\| = \left\|\left(\hat{I} - \mu\hat{A}\right)\hat{R}_{n} - \hat{I}\right\| = \left\|\mu^{n+1}\hat{A}^{n+1}\right\| \le$

$$\le |\mu|^{n+1}\|A\|^{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \text{, так как } |\mu|\|A\| < 1 .$$

Следовательно: $\exists \hat{R}_{\mu}\left(\hat{A}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{R}_{n} = \hat{I} + \sum\limits_{K=1}^{\infty} \mu^{k} \hat{A}^{k}$.

## ***<u>14.2. Интегральные операторы</u>***

Вновь рассмотрим операторы $\hat{k}$, $\hat{K}$ и $\hat{K}_{\alpha}$ в пространстве непрерывных функций.

1. Оператор $\hat{k}$.

Обозначим $k(t,\tau) = k_{1}(t,\tau)$, положим $L = \sup\limits_{t,\tau\in[a,b]} |k(t,\tau)|$. Тогда $\forall y \in C[a,b]$ будет выполняться:

$$\left(\hat{k}^{2} y\right)(t) = \int_{a}^{t} k_{1}(t,s)\left(\int_{a}^{\Delta} k_{1}(s,\tau)\, y(\tau)\, d\tau\right) ds =$$

$$= \int_{a}^{t} y(\tau)\, d\tau \int_{\tau}^{t} k_{1}(t,s)\, k_{1}(s,\tau)\, d\Delta = \int_{a}^{t} k_{2}(t,\tau)\, y(\tau)\, d\tau,$$

где $k_2(t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t} k_1(t,s)k_1(s,\tau)\,ds$ – *свертка* ядра $k_1(t,\tau)$ с собой. При этом $\left|k_2(t,\tau)\right|\le L^2(t-\tau)$.

Далее:

$$\left(\hat{k}^3 y\right)(t)=\left(\hat{k}\cdot\hat{k}^2 y\right)(t)=\int\limits_{a}^{t} k_1(t,s)\left(\int\limits_{a}^{s} k_2(s,\tau)\,y(\tau)\,d\tau\right)=$$

$$=\int\limits_{a}^{t} k_3(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau,$$

где $k_3(t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t} k_1(t,s)k_2(s,t)\,ds$ – *свертка* ядра $k_1(t,\tau)$ с ядром $k_2(t,\tau)$. При этом аналогично предыдущему

$$\left|k_3(t,\tau)\right|\le L^3\int\limits_{\tau}^{t}(s-\tau)\,ds=L^3\frac{(t-\tau)^2}{2!}.$$

Повторяя этот процесс, получаем, что оператору $\hat{k}^n$ отвечает ядро $k_n(t,\tau)$, где

$$k_n(t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t} k_1(t,s)k_{n-1}(s,\tau)\,ds,$$

$$\left|k_n(t,\tau)\right|\le L^n\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!},\quad \forall(t,\tau\in[a,b]\subseteq(-\infty,+\infty):(\tau<t)).$$

Но тогда

$$\left(\hat{R}_{\mu}y\right)(t)=y(t)+\mu\int\limits_{a}^{t}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{n-1}k_n(t,\tau)\right)y(\tau)\,d\tau=$$

$$=y(t)+\mu\int\limits_{a}^{t}\Gamma_{\mu}(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau.$$

***<u>Определение 14.3.</u>*** *Разрешающим ядром* оператора $\hat{k}$ называется ядро $\Gamma_\mu(t,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{n-1}k_n(t,\tau)$.

Из полученных выше оценок следует, что $\forall(\tau,t\in[a;b]:\ \tau<t)$

$$\left|\Gamma_\mu(t,\tau)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}L^n|\mu|^{n-1}\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}$$

и, следовательно, это ядро является непрерывной функцией во всех точках $(t,\tau)$: $a\le\tau<t<b$. Функция $\Gamma_\mu(t,\tau)$ по параметру $\mu\in C$ – аналитическая во всей плоскости $C$ (т.е. целая) функция.

Если ядро $\Gamma_\mu(t,\tau)$ подсчитано, то решение уравнения

$$y(t)=\mu\hat{k}y(t)+f(t)$$

определяется формулой

$$y(t)=\left(R_\mu\left(\hat{k}\right)f\right)(t)=f(t)+\mu\int_a^t\Gamma_\mu(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

2. Теперь рассмотрим оператор $\hat{K}$. Вновь обозначая его ядро $K(t,\tau)=K_1(t,\tau)$, получим, что оператору $\hat{K}^n$ отвечает ядро $K_n(t,\tau)$, где $K_n(t,\tau)=\int_G K_1(t,s)K_{n-1}(s,\tau)d\tau$ – *свертка* ядер операторов $\hat{K}$ и $\hat{K}^{n-1}$. Если положить $L=\sup_{t,\tau\in\overline{G}}\left|K_1(t,\tau)\right|$, $\mu(G)<+\infty$ – мера области $G$, то $\sup_{t,\tau\in\overline{G}}\left|K_n(t,\tau)\right|\le L^n(\mu(G))^{n-1}$.

Тогда для $\forall(\mu:\ |\mu|\cdot L\mu(G))<1$ определена резольвента $R_\mu\left(\hat{K}\right)$ и при этом

$$\left(R_\mu\left(\hat{K}\right)y\right)(t)=y(t)+\mu\int_G\left[\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{n-1}K_n(t,\tau)\right]y(\tau)d\tau=$$

$$=y(t)+\mu\int_G\Gamma_\mu(t,\tau)y(\tau)d\tau.$$

При этих значениях μ решение уравнения

$$y = \mu \hat{K} y + f$$

дается формулой:

$$y(t) = \left(R_\mu\left(\hat{k}\right) f\right)(t) = f(t) + \mu \int_G \Gamma_\mu(t,\tau) f(\tau)\, d\tau .$$

## § 15. Линейные операторы в евклидовых пространствах

Далее рассматриваем линейный, ограниченный оператор $\hat{A}$ в евклидовом пространстве $E$ со скалярным произведением ( · ; · ).

### ***15.1. Теорема Рисса о представлении линейного функционала в евклидовом пространстве***

***Теорема 15.1.*** Пусть $f: E \to C$ (или $R$) – линейный, ограниченный функционал в евклидовом пространстве $E$.

Тогда существует и притом единственный элемент $y_f \in E$: $\forall x \in R \Rightarrow f(x) = \left(x, y_f\right)$. При этом $\left\| y_f \right\| = \| f \|$.

*Доказательство.* Пусть $X = \{x \in E:\ f(x) = 0\}$ – нуль-пространство функционала $f$. Если $X = E$, то $y_f = \theta$. Если же $X \neq E$, то $\exists\left(y_0 \in E, y_0 \neq 0\right)$: $y_0 \perp \mathrm{X}$, т.е. $\forall x \in X \Rightarrow \left(x, y_0\right) = 0$.

Положим

$$y_f = \overline{f\left(y_0\right)} \frac{y_0}{\left\| y_0 \right\|^2}$$

и покажем, что $y_f$ – искомый элемент. Имеем:

1) $\left(y_f; y_f\right) = \dfrac{\left| f\left(y_0\right) \right|^2}{\left\| y_0 \right\|^2} = f\left(y_f\right)$;

2) $\forall x' \in X \Rightarrow \left(x', y_f\right) = 0 = f(x')$.

Но тогда, так как $\forall x \in E \Rightarrow\ x = \left( x - \dfrac{f(x)}{f\left(y_f\right)} y_f \right) + \dfrac{f(x)}{f\left(y_f\right)} y_f$, и значение $x' = x - \dfrac{f(x)}{f\left(y_f\right)} y_f \in X$, то

$$\left(x, y_f\right) = \frac{f(x)}{f\left(y_f\right)} \left(y_f, y_f\right) = f(x).$$

Таким образом, выполнение нужного равенства установлено.

Далее:

$$\|f\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)| \ge \left| f\left( \frac{y_f}{\left\|y_f\right\|} \right) \right| = \left\|y_f\right\|,$$

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| \le 1} \left|\left(x, y_f\right)\right| \le \left\|y_f\right\|, \text{ т.е. } \|f\| = \left\|y_f\right\|.$$

Наконец, *единственность* $y_f$ очевидно следует из того, что если $\left(x, y_f\right) = 0$ для $\forall x \in E$, то, взяв $x = y_f$, получим $y_f = \theta$.

***<u>Замечание</u>***. Доказанная теорема означает, что евклидово пространство $E$ *изометрично* своему сопряженному, $f \leftrightarrow y_f$ – изометрический изоморфизм. Поэтому евклидово пространство $E$ отождествляют со своим сопряженным.

## ***<u>15.2. Сопряженный оператор</u>***

***<u>Определение 15.1.</u>*** Пусть $\hat{A}:\ E \to E$ – линейный, ограниченный оператор $\left(D\left(\hat{A}\right) = E\right)$. Оператор $\hat{A}^*:\ E \to E$ называется *сопряженным* к оператору $\hat{A}$, если $\forall x, y \in E \Rightarrow\ \left(\hat{A}x, y\right) = \left(x, \hat{A}^* y\right)$.

***<u>Теорема 15.2.</u>*** Для любого линейного ограниченного оператора $\hat{A}:\ E \to E$ справедливы утверждения:

1) существует и притом единственный оператор $\hat{A}^*$;

2) $\hat{A}^*$ – также линейный, ограниченный оператор, причем $\|\hat{A}\| = \|\hat{A}^*\|$;

3) $\left(A^*\right)^* = A$.

<u>*Доказательство.*</u> 1. Фиксируем $y \in E$. Тогда $h(x) = \left(\hat{A}x, y\right)$ – линейный ограниченный функционал на *E*. По теореме Рисса существует и притом *единственный* элемент $h \in E$, такой, что $\forall x \in E \Rightarrow \left(\hat{A}x, y\right) = (x, h)$. Определим оператор $\hat{A}^*$, положив:

$$\forall y \in E \Rightarrow \hat{A}^* y = h \Rightarrow \left(\hat{A}x, y\right) = \left(x, \hat{A}^* y\right).$$

Тогда оператор $\hat{A}^*$ определен *однозначно*.

2. Проверим, что $\hat{A}^*$ – линейный оператор. Для $\forall y_1, y_2 \in E$,

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in C \Rightarrow \left(x, \hat{A}^*\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right)\right) = \left(\hat{A}x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) =$$
$$= \overline{\alpha}_1\left(\hat{A}x, y_1\right) + \overline{\alpha}_2\left(\hat{A}x, y_2\right) = \left(x, \alpha_1 \hat{A}^* y_1 + \alpha_2 \hat{A}^* y_2\right),$$

для всех $x \in E$. Но тогда, взяв $x = \hat{A}^*\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) - \alpha_1 \hat{A}^* y_1 - -\alpha_2 \hat{A}^* y_2$, получим:

$$0 = \left(x, \hat{A}^*\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) - \alpha_1 \hat{A}^* y_1 - \alpha_2 \hat{A}^* y_2\right) =$$
$$= \left\|\hat{A}^*\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) - \alpha_1 \hat{A}^* y_1 - \alpha_2 \hat{A}^* y_2\right\|^2.$$

Следовательно, $\hat{A}^*\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) = \alpha_1 \hat{A}^* y_1 + \alpha_2 \hat{A}^* y_2$, т.е. $\hat{A}^*$ – *линейный* оператор.

Далее: $\forall x, y \in E \Rightarrow \left|(x, \hat{A}^* y)\right| = \left|(\hat{A}x, y)\right| \le \|\hat{A}\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$, откуда, взяв $x = \hat{A}^* y$, получаем: $\|\hat{A}^* y\|^2 \le \|\hat{A}\| \cdot \|\hat{A}^* y\| \cdot \|y\|$ для $\forall y \in E$,

$\|\hat{A}^*\| = \sup\limits_{y \ne \theta} \dfrac{\|\hat{A}^* y\|}{\|y\|} \le \|\hat{A}\|$, т.е. $\hat{A}^*$ – *ограниченный* и $\|\hat{A}^*\| \le \|\hat{A}\|$.

Так как $\left|\left(\hat{A}x, y\right)\right| = \left|\left(x, \hat{A}^* y\right)\right| \le \|x\| \cdot \|y\| \cdot \|\hat{A}^*\|$, то, взяв $y = \hat{A}x$, получим аналогично, что $\|\hat{A}\| \le \|\hat{A}^*\|$. Таким образом, $\|\hat{A}\| \le \|\hat{A}^*\|$.

3. Так как $\hat{A}^*$ – линейный и ограниченный оператор в $E$, то существует $\left(\hat{A}^*\right)^*$ и $\forall x, y \in E \Rightarrow \left(\hat{A}^* x, y\right) = \left(x, \left(\hat{A}^*\right)^* y\right) = \left(x, \hat{A} y\right)$, тогда: $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}$.

## ***15.3. Самосопряженные операторы***

***Определение 15.2.*** Линейный, ограниченный оператор $\hat{A} : E \to E$ называется *самосопряженным*, если

$$\forall x, y \in E \Rightarrow \left(\hat{A}x, y\right) = \left(x, \hat{A}y\right), \text{ т.е. } \hat{A} = \hat{A}^*.$$

***Теорема 15.3.*** Если $\hat{A}$ – самосопряженный оператор в $E$, то его норму можно подсчитать по формуле: $\left\|\hat{A}\right\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \left|\left(\hat{A}x, x\right)\right|$.

*Доказательство.* Положим $\mu = \sup\limits_{\|x\|=1} \left|\left(\hat{A}x, x\right)\right|$. Тогда $\mu \le$ $\le \sup\limits_{\|x\|=1} \left\|\hat{A}\right\| \|x\|^2 = \left\|\hat{A}\right\|$. Теперь покажем, что $\mu \ge \left\|\hat{A}\right\|$.

Имеем: $\left(\hat{A}(x+y), x+y\right) - \left(\hat{A}(x-y), x-y\right) = 4\,\mathrm{Re}\left(\hat{A}x, y\right)$, отсюда: $\left|4\,\mathrm{Re}\left(\hat{A}x, y\right)\right| \le \mu\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = 2\mu\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.

Пусть теперь: $\forall x \in E$: $\|x\| = 1$, $y = \dfrac{\hat{A}x}{\left\|\hat{A}x\right\|}$. Тогда $\|y\| = 1$ и для $\forall x \in E$ получаем $\left|4\,\mathrm{Re}\left(\hat{A}x, y\right)\right| = 4\left\|\hat{A}x\right\| \le 2\mu(1+1) = 4\mu$.

Откуда $\|A\| \overset{def}{=} \sup\limits_{\|x\|=1} \left|\hat{A}x\right| \le \mu$. И получим, что

$$\left\|\hat{A}\right\| = \mu = \sup_{\|x\|=1} \left|\left(\hat{A}x, x\right)\right|.$$

*Упражнение.* Показать, что:

1) собственные значения, если они есть, самосопряженного оператора $\hat{A}$ действительны;

2) собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям оператора $\hat{A}$, ортогональны.

## ***15.4. Вполне непрерывные самосопряженные операторы в E***

Напомним, что оператор $\hat{A}: E \to E$ называется *вполне непрерывным*, если он переводит любое ограниченное в $E$ множество в множество, относительно компактное $E$.

Рассмотрим дополнительные свойства таких операторов.

***Определение 15.3.*** Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ называется *слабосходящейся* к $x \in E$, если $\forall h \in E \Rightarrow \ (h, x_n) \underset{n\to\infty}{\to} (h, x)$.

Записываем это так: $x = w - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

*Упражнение.* Доказать, что слабый предел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *единственный*.

***Лемма 15.1.*** Всякий вполне непрерывный оператор в $E$ переводит любую слабо сходящуюся, ограниченную последовательность в последовательность, сходящуюся по норме.

*Доказательство.* Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$: $\forall n \Rightarrow \|x_n\| \le 1$ и $w - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \theta$. Тогда

$$\forall h \in E \Rightarrow \ \left(\hat{A}x_n, h\right) = \left(x_n, \hat{A}^* h\right) \to \left(\theta, \hat{A}^* h\right) = (\theta, h),$$

т.е. и $w - \lim\limits_{n\to\infty} \hat{A}x_n = \theta$. Покажем, что $\left\|\hat{A}x_n\right\| \to 0$. Допустим противное, т.е. $\exists \varepsilon_0 > 0$: $\forall N \Rightarrow \ \exists n_k > N$: $\left\|\hat{A}x_{n_k}\right\| \ge \varepsilon_0$.

Оператор $A$ – вполне непрерывный в $E$. Следовательно, так как последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то существует последовательность $\left\{\hat{A}x_{n_{k_p}}\right\}_{p=1}^{\infty}$ *фундаментальная* в $E$. Тогда имеем оценку:

$$\varepsilon_0^2 \le \left\|\hat{A}x_{n_{k_p}}\right\|^2 = \left(\hat{A}x_{n_{k_p}}, \hat{A}x_{n_{k_p}} - \hat{A}x_{n_{k_z}}\right) + \left(\hat{A}x_{n_{k_p}}, \hat{A}x_{n_{k_r}}\right) \le$$

$$\le \|\hat{A}\| \left\|\hat{A}x_{n_{k_p}} - \hat{A}x_{n_{k_r}}\right\| + \left|\left(\hat{A}x_{n_{k_p}}, \hat{A}x_{n_{k_r}}\right)\right|.$$

Получаем $\exists N:\ \forall n_{k_p}, n_{k_r} > N \Rightarrow \left\| \hat{A}x_{n_{k_p}} - \hat{A}x_{n_{k_r}} \right\| < \frac{1}{2}\varepsilon_0^2$.

Фиксируем $n_{k_p}$. Тогда $\left( \hat{A}x_{n_{k_p}}, \hat{A}x_{n_{k_r}} \right) \to \left( \hat{A}x_{n_{k_p}}, \theta \right) = 0$ при $n_{k_r} \to \infty$. Следовательно, при достаточно больших $n_{k_r}$ получаем:

$$\varepsilon_0^2 \le \left\| \hat{A}x_{n_{k_p}} \right\|^2 < \frac{1}{2}\varepsilon_0^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_0^2.$$

Пришли к противоречию. Это и означает, что $\left\| \hat{A}x_n - \hat{A}\theta \right\| \to 0$.

***<u>Лемма 15.2.</u>*** Если $A$ – вполне непрерывный оператор в $E$, а последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ ограничена и $w - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то

$$\left( \hat{A}x_n, x_n \right) \to \left( \hat{A}x, x \right).$$

*<u>Доказательство.</u>*

$$\left| \left( \hat{A}x_n, x_n \right) - \left( \hat{A}x, x \right) \right| = \left| \left( \hat{A}x_n, x_n \right) - \left( \hat{A}x, x_n \right) + \left( \hat{A}x, x_n \right) - \right.$$
$$\left. - \left( \hat{A}x, x \right) \right| \le \left\| \hat{A}x_n - \hat{A}X \right\| \left\| x_n \right\| + \left| \left( \hat{A}x, x_n - x \right) \right| \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

так как $\left\| \hat{A}x_n - \hat{A}x \right\| \to 0$ по лемме 15.1, а $\left( \hat{A}x, x_n - x \right) \to 0$ в силу слабой сходимости $x_n$ к элементу $x$.

***<u>Лемма 15.3.</u>*** Из всякого бесконечного ограниченного множества в $E$ можно выбрать слабосходящуюся последовательность.

*<u>Упражнения.</u>*

1. Доказать лемму 15.3.
2. Доказать, если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ слабо сходится, то она ограничена.
3. $\forall$ ОНС $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ слабо сходится к нулевому элементу $\theta$.
4. Если $\hat{A} = \hat{A}^*$, то $\forall x \in E \Rightarrow \left( \hat{A}x, x \right) \in R$.

***<u>Теорема 15.4.</u>*** У всякого линейного, вполне непрерывного, самосопряженного оператора $\hat{A}$ в $E$ существует хотя бы одно собственное значение $\lambda$: $|\lambda| = \left\| \hat{A} \right\|$. Среди всех собственных значений

оператора $\hat{A}$ это собственное значение является наибольшим по модулю.

<u>*Доказательство.*</u> Обозначим: $M = \sup\limits_{\|x\|=1}\left(\hat{A}x, x\right)$, $m = \inf\limits_{\|x\|=1}\left(\hat{A}x, x\right)$.

Пусть $|M| \geq |m|$ (случай $|M| < |m|$ сводится к рассматриваемому заменой $\hat{A} \to -\hat{A}$). Тогда $M > 0$. Покажем, что $\lambda = M$ – собственное значение оператора $\hat{A}$ (по теореме 15.3 $\Rightarrow M = \left\|\hat{A}\right\|$).

Так как $M = \sup\limits_{\|x\|=1}\left(\hat{A}x, x\right)$, то существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$: $\|x_n\| = 1$ и $\left(\hat{A}x_n, x_n\right) \to M$. По лемме 15.3 следует существование $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$: $\exists\ w-\lim\limits_{K\to\infty} x_{n_K} = x_0$, а по лемме 15.2 имеем: $\left(\hat{A}x_{n_k}, x_{n_k}\right) \to \left(\hat{A}x_0, x_0\right)$, следовательно, $\left(\hat{A}x_0, x_0\right) = M$.

Покажем, что $\|x_0\| = 1$:

$$\|x_0\|^2 = (x_0, x_0) \leq \left|\left(x_0 - x_{n_k}, x_0\right)\right| + \left|\left(x_{n_k}, x_0\right)\right| \leq$$
$$\leq \left|\left(x_0 - x_{n_k}, x_0\right)\right| + \|x_0\|.$$

Так как $\left(x_0 - x_{n_k}, x_0\right) \to 0$ при $n_k \to \infty$, то получаем, что $\|x_0\|^2 \leq \|x_0\|$, т.е. $\|x_0\| \leq 1$.

Предположим, что $\|x_0\| < 1$. Тогда положим $y_0 = \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$ и получим $\left(\hat{A}y_0, y_0\right) = \dfrac{1}{\|x_0\|^2}\left(\hat{A}x_0, x_0\right) > M$, что невозможно. Следовательно, $\|x_0\| = 1$. Получили: $\exists x_0 \in E$: $\|x_0\| = 1$ и $\sup\limits_{\|x\|=1}\left(\hat{A}x, x\right) = \left(\hat{A}x_0, x_0\right) = M = \left\|\hat{A}\right\|$ (см. теорему 15.3).

Докажем, что $x_0$ – собственный вектор оператора $\hat{A}$, отвечающий собственному значению $\lambda = \|\hat{A}\|$. Имеем:

$$\|\hat{A}x_0 - \lambda x_0\|^2 = \left(\hat{A}x_0 - \lambda x_0,\ \hat{A}x_0 - \lambda x_0\right) = \|\hat{A}x_0\|^2 -$$

$$-\lambda\left(x_0, \hat{A}x_0\right) - \lambda\left(\hat{A}x_0, x_0\right) + \lambda^2\left(x_0, x_0\right) = \|\hat{A}x_0\|^2 - \lambda^2 \le 0.$$

Но тогда $\|\hat{A}x_0 - \lambda x_0\|^2 = 0 \Rightarrow \hat{A}x_0 = \lambda x_0$, где $\lambda = \|\hat{A}\|$.

Далее, если $\lambda_1$ – любое собственное значение оператора $\hat{A}$, $x_1$ – отвечающий $\lambda_1$ собственный вектор с $\|x_1\| = 1$, то:

$$|\lambda_1| = |(\lambda_1 x_1, x_1)| = \left|\left(\hat{A}x_1, x_1\right)\right| \le \sup_{\|x\|=1}\left|\left(\hat{A}x, x\right)\right| = \|\hat{A}\|.$$

Теорема доказана.

Отметим еще следующие свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженного вполне непрерывного оператора $\hat{A}$.

***<u>Теорема 15.5.</u>*** 1. Любому *ненулевому* собственному значению $\lambda$ самосопряженного, вполне непрерывного оператора $\hat{A}$ может отвечать лишь *конечное число линейно независимых собственных векторов*.

2. Если вполне непрерывный, самосопряженный оператор $\hat{A}$ имеет бесконечно много собственных значений, то единственной их предельной точкой является точка $\lambda = 0$.

*<u>Доказательство.</u>* 1. Пусть $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ – *бесконечное множество* собственных векторов $\hat{A}$, отвечающих собственному значению $\lambda \ne 0$. Допустим, что *они линейно независимы*. Проводя ортогонализацию по Шмидту системы функций $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, получим ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$: $\hat{A}e_k = \lambda e_k$. Тогда согласно неравенству Бесселя имеем: $\forall y \in E \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |(y, e_k)|^2 \le \|y\|^2$. Отсюда: $|(y, e_k)| \to 0$ при $k \to \infty$, т.е. $w - \lim_{k\to\infty} e_k = \theta$.

По лемме 15.2 имеем: $\lambda \equiv \left(\hat{A}e_k, e_k\right) \to \left(\hat{A}\theta, \theta\right) = 0$, т.е. $\lambda = 0$, что противоречит условию.

2. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – отличные от нуля собственные значения $\hat{A}$, записанные *с учетом их кратностей* (*конечных по п. 1*), $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – соответствующие ОНС собственных векторов. Тогда вновь $\forall y \in E \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left|\left(y, x_k\right)\right|^2 \le \|y\|^2$. И тогда $\left|\left(y, x_k\right)\right| \underset{k\to\infty}{\to} 0 = \left|(y, \theta)\right|$, т.е. $\theta = w - \lim_{k\to\infty} x_k$. Тогда: $\lambda_k = \left(\hat{A}x_k, x_k\right) \underset{k\to\infty}{\to} \left(\hat{A}\theta, \theta\right) = 0$, т.е. $\lambda_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

## ***15.5. Теорема Гильберта–Шмидта***

***Теорема 15.6.*** Пусть $\hat{A}$ – линейный, самосопряженный вполне непрерывный оператор в *E*. Тогда в *E* существует ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{n_0}$, $n_0 \le +\infty$, состоящая из собственных векторов оператора $\hat{A}$, отвечающих ненулевым собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_0}$, расположенным в порядке убывания модулей и с учетом их кратностей, такая, что:

1) $\forall x \in E \;\Rightarrow\; x = \sum_{K=1}^{n_0} c_k e_k + x'$, где $c_k = \left(x; e_k\right)$ и $x' \in \operatorname{Ker} \hat{A}$;

2) $\hat{A}x = \sum_{K=1}^{n_0} c_k \lambda_k e_k$.

В случае $n_0 = +\infty$ сходимость рядов понимается по норме пространства *E*.

*Доказательство.* По теореме 15.4 $\Rightarrow$ $\exists\left(\lambda_1 : \left|\lambda_1\right| = \left\|\hat{A}\right\|\right.$ и $e_1$: $\left.\hat{A}e_1 = \lambda_1 e_1,\ \|e_1\| = 1\right)$. Рассмотрим множество:

$$M_1^{\perp} = \left\{x \in E:\ \left(x, e_1\right) = 0\right\}$$

и покажем, что $M_1^{\perp}$ – линейное подпространство в $E$, *инвариантное* для оператора $\hat{A}$.

Линейность множества $M_1^{\perp}$ очевидна, а если $x \in M_1^{\perp}$, то

$$\left(\hat{A}x, e_1\right) = \left(x, \hat{A}e_1\right) = \lambda_1\left(x, e_1\right) = 0,$$

т.е. и $\hat{A}x \in M_1^{\perp}$. Следовательно, $M_1^{\perp}$ – инвариантное подпространство оператора $\hat{A}$ в $E$.

Рассмотрим *сужение* $\hat{A}$ на $M_1^{\perp}$. Тогда на $M_1^{\perp}$ оператор $\hat{A}$ также линейный, самосопряженный, вполне непрерывный.

Имеем:

$$\left\|\hat{A}\right\|_{M_1^{\perp}} = \sup_{\substack{x \in M_1^{\perp} \\ \|x\|=1}} \left|\left(\hat{A}x, x\right)\right| \le \lambda_1.$$

По теореме 15.4 $\Rightarrow$ $\exists\left(e_2 \ne \theta\right) \in M_1^{\perp}$: $\hat{A}e_2 = \lambda_2 e_2$, где $\left|\lambda_2\right| = \left\|\hat{A}\right\|_{M_1^{\perp}} \le \left|\lambda_1\right|$, а $\left\|e_2\right\| = 1$.

Далее рассмотрим подпространство в $E$:

$$M_2^{\perp} = \left\{x \in E:\ \left(x, e_i\right) = 0,\ \ i = 1, 2\right\}.$$

Очевидно $M_2^{\perp}$ – инвариантное в $M_1^{\perp} \subset E$ для оператора $\hat{A}$ линейное подпространство. Сужение оператора $\hat{A}$ на $M_2^{\perp}$ также является линейным, самосопряженным, вполне непрерывным оператором на $M_2^{\perp}$. Положим:

$$\left\|\hat{A}\right\|_{M_2^{\perp}} = \sup_{\substack{x \in M_2^{\perp} \\ \|x\|=1}} \left|\left(\hat{A}x, x\right)\right| \le \left|\lambda_2\right| \le \left|\lambda_1\right|.$$

Тогда по теореме 15.4 существует $\left(e_3 \ne \theta\right) \in M_2^{\perp}$: $\hat{A}e_3 = \lambda_3 e_3$, где $\left|\lambda_3\right| = \left\|\hat{A}\right\|_{M_2^{\perp}}$, а $\left\|e_3\right\| = 1$.

Продолжая этот процесс, на $n$-м шаге строим ОНС $\left\{e_i\right\}_{i=1}^{n}$: $\hat{A}e_i = \lambda_i e_i$, где $\left|\lambda_1\right| \ge \left|\lambda_2\right| \ge \ldots \ge \left|\lambda_n\right| > 0$. Возможны *два случая*.

1. $\exists n_0 < +\infty:\ \forall\left(x \in M_{n_0}^{\perp}:\ \|x\| = 1\right) \Rightarrow \left(\hat{A}x, x\right) = 0$.

В этом случае

$$\left\|\hat{A}\right\|_{M_{n_0}^{\perp}} = \sup_{\substack{x \in M_{n_0}^{\perp} \\ \|x\|=1}} \left|\left(\hat{A}x, x\right)\right| = 0,$$

т.е. на $M_{n_0}^{\perp}$ $\hat{A} = \theta$ – *нулевой оператор*, а тогда $M_{n_0}^{\perp} = \operatorname{Ker}\hat{A}$. Таким образом, в этом случае существует конечная ОНС $\{e_K\}_{K=1}^{n_0}$, состоящая из собственных векторов $\hat{A}$, отвечающих *ненулевым* собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_0}$: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_{n_0}| > 0$. При этом $\forall x \in E \Rightarrow$

$$x = \sum_{k=1}^{n_0} (x, e_k) + x', \text{ где } x' \in \operatorname{Ker}\hat{A}; \quad \hat{A}x = \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k (x, e_k) e_k.$$

2. $\exists\{e_k\}_{k=1}^{\infty}:\ (e_k, e_j) = \delta_{kj}$, $\hat{A}e_k = \lambda_k e_k$ и $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq$ $\geq |\lambda_n| \geq \ldots > 0$ – ненулевые собственные числа оператора *A*, занумерованные с учетом кратностей.

Так как каждое (ненулевое) собственное значение имеет по теореме 15.5 *конечную* кратность, то различных собственных чисел бесконечно много. Тогда по теореме 15.5 $\Rightarrow$ $|\lambda_k| \to 0$ при $k \to \infty$. Рассмотрим линейное подпространство в *E*:

$$M^{\perp} = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k^{\perp}.$$

Тогда

$$\forall n \Rightarrow \mathrm{M}^{\perp} \subset M_n^{\perp};\ \ \forall x \in M^{\perp} \Rightarrow \left(\hat{A}x, e_n\right) = \left(x, \hat{A}e_n\right) = \lambda_n (x, e_n) = 0;$$

т.е. $M^{\perp}$ – *инвариантное* для оператора $\hat{A}$ линейное подпространство в *E*.

Имеем: $\left\|\hat{A}\right\|_{M^{\perp}} = \sup\limits_{\substack{x \in M^{\perp} \\ \|x\|=1}} \left|\left(\hat{A}x, x\right)\right| \leq \sup\limits_{\substack{x \in M_n^{\perp} \\ \|x\|=1}} \left|\left(\hat{A}x, x\right)\right| = |\lambda_{n+1}| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Таким образом, $\left\|\hat{A}\right\|_{M^{\perp}} = 0$, т.е. $\hat{A} = \hat{\Theta}$ на $M^{\perp}$, а $M^{\perp} = \operatorname{Ker}\hat{A}$.

Тогда

$$\forall x \in E \Rightarrow x = x' + \sum_{k=1}^{\infty} \left(x, e_k\right) e_k, \quad x' \in \operatorname{Ker} \widehat{A};$$

$$\hat{A}x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(x, e_k\right) e_k, \text{ где } \left|\lambda_k\right| \underset{k\to\infty}{\to} 0 .$$

Теорема доказана.

***<u>Замечания.</u>*** 1. Построенная ОНС $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{n_0}$ называется *максимальной системой* собственных векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям оператора $\hat{A}$.

2. Если в пространстве $M^{\perp} = \operatorname{Ker} \widehat{A}$ существует ОНБ $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{m_0}$, то, дополняя ОНС $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{n_0}$ системой $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{m_0}$, получим ОНБ во всем пространстве *E*.

## ***<u>15.6. Решение линейных уравнений с самосопряженным, вполне непрерывным оператором</u>***

В евклидовом пространстве *E* рассмотрим *уравнение Фредгольма второго рода* с вполне непрерывным, самосопряженным оператором $\hat{A}$:

$$x = \mu \hat{A} x + f, \tag{15.1}$$

где $\mu \in C$, а $f \in E$ – заданный элемент.

Пусть $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{n_0}$ – максимальная ОНС собственных векторов оператора $\hat{A}$, отвечающая собственным значениям $\left\{\lambda_k\right\}_{k=1}^{n_0}$, записанным с учетом кратностей в порядке убывания их модулей. По теореме Гильберта–Шмидта получаем: $x' \in \operatorname{Ker} \widehat{A}$ $\forall x \in E$, $x' \in \operatorname{Ker} \widehat{A} \Rightarrow$

$$x = x' + \sum_{k=1}^{n_0} \left(x, e_k\right) e_k \quad ; \qquad \hat{A}x = \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k \left(x, e_k\right) e_k .$$

Теперь уравнение (15.1) запишется в виде: $x = f + \mu \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k \left(x, e_k\right) e_k$.

Умножая скалярно обе части этого равенства на $e_n$ и обозначая $\left(x, e_n\right) = x_n$, получим, что для того, чтобы элемент $x \in E$ был бы решением (15.1), необходимо и достаточно выполнения равенств:

$$\left(1 - \mu\lambda_n\right)(x, e_n) = \left(f, e_n\right), \quad n = 1, 2, \ldots, n_0. \tag{15.2}$$

Возможны *два случая*.

1. $\forall n \Rightarrow \ 1 - \mu\lambda_n \neq 0$. Тогда уравнение (15.1) *имеет и притом единственное решение,* удовлетворяющее соотношениям $(x, e_n) = \left(f, e_n\right) / \left(1 - \mu\lambda_n\right)$, $n = 1, 2, \ldots, n_0$. Тогда решение задается формулой:

$$x = \mu \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\lambda_k \left(f, e_k\right)}{1 - \mu\lambda_k} e_k + f. \tag{15.3}$$

Отметим, что в этом случае *однородное уравнение*:

$$x = \mu \hat{A} x \tag{15.1$'$}$$

имеет *лишь нулевое решение*.

2. $\exists i$: $1 - \mu\lambda_i = 0$, т.е. $\mu = \lambda_i^{-1}$. Пусть выбран наименьший из таких номеров. Тогда если $\lambda_i$ – собственное значение *A кратности* $s$, т.е. $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \ldots = \lambda_{i+s-1}$, а $e_i$, $e_{i+1}, \ldots, e_{i+s-1}$ – соответствующие собственные векторы, то из (15.2) следует, что при $n = i$, $i+1$, $i+2, \ldots$, $i+s-1$ эти уравнения *разрешимы тогда и только тогда, когда выполнены равенства:* $\left(f, e_n\right) = 0$ для $n = i$, $i+1, \ldots$, $i+s-1$. Это означает, что *правая часть ортогональна всем решениям* (15.1′) с $\mu = \lambda_i^{-1}$. При выполнении этого условия получаем, что

$$x_i = C_1, \ x_{i+1} = C_2, \ldots, \ x_{i+s-1} = C_s \ -$$

произвольные числа, а решение (15.1) имеет вид:

$$x = f + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, \ldots, i+s-1}}^{n_0} \frac{\lambda_k \left(f, e_k\right)}{\lambda_i - \lambda_k} e_k + C_1 e_i + \ldots + C_\Delta e_{i+s-1} \tag{15.4}$$

***Замечание.*** Полученные формулы (15.3) и (15.4) называются *формулами Шмидта*. Попутно мы *доказали теоремы Фредгольма* в рассматриваемом случае.

## § 16. Интегральные операторы в $CL_2(G)$

В этом параграфе в евклидовом пространстве:

$$CL_2(G)=\left\{x(t):\ x\in C\left(\overline{G}\right),\ \|x\|_{L_2}=\left(\int\limits_G |x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

где $G\subset R^n$ – ограниченная область, рассматриваются операторы $\hat{K}$ и $\hat{K}_\alpha$:

$$\left(\hat{K}x\right)(t)=\int\limits_G K(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau, \tag{16.1}$$

$$\left(\hat{K}_\alpha x\right)(t)=\int\limits_G \frac{K(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha}\,x(\tau)\,d\tau, \tag{16.2}$$

где, как и раньше, $K(t,\tau)\in C\left(\overline{G}\times\overline{G}\right)$, $0<\alpha<n$. Ранее было доказано, что $\hat{K}\left(\hat{K}_\alpha\right)$: $C\left(\overline{G}\right)\to C\left(\overline{G}\right)$, а тем более и $\hat{K}\left(\hat{K}_\alpha\right)$: $CL_2(G)\to CL_2(G)$. Отметим, что $CL_2(G)$ – *неполное* евклидово пространство.

### ***16.1. Самосопряженность интегральных операторов***

***Утверждение 16.1.*** Оператор $\hat{K}^*\left(\hat{K}_\alpha^*\right)$ существует и является интегральным оператором с ядром $K^*(t,\tau)=\overline{K(\tau,t)}$ $\left(K_\alpha^*(t,\tau)=\dfrac{\overline{K(\tau,t)}}{|t-\tau|^\alpha}\right)$.

*Доказательство.* Для любых $x, y$ из пространства $CL_2(G)$ выполняется:

$$\left(\hat{K}x, y\right) = \int_G \left(\hat{K}x\right)(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_G \left(\int_G K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau\right)\times$$

$$\times\overline{y(t)}\,dt = \int_G x(\tau)\left(\overline{\int_G \overline{K(t,\tau)}\,y(\tau)\,d\tau}\right)d\tau = \left(x, \hat{K}^* y\right),$$

где $$\left(\hat{K}^* x\right)(t) = \int_G \overline{K(t,\tau)}\,y(\tau)\,d\tau = \int_G K^*(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, $K^*(t,\tau) = \overline{K(\tau,t)}$. Аналогично доказывается и для оператора $\hat{K}_\alpha$.

***Следствие.*** Оператор $\hat{K}\left(\hat{K}_\alpha\right)$ *самосопряжен* в том и только в том случае, если $K(t,\tau) = \overline{K(\tau,t)}$, т.е. ядро $K(t,\tau)$ *эрмитово симметрично*.

## *16.2. Полная непрерывность интегральных операторов*

***Теорема 16.1.*** Операторы $\hat{K}$ и $\hat{K}_\alpha$ являются *вполне непрерывными* операторами в $CL_2(G)$.

*Доказательство.* Так как $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C\left(\overline{G}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|x_n - x_m\|_{L_2} = \left\{\int_G |x_n(t) - x_m(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}} \le \|x_n - x_m\|_C \sqrt{\mu(G)},$$

то всякое множество, относительно компактное в $C\left(\overline{G}\right)$, тем более относительно компактно в $CL_2(G)$. Таким образом, достаточно показать, что $\hat{K}$ переводит *всякое ограниченное в* $CL_2(G)$ *множество в множество относительно компактное в* $C\left(\overline{G}\right)$.

Пусть $B \subset CL_2(G)$, такое, что $\exists M > 0:\ \forall x \in B \Rightarrow \|x\|_{L_2} \le M$. Обозначим $L = \sup\limits_{t,\tau \in G} |K(t,\tau)|$. Тогда $\forall x \in B$ справедливы оценка:

$$\left|\left(\hat{K}x\right)(t)\right| \le \int\limits_G |K(t,\tau)|\,|x(\tau)|\,d\tau \le L\int\limits_G |x(\tau)|\cdot 1 d\tau \le$$

$$\le L\sqrt{\mu(G)}\,\|x\|_{L_2} \le ML\sqrt{\mu(G)},$$

а тогда и $\left\|\hat{K}x\right\|_C \le ML\sqrt{\mu(G)}$ $\forall x \in B$, т.е. $\hat{K}B$ – *равномерно ограниченное* в $C\left(\overline{G}\right)$ множество.

Далее: $\left|\left(\hat{K}x\right)(t_1) - \left(\hat{K}x\right)(t_2)\right| \le \int\limits_G \left|K(t_1,\tau) - K(t_2,\tau)\right|\,|x(\tau)|\,d\tau \le$

$$\le \left\{\int\limits_G \left|K(t_1,\tau) - K(t_2,\tau)\right|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}} \|x(\tau)\|_{L_2}.$$

В силу равномерной непрерывности $K(t,\tau)$ на $\overline{G}\times\overline{G}$ получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall\left((t_1,\tau),(t_2,\tau) \in \overline{G}\times\overline{G}:\ |t_1 - t_2| < \delta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|K(t_1,\tau) - K(t_2,\tau)\right| < \frac{\varepsilon}{M\sqrt{\mu(G)}}.$$

Но тогда для таких $(t,\tau) \Rightarrow \sup\limits_{x\in B}\left|\left(\hat{K}x\right)(t_1) - \left(\hat{K}x\right)(t_2)\right| < \varepsilon$, т.е. $\hat{K}B$ равностепенно непрерывно. Следовательно, множество $\hat{K}B$ относительно компактно в $C\left(\overline{G}\right)$, а тогда и в $CL_2(G)$. Поэтому оператор $\hat{K}:\ CL_2(G) \to CL_2(G)$ – вполне непрерывный оператор.

<u>*Упражнение*</u>. Доказать теорему для оператора $\hat{K}_\alpha$.

## ***16.3. Свойства вполне непрерывного, самосопряженного интегрального оператора в*** $CL_2(G)$

В качестве следствий полученных ранее результатов сформулируем следствие свойства операторов $\hat{K}$ и $\hat{K}_\alpha$ в случае, когда $K(t,\tau)=\overline{K(\tau,t)}\in C\left(\overline{G}\times\overline{G}\right)$.

***Утверждение 16.2.*** Если $K(t,\tau)=\overline{K(\tau,t)}\in C\left(\overline{G}\times\overline{G}\right)$, то для интегрального оператора $\hat{K}$ (и аналогично для $\hat{K}_\alpha$) справедливы следующие утверждения.

1. Оператор $\hat{K}$ имеет по крайней мере одно собственное значение λ, удовлетворяющее равенству:

$$|\lambda|=\sup_{\|x\|_{L_2}=1}\left|\int_G\int_G K(t,\tau)x(\tau)\overline{x(t)}\,dt\,d\tau\right|.$$

Это собственное значение является наибольшим по модулю среди всех собственных значений оператора $\hat{K}$.

2. Собственные числа оператора $\hat{K}$ действительны. Собственные функции, отвечающие различным собственным числам, ортогональны.

3. Если $\lambda_k\neq 0$ – собственное значение, то $\mu_k=\lambda_k^{-1}$ называется *характеристическим значением* $\hat{K}$. Тогда каждое характеристическое число имеет *конечную кратность*.

4. На любом отрезке $[a,b]$ лежит *конечное число* характеристических чисел оператора $\hat{K}$. Если оператор $\hat{K}$ имеет бесконечно много характеристических чисел $\mu_k$, то $\mu_k\to\infty$ при $k\to\infty$.

5. ***Теорема 16.2 (Гильберта–Шмидта).*** Существует ОНС $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n_0}$, состоящая из собственных функций $\hat{K}$, отвечающих характеристическим значениям $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_0}$, такая, что

$$\forall x\in CL_2(G)\Rightarrow\ x=\sum_{k=1}^{n_0}\left(x,\varphi_k\right)\varphi_k+x'(t),$$

$$\left(\hat{K}x\right)(t)=\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{\mu_k}\left(x,\varphi_k\right)\varphi_k\,,$$

где $x'(t)\in \operatorname{Ker}\widehat{K}$, $n_0\le+\infty$ (если $n_0=+\infty$, то ряды сходятся в $CL_2(G)$).

6. Получим одно *усиление* теоремы Гильберта–Шмидта для интегрального оператора $\hat{K}$.

***<u>Определение 16.1.</u>*** Функция $f$ называется *истокообразно представимой* через ядро $K(t,\tau)$, если $\exists h\in CL_2(G)$:

$$f(t)=\int_G K(t,\tau)h(\tau)\,d\tau\,.$$

***<u>Теорема 16.3 (Гильберта).</u>*** Если $f$ истокообразно представима через эрмитово симметричное, непрерывное ядро $K(t,\tau)$, то ее ряд Фурье по максимальной ОНС собственных функций оператора $\hat{K}$ сходится к $f$ *абсолютно* и *равномерно на* $\overline{G}$.

*<u>Доказательство.</u>* Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – максимальная ОНС собственной функции оператора $\hat{K}$, отвечающая характеристическим значениям $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$. По теореме Гильберта–Шмидта получаем, что

$$\forall h\in CL_2(G)\Rightarrow\ h(t)=h_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(h,\varphi_k\right)\varphi_k(t)\,,\quad h_0\in\operatorname{Ker}\widehat{K}\,,$$

$$\left(\hat{K}h\right)(t)=f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(h,\varphi_k\right)}{\mu_k}\varphi_k(t)\,,\qquad(16.1)$$

где ряд в (16.1) сходится к $f$ в $CL_2(G)$. Докажем, что на самом деле сходимость ряда (16.1) равномерная на $\overline{G}$ (и абсолютная). Так как

$$\frac{\overline{\varphi_k(t)}}{\mu_k}=\int_G\overline{K(t,\tau)}\;\overline{\varphi_k(\tau)}\,d\tau$$

суть *коэффициенты Фурье* функции $\overline{K(t,\tau)}$ по ОНС $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, то согласно неравенству Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\overline{\varphi_k(t)}}{\mu_k}\right|^2 \le \int_G \left|\overline{K(t,\tau)}\right|^2 d\tau, \quad \forall t \in \overline{G},$$

и тогда:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|(h,\varphi_k)\right|\frac{\varphi_k(t)^2}{|\mu_k|} \le \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|(h,\varphi_k)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(t)|^2}{\mu_k^2}\right\} \le$$

$$\le \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|(h,\varphi_k)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_G |K(t,\tau)|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in G}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|(h,\varphi_k)\right|\frac{|\varphi_k(t)|}{|\mu_k|} \le \sup_{t\in\overline{G}}\int_G |K(t,\tau)|^2 d\tau \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|(h,\varphi_k)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 0,$$

т.е. ряд (16.1) сходится абсолютно и равномерно на $\overline{G}$.

## ***16.4. Положительно определенные операторы***

***Определение 16.2.*** Оператор $A$ в евклидовом пространстве $E$ называется *положительно (неотрицательно) определенным* если

$$\forall x \in E \Rightarrow \ (Ax,x) > 0 \quad (\ \forall x \in E \Rightarrow \ (Ax,x) \ge 0\ ).$$

***Определение 16.3.*** *Ядро* $K(t,\tau)$ $\left(K_\alpha(t,\tau)\right)$ интегрального оператора $\hat{K}\left(\hat{K}_\alpha\right)$ называется *положительно определенным*, если $\hat{K}\left(\hat{K}_\alpha\right)$ – положительно определенный оператор в $CL_2(G)$.

***Теорема 16.4.*** Пусть $E$ – евклидово пространства над полем комплексных чисел. Тогда оператор $\hat{A}$ *самосопряжен* в $E$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E \Rightarrow \ \left(\hat{A}x,x\right) \in R$.

*Доказательство.* 1. Если $\hat{A}$ самосопряжен в $E$, то $\forall x \in E \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\hat{A}x, x\right) = \left(x, \hat{A}x\right) = \left(\overline{\hat{A}x, x}\right) \Rightarrow \left(\hat{A}x, x\right) \in R$.

2. Обратно, если $\forall z \in E \Rightarrow \left(\hat{A}z, z\right) \in R$, то

$$\operatorname{Re}\left[\left(\hat{A}y, x\right) - \left(\hat{A}x, y\right)\right] = \operatorname{Re}\frac{1}{i}\left[\left(\hat{A}(x+iy), x+iy\right) - \left(\hat{A}x, x\right) - \left(\hat{A}x, y\right)\right] = 0;$$

т.е. $\operatorname{Re}\left(\hat{A}y, x\right) = \operatorname{Re}\left(\hat{A}x, y\right)$.

$$\operatorname{Im}\left[\left(\hat{A}y, x\right) + \left(\hat{A}x, y\right)\right] = \operatorname{Im}\left[\left(\hat{A}(x+y), x+y\right) - \left(\hat{A}x, x\right) - \left(\hat{A}y, y\right)\right] = 0,$$

т.е. $\operatorname{Im}\left(\hat{A}y, x\right) = -\operatorname{Im}\left(\hat{A}x, y\right)$.

Отсюда $\forall x,\ y \in E \Rightarrow \left(\hat{A}y,\ x\right) = \operatorname{Re}\left(\hat{A}y,\ x\right) + i\operatorname{Im}\left(\hat{A}y,\ x\right) =$ $= \operatorname{Re}\left(\hat{A}x, y\right) - i\operatorname{Im}\left(\hat{A}x, y\right) = \left(y, \hat{A}x\right)$, т.е. $\hat{A} = \hat{A}^*$.

***Теорема 16.5.*** Если непрерывное ядро $K(t,\tau)$ $\left(K_\alpha(t,\tau)\right)$ положительно определено, то:

1) zдро эрмитово симметрично, т.е. $K(t,\tau) = \overline{K(\tau,t)}$;

2) $K(t,t) \geq 0$ для $\forall t \in \overline{G}$.

*Доказательство.* 1. Следует из теоремы 16.4, так как $\hat{A}$ в этом случае $\hat{K}\left(\hat{K}_\alpha\right)$ – самосопряженный оператор.

2. Так как $K(t,t) = \overline{K(t,t)}$, то $K(t,t) \in R$ для $\forall t \in \overline{G}$.

Допустим, что $\exists t_0 \in \overline{G}$: $K\left(t_0, t_0\right) < 0$. Тогда в силу непрерывности $K(t,\tau)$ можно считать, что $t_0 \in G$, т.е. $t_0$ – внутренняя точка, и что

$$\exists U_\delta\left(t_0\right) = \left\{t:\ \left|t - t_0\right| < \delta\right\}:\ \forall (t,\tau) \in U_\delta\left(t_0\right) \Rightarrow \operatorname{Re}K(t,\tau) < 0.$$

Тогда берем $f \in C\left(\overline{G}\right)$: $f(t) > 0$ в $U_\delta\left(t_0\right)$ и $f(t) \equiv 0$ вне $\overline{U_\delta\left(t_0\right)}$. Тогда

$$\left(\hat{K}f, f\right) = \int_G\int_G K(t,\tau) f(t)\overline{f(\tau)}\,dt\,d\tau = \operatorname{Re}\int_G\int_G K(t,\tau) f(t) f(\tau)\,dt\,d\tau =$$

$$= \int_G\int_G \operatorname{Re}K(t,\tau) f(t) f(\tau)\,dt\,d\tau < 0,$$

что противоречит положительной определенности ядра $K(t,\tau)$. Следовательно, $K(t,t)\geq 0$ для всех $t\in\overline{G}$.

## ***16.5. Билинейное разложение эрмитово симметричного ядра***

***Лемма 16.1 (Дини).*** Пусть $G\subset\mathbb{R}^n$ − ограниченная область, а $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ таковы, что:

1) $\forall n \Rightarrow f_n\in C(\overline{G})$;

2) $\forall x\in\overline{G} \Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонны по $n$;

3) $\forall x\in\overline{G} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\in C(\overline{G})$.

Тогда $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на $\overline{G}$.

*Доказательство.* Пусть

$$G_1=\left\{x\in\overline{G}:\ \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\uparrow,\ m.e.\ f_n(x)\leq f_{n+1}(x),\ n=1,2,\ldots\right\}.$$

Тогда в силу непрерывности $f_n(x)$ на $\overline{G} \Rightarrow G_1=\overline{G}_1$ − замкнутое множество. Докажем, что $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на $\overline{G}_1$. Обозначим $\varphi_n(x)=f(x)-f_n(x)\geq 0$, очевидно $\varphi_n(x)\downarrow 0$, $\varphi_n\in C(\overline{G}_1)$. Положим $\alpha_n=\sup\limits_{x\in\overline{G}_1}\varphi_n(x)$, очевидно также, что $\alpha_n\downarrow 0$.

Требуется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha>0$. Тогда, так как

а) $\forall n \Rightarrow \exists x_n\in\overline{G}_1:\ \alpha_n=\sup\limits_{x\in\overline{G}_1}\varphi_n(x)=\varphi_n(x_n)\downarrow$;

б) $\overline{G}_1$ ограничена и замкнута, то

$$\exists\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\subseteq\{x_n\}_{n=1}^{\infty}:\ \Rightarrow x_{n_k}\to x_0\in\overline{G}_1,\ \ \varphi_{n_k}(x_{n_k})=\alpha_{n_k}\searrow\ \alpha>0.$$

С другой стороны, так как $x_{n_k}\to x_0$ при $k\to\infty$, то из следующей двойной последовательности видим:

$$\alpha_{n_2}\ \ldots\ \geq\ \alpha_{n_k}\ \ldots;$$

$$\varphi_{n_1}(x_{n_1}),\ \varphi_{n_1}(x_{n_2})\ \dots\ \varphi_{n_1}(x_{n_k})\ \dots\ \to\ \varphi_{n_1}(x_0)\ge\alpha;$$
$$\varphi_{n_2}(x_{n_1}),\ \varphi_{n_2}(x_{n_2})\ \dots\ \varphi_{n_2}(x_{n_k})\ \dots\ \to\ \varphi_{n_2}(x_0)\ge\alpha\ ;$$
$$\dots;$$
$$\varphi_{n_k}(x_{n_1}),\ \varphi_{n_k}(x_{n_2})\ \dots\ \varphi_{n_k}(x_{n_k})\ \dots\ \to\ \varphi_{n_k}(x_0)\ge\alpha\ ,$$
$$\downarrow$$
$$0$$

т.е. по строкам $\varphi_{n_k}(x_{n_j})\to\varphi_{n_k}(x_0)\ge\alpha>0$ для любого $n_k$, а с другой стороны, $\varphi_{n_k}(x_0)\to 0$. Полученное противоречие показывает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sup\limits_{x\in\overline{G}_1}\varphi_n(x)\right\}=0$, т.е. $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на $\overline{G}_1$. Аналогично доказывается, что $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на $\overline{G\setminus G_1}$.

***<u>Теорема 16.6.</u>*** Эрмитово симметричное, непрерывное ядро $K(t,\tau)$ разлагается в билинейный ряд по своим собственным функциям:

$$K(t,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)\overline{\varphi_k(\tau)}}{\mu_k},\qquad(16.2)$$

сходящийся в $CL_2(G)$ равномерно по $\tau$ в $\overline{G}$, что означает

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\tau\in\overline{G}}\left\|K(\cdot,\tau)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(\cdot)\overline{\varphi_k(\tau)}}{\mu_k}\right\|_{L_2(G)}=0.\qquad(16.3)$$

*<u>Доказательство.</u>* $\forall\tau\in\overline{G}\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ (K(\cdot,\tau),\varphi_k)_{L_2(G)}=\int_G K(t,\tau)\overline{\varphi_k(t)}dt\ =\ \overline{\int_G K(\tau,t)\varphi_k(t)dt}=\frac{\varphi_k(\tau)}{\mu_k}\ -$$

коэффициенты Фурье. В силу минимального свойства коэффициентов Фурье, получаем:

$$\left\| K(\cdot,\tau) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(\cdot)\overline{\varphi_k(\tau)}}{\mu_k} \right\|^2_{L_2(G)} = \int_G |K(t,\tau)|^2 dt - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 |\varphi_k(\tau)|^2, \ \lambda_k = \frac{1}{\mu_k}.$$

Дополняя ортонормированную систему функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ до ортонормированного базиса в $CL_2(G)$ элементами *из ядра оператора* $\hat{K}$, получим, что $\forall \tau \in \overline{G} \Rightarrow \int_G |K(t,\tau)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\varphi_k(\tau)|^2$, где при всех добавленных элементах собственные числа $\lambda = 0$.

Это означает, $\forall \tau \in \overline{G} \Rightarrow \left( \int_G |K(t,\tau)|^2 dt - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 |\varphi_k(\tau)|^2 \right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, и тогда выполняется следующее:

1) $\forall \tau \in \overline{G} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi_k(\tau)|^2}{\mu_k^2} = f_n(\tau) \uparrow$ по $n$;

2) $f_n(\tau) \in C(\overline{G})$ для $\forall n$;

3) $\forall \tau \in \overline{G} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f_n(\tau) = \int_G |K(t,\tau)|^2 dt \in C(\overline{G})$.

Используя лемму Дини, получаем, что сумма $\sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi_k(\tau)|^2}{\mu_k^2}$ сходится равномерно на $\overline{G}$ к интегралу $\int_G |K(t,\tau)|^2 dt$, и тогда справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\tau\in\overline{G}} \left\| K(\cdot,\tau) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(\cdot)\overline{\varphi_k(\tau)}}{\mu_k} \right\|_{L_2(G)} = 0.$$

***<u>Теорема 16.7 (Мерсера).</u>*** Если ядро $K(t,\tau)$ непрерывно на $\overline{G}\times\overline{G}$, эрмитово симметрично и положительно определено, то его билинейный ряд (16.2) сходится абсолютно и равномерно к $K(t,\tau)$ на $\overline{G}\times\overline{G}$.

*Доказательство.* По теореме 16.6 имеем $K(t,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)\overline{\varphi_k(\tau)}}{\mu_k}$ и этот ряд сходится в $CL_2(G)$ равномерно по $\tau$ в $\overline{G}$.

Теперь у нас $0<\mu_1 \le \mu_2 \le \ldots \le \ldots$ . Далее, имеем: $\forall \tau \in \overline{G} \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 \le K(\tau,\tau) \le M$ = const, $K(\tau,\tau) \in C(\overline{G})$. Тогда все ядра вида $K_n(t,\tau)=K(t,\tau)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)\overline{\varphi_k(\tau)}}{\mu_k}$ также непрерывны, эрмитово симметричны и положительно определены. Согласно теореме 16.5

$$K_n(\tau,\tau)=K(\tau,\tau)-\sum_{k=1}^{n}\frac{|\varphi_k(\tau)|^2}{\mu_k} \ge 0\ ,\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{|\varphi_k(\tau)|^2}{\mu_k} \le K(\tau,\tau) \le \mathrm{M}\ ,$$

и, следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(\tau)|^2}{\mu_k}$ сходится при $\forall \tau \in \overline{G}$ . Теперь, используя неравенство Коши–Буняковского, получаем:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)\overline{\varphi_k(\tau)}}{\mu_k} \le \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(t)|^2}{\mu_k}\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(\tau)|^2}{\mu_k}\right\}^{1/2},$$

$$\limsup_{n\to\infty}\ \sup_{\tau\in\overline{G}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)\overline{\varphi_k(\tau)}}{\mu_k} \le M\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(\tau)|^2}{\mu_k}\right\}^{1/2} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ для } \forall \tau \in \overline{G}.$$

Получили, что ряд (16.2) при $\forall \tau \in \overline{G}$ сходится равномерно по $t$ на $\overline{G}$. Но тогда в (16.2) *можно положить* $t=\tau$ и получаем справедливость утверждения теоремы.

# III. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

## § 17. Основные определения, свойства интеграла Лебега

***Определение 17.1.*** Множество $A \subset R^n$ имеет меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ множество может быть покрыто шарами с суммой объемов, не превышающей $\varepsilon$.

*Упражнение.*

1. Доказать, что в этом случае число шаров не более, чем счетно.

2. Ограниченная, кусочно-гладкая поверхность $S$ имеет меру нуль.

***Определение 17.2.*** Говорят, что некоторое свойство выполнено почти всюду (п.в.) в области $G$, если мера множества точек, в которых это свойство не имеет места, равна нулю.

***Определение 17.3.*** Функция называется кусочно-непрерывной в $R^n$, если существует конечное или счетное число областей $\{G_k\}_{k=1}^{n_0}, n_0 \le +\infty$, в которых функция $f \in C\left(\overline{G_k}\right)$ и выполняется следующее:

1) $G_k \cap G_m \ne \varnothing,\ k \ne m$;

2) любой шар $K_R(M)$ покрывается конечным числом замкнутых областей $\overline{G_k}$.

Функция называется кусочно-непрерывной в $\overline{G_k} \subset R^n$, если доопределенная нулем в $R^n \setminus \overline{G}$ она остается кусочно-непрерывной в $R^n$.

***Определение 17.4.*** Кусочно-непрерывную функцию будем называть финитной, если она равна тождественно нулю вне некоторого шара.

Очевидно, что если рассматривается финитная, кусочно-непрерывная функция, то число областей $G_k$ в определении 17.3 можно взять конечным.

Введем обозначения:

$\operatorname{supp} f(x) = \left\{x \in R^n : f(x) \ne 0\right\}$ – *носитель функции f*;

$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A; \\ 0, x \notin A \end{cases}$ – характеристическая функция множества $A$;

$Q\left(\overline{G}\right)$ – множество всех кусочно-непрерывных в $\overline{G}$ функций;

$Q_0\left(R^n\right)$ – множество всех кусочно-непрерывных в $R^n$ функций, имеющих компактный носитель, т.е. финитных.

***<u>Определение 17.5.</u>*** Заданная во всем $R^n$ функция называется измеримой, если существует последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Q(R^n)$, такая, что $f \overset{п.в.}{=} \lim\limits_{k\to\infty} f_k$.

Множество $A \subset R^n$ называется измеримым, если функция $\chi_A(x)$ измерима.

Заданная на множестве $A$ функция $f(x)$ называется измеримой, если множество $A$ измеримо, а доопределенная нулем на $R^n \setminus A$ функция $f$ также остается измеримой.

*<u>Упражнение.</u>*

1. Если $f$, $g$ и измеримые в $R^n$ функции, то $cf$, $f+g$, $fg$, $|f|$, $\max(f, g)$, $\dfrac{f}{g}$ $(g(x) \neq 0)$ – также измеримые в $R^n$ функции.

2. Если $A$, $B$ – измеримые множества, то $A \bigcup B, A \cap B, A \setminus B, R^n \setminus A = CA$ – также измеримые множества.

3. Если $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых на $A$ функций и $f_k \to f$ п.в. на $A$, то $f$ измерима на $A$.

***<u>Определение 17.6.</u>*** Пусть $f(x)$ – определенная на всем $R^n$ неотрицательная, измеримая и п.в. конечная функция и неубывающая последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Q_0(R^n)$ таковы, что:

а) $f_k \to f$, п.в.;

б) $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{R^n} f_k(x)dx < \infty$.

Тогда функция называется интегрируемой по Лебегу (суммируемой), а число $\int\limits_{R^n} f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{R^n} f_k(x)dx$ ее интегралом Лебега.

***<u>Определение 17.7.</u>*** Для любой определенной в $R^n$, измеримой и почти всюду конечной функции $f(x)$, положим

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$

Тогда

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), |f(x)| = f^+(x) - f^-(x).$$

Функцию $f(x)$ *назовем* интегрируемой по Лебегу, если $f^+$, $f^-$ – интегрируемые функции и по определению

$$\int\limits_{R^n} f(x)dx = \int\limits_{R^n} f^+(x)dx - \int\limits_{R^n} f^-(x)dx.$$

***<u>Определение 17.8</u>***. Функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на измеримом множестве $A$, если функция $f(x)\chi_A(x)$ интегрируема по Лебегу, а число

$$\int\limits_{R^n} f(x)\chi_A(x)dx = \int\limits_{A} f(x)dx$$

называется интегралом Лебега от $f(x)$ по множеству $A$.

Из определения 17.6 следуют свойства.

1. Функции $f(x)$ и $|f(x)|$ одновременно интегрируемы по Лебегу и при этом

$$\left|\int\limits_{R^n} f(x)dx\right| \le \int\limits_{A} |f(x)|\,dx.$$

2. Интеграл Лебега линеен.

Более сложно устанавливаются следующие свойства.

3. Определение интеграла корректно, т.е. не зависит от выбора в пункте 1 определения 17.6 последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Q(G)$, удовлетворяющей перечисленным свойствам.

4. Всякая ограниченная, измеримая функция, определенная во всем $R^n$, интегрируема по любому ограниченному, измеримому множеству $A$. В частности, для любого ограниченного, измеримого множества $A$ определен интеграл

$$\int_A dx = \int_{R^n} \chi_A(x)dx = \mu A,$$

называемый мерой Лебега (измеримого) множества $A$.

5. Если функции $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы по Риману на $A$ (возможно в несобственном смысле), то $f(x)$ интегрируема по Лебегу и оба интеграла совпадают.

***<u>Пример. 17.1.</u>*** Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, x - \text{рациональное из } [0,1]; \\ 0, x - \text{иррациональное из } [0,1] \end{cases}$$

не интегрируема по Риману, но интегрируема по Лебегу и ее интеграл Лебега равен нулю.

В самом деле, неубывающая последовательность

$$f_k(x) \overset{\text{п.в.}}{\equiv} 0$$

на $R^1$ сходится к $D(x)\chi_{[0,1]}(x)$, равной тождественно нулю вне [0, 1], так как мера множества всех рациональных точек отрезка равна нулю.

По определению, если $A = [0, 1]$, то

$$\int_0^1 D(x)dx = \int_{R^1} D(x)\chi_A(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{R^1} f_k(x)dx = 0.$$

6. Аддитивное свойство интеграла. Если

$$A = \bigcup_n A_n, A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq j \text{, то } \int_A f(x)dx = \sum_n \int_{A_n} f(x)dx,$$

причем из существования интеграла в левой части вытекает существование интегралов и абсолютная сходимость ряда в правой части.

7. Если $A = \bigcup_n A_n, A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и ряд $\sum_n \int_{A_n} |f(x)|\,dx$ сходится, то функция $f$ интегрируема на множестве $A$ и

$$\int_A f(x)dx = \sum_n \int_{A_n} f(x)dx.$$

8. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Если $f$ суммируема на $A$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \forall e \in A, \mu(e) < \delta : \left| \int_e f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Наконец, приведем три теоремы, играющие важную роль в теоретических вопросах. В дальнейшем $A$ – измеримое множество.

9. ***<u>Теорема 17.2 (Лебега).</u>*** Если $f_k \to f$ п.в. на $A$ и при всех $n$ выполнено неравенство $|f_n(x)| \le \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – интегрируемая на $A$ функция, то предельная функция $f(x)$ также интегрируема на множестве $A$ и $\int_A f_k(x)dx \to \int_A f(x)dx,\ k \to \infty.$

10. ***<u>Теорема 17.3 (Беппо Леви).</u>*** Пусть п.в. на $A$ выполнены неравенства

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_k(x) \le \ldots,$$

причем функции $f_k(x)$ интегрируемы и их интегралы ограничены в совокупности. Тогда почти всюду на $A$ существует конечный предел $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$, причем функция $f$ интегрируема на $A$ и

$$\int_A f_k(x)dx \to \int_A f(x)dx, k \to \infty.$$

11. ***<u>Теорема 17.4 (Фату).</u>*** Пусть $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых, неотрицательных на множестве $A$ функций – такова, что:

а) $f_k \to f$ п.в. на $A$;

б) $\exists M > 0 \forall k : \int_A f_k(x)dx \le M$.

Тогда $f$ также интегрируема на $A$ и $\int_A f(x)dx \le M$.

***<u>Определение 17.9.</u>*** $f_k \to f$ по мере, если

$$\forall \sigma > 0 : \lim_{k\to\infty} \mu\{x : |f_k(x) - f(x)| \ge \sigma\} = 0.$$

Между сходимостью по мере и п.в. имеется следующая связь.

***<u>Теорема 17.5.</u>***

1. Если $f_k \to f$ п.в. на $A$, то $f_k \to f$ по мере.

2. Если $f_k \to f$ по мере, то существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$, сходящаяся п.в. на $A$ к $f(x)$.

Имеется связь между сходимостью п.в. и равномерной сходимостью.

***Теорема 17.6 (Егорова).*** Пусть $A$ – множества конечной меры и последовательность измеримых функций $f_k \to f$ п.в. на $A$. Тогда $\forall \delta > 0 \exists A_\delta \subseteq A$ измеримое и такое, что:

1) $\mu(A_\delta) > \mu(A) - \delta$;
2) $f_k(x) \to f(x)$ равномерно на $A_\delta$.

## *17.1. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры*

***Определение 17.10.*** Последовательность $\{A_k\}$ назовем исчерпывающей множество $A$, если все $A_k$ – измеримые, $\mu A_k < \infty$ и выполняется следующее:

1) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_k \subseteq \ldots$;
2) $A = \bigcup\limits_k A_k$ .

***Определение 17.11.*** Пусть $f$ определена на $A$. Функцию $f$ назовем суммируемой на $A$, если она суммируема на каждом измеримом подмножестве множества $A$ конечной меры и если для любой последовательности $\{A_k\}$, исчерпывающей $A$, существует

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{A_k} f(x)dx \overset{def}{=} \int\limits_A f(x)dx ,$$

конечный и не зависящий от выбора исчерпывающей последовательности. Этот предел называется интегралом Лебега от по $A$.

Отметим, что $|f|$ в этом случае также суммируема на $A$.

***Пример 17.2.*** Интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ существует (равен $\pi/2$) как несобственный интеграл Римана, но не существует (даже как несобственный) как интеграл Лебега.

## § 18. Пространство Лебега

***<u>Определение 18.1.</u>*** Пусть $G \subseteq R^n$ – измеримое множество. Тогда $L_p(G) = \{f$ – измеримая в $G$ функция: $\| f \|_{L_p(G)} < +\infty\}$, где

$$| f \|_{L_p(G)} = \| f \|_p == \left\{ \int_G | f(x) |^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

***<u>Теорема 18.1.</u>*** Для любого $p \in [1, +\infty), L_p(G)$ – нормированное пространство с нормой $\|.\|_p$.

*<u>Доказательство</u>*. Проверим, что $\| \cdot \|_p$ удовлетворяет всем свойствам нормы.

1. $\| f \|_p \geq 0, \| f \|_p = 0 \Leftrightarrow f = \theta$ в $L_p(G)$. Равенство $\| f \|_p = 0$ и является определением нуля в пространстве $L_p(G)$.

2. $\| cf \|_p = | c | \| f \|_p$.

3. Докажем, что справедливо неравенство треугольника: $\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$, которое в данном случае называется неравенством Минковского.

***<u>Лемма 18.1 (неравенство Гельдера).</u>*** Пусть $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Тогда, если $f(x)g(x)$ – суммируемая функция, то

$$\int_G | f(x)g(x) | \, dx \leq \| f \|_p \| g \|_q .$$

*<u>Доказательство.</u>* Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \dfrac{t^p}{p} + \dfrac{t^{-q}}{q}$, определенную на $(0, +\infty)$. Так как

$$\varphi'(t) = t^{p-1} - t^{-q-1} \begin{cases} < 0, & t \in (0, 1); \\ > 0, & t \in (1, +\infty), \end{cases}$$

то $t$=1 – точка минимума функции $\varphi(t)$. Положим $t = a^{1/q} b^{1/p}$, где $a > 0, b > 0$, из неравенства $\varphi(t) \geq 1$ получаем

$$1 \le \frac{1}{p} a^{p/q} b^{-1} + \frac{1}{q} b^{q/p} a^{-1}, ab \le \frac{1}{p} a^{p/q+1} + \frac{1}{q} b^{q/p+1} = a^{p/q} + b^{q/p}.$$

Таким образом, для любого $p \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ будет выполнено $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ для любых $a, b \in R_+$. Теперь, полагая $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$, имеем: $\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \le \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$. Интегрируя это неравенство по области $G$, получим нужное нам неравенство Гельдера $\int_G |f(x)g(x)|\,dx \le \|f\|_p \|g\|_q$.

***<u>Замечание 18.1.</u>*** Если $p = 2$, то получаем неравенство Коши–Буняковского–Шварца.

***<u>Следствие</u>***. Если $G = R^n, K_i -$ не пересекающиеся единичные кубы, $i = 1, 2, ..., N$, а функции $f$, $g$ таковы, что

$$f(x) = \begin{cases} a_i, & x \in K_i; \\ 0, & x \notin \bigcup_{i=1}^{N} K_i, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} b_i, & x \in K_i; \\ 0, & x \notin \bigcup_{i=1}^{N} K_i, \end{cases}$$

то неравенство Гельдера превращается в следующее неравенство Гельдера для сумм:

$$\sum_{i=1}^{N} |a_i b_i| \le \left( \sum_{i=1}^{N} |a_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^{N} |b_i|^q \right)^{1/q}.$$

*<u>Доказательство</u> (неравенства Минковского).* Если $p = 1$, то неравенство очевидно. Пусть $p > 1$. Тогда из неравенства Гельдера для сумм (при $N = 2$, $a_1 = f$, $a_2 = g$, $b_1 = b_2 = 1$) получаем:

$$|f(x) + g(x)| \le 2^{1/q} (|f(x)|^p + |g(x)|^p)^{1/p}.$$

Так как $\frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}, q(p-1) = p$, то отсюда

$$\left( |f(x) + g(x)|^{p-1} \right)^q \le 2^{p-1} (|f(x)|^p + |g(x)|^p),$$

получили

$$|f(x)+g(x)|^{p-1}\in L_q(G).$$

Но тогда, так как

$$|f(x)+g(x)|^p=|f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}+|g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1},$$

то, интегрируя по $G$ и применяя неравенство Гельдера, имеем:

$$\int_G |f(x)+g(x)|^p\,dx\le$$

$$\le\int_G |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx+\int_G ||g(x)|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx\le$$

$$\le\left(\left(\int_G |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_G |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\right)\left(\left(\int_G |f(x)+g(x)|^{\frac{q}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{q}}\right)=$$

$$=\left(\left(\int_G |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_G |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\right)\left(\left(\int_G |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\right),$$

откуда и получаем нужное неравенство:

$$\left(\int_G |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_G |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_G |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда также следует линейность $L_p(G), p\ge 1$.

***<u>Определение 18.2.</u>*** Нормированное пространство $(X,\|\cdot\|)$ называется полным, если всякая фундаментальная по норме $\|\cdot\|$ последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в $X$ к некоторому элементу $f\in X$.

***<u>Теорема 18.2 (Рисса–Фишера).</u>*** Пространство $L_p(G)$ – полное. Здесь $1\le p<\infty, G\subseteq R^n$ – измеримое множество.

*<u>Доказательство.</u>* Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – фундаментальная в $L_p(G)$ последовательность, т.е. $\forall\varepsilon>0\exists N>0\forall n,m>N:\|f_n-f_m\|_p<\varepsilon$. Выбираем номера $m_1<m_2<\ldots<m_k<\ldots$ таким образом, чтобы $\forall n>m_k:\|f_n-f_{m_k}\|_p<2^{-k}$, откуда, в частности, следует, что $\|f_{m_{k+1}}-f_{m_k}\|_p<2^{-k}$. Если $G_1\subseteq G$ – любое измеримое множество

конечной меры, то из неравенства Гельдера получаем, что $\int\limits_{G_1} | f_{m_{k+1}}(x) + f_{m_k}(x) |^p \, dx \le \| f_{m_{k+1}} + f_{m_k} \|_p \left(\mu(G_1)\right)^{\frac{1}{p}} < 2^{-k} \left(\mu(G_1)\right)^{\frac{1}{q}}$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{G_1} | f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x) | \, dx$ сходится. Отсюда по теореме Беппо-Леви и теореме Фату следует, что функции $f_{m_{n+1}}(x) - f_{m_1}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left( f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x) \right)$ будут сходиться п.в. на $G_1$ к некоторой интегрируемой на $G_1$ функции. Так как $G_1 \subseteq G$ – произвольное измеримое множество конечной меры, то получаем, что $f_{m_k}(x)$ п.в. на $G$ стремится к некоторой функции $f(x)$ (интегрируемой на $G$ локально).

Далее, так как $\| f_{m_k} \|_p \le \| f_{m_1} \|_p + \| f_{m_k} - f_{m_1} \|_p \le \frac{1}{2} + \| f_{m_1} \|_p$, то получаем, что $\exists M > 0 \forall k : \int\limits_G | f_{m_k}(x) |^p \, dx < M$. Отсюда по теореме Фату: $\int\limits_G | f(x) |^p \, dx < M$, т.е. $f \in L_p(G)$. Наконец, так как $\forall m > m_r, \forall k > r : \| f_{m_k} - f_m \|_p \le \| f_{m_k} - f_{m_r} \|_p + \| f_{m_r} - f_m \|_p < 2^{-r+1}$, то, переходя к пределу при $m_k \to +\infty$, получим: $\lim\limits_{k \to \infty} \| f_{m_k} - f_m \|_p = \| f - f_m \|_p < 2^{-r+1}$ для любого $m > m_r$. Это означает, что $f_k \to f$ в $L_p(G)$. Таким образом, $L_p(G)$ – полное нормированное (т.е. банахово) пространство.

***<u>Замечание 18.2.</u>*** Для нас особенно важным из лебеговых пространств $L_p(G)$ будут пространства $L_1(G)$ всех суммируемых на $G$ функций и гильбертово (т.е. полное евклидово) пространство $L_2(G)$. Скалярное произведение в $L_2(G)$ определяется как

$$(f, g) = \int\limits_G f(x) \overline{g(x)} dx .$$

***<u>Замечание 18.3</u>***. Символом $L_{1,loc}(G)$ обозначаем множество всех функций $f \in L_1(G)$, суммируемых на каждом компактном измери-

мом подмножестве $G_1 \subset G$. Этот класс будем называть классом локально суммируемых в $G$ функций. Отметим без доказательства следующее свойство пространств $L_p(G)$.

***<u>Теорема 18.3.</u>*** Множество $C_0^\infty(G)$ – множество бесконечно дифференцируемых в $R^n$ функций с носителем, лежащим в $G$, всюду плотно в $L_p(G), 1 \le p < \infty$, т.е.

$$\forall f \in L_p(G) \forall \varepsilon \exists \varphi \in C_0^\infty(G) : \| f - \varphi \|_p < \varepsilon .$$

*<u>Упражнение 18.1.</u>* Вычислить интеграл:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} f(x)dx$, где $f(x) = \begin{cases} \sin x, \ x \text{ рационально;} \\ \cos x, \ x \text{ иррационально;} \end{cases}$

б) $\int\limits_0^{\pi/2} f(x)dx$, где $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ если } \cos x \text{ рационально;} \\ \sin^2 x, \ \sin x \text{ иррационально.} \end{cases}$

*<u>Упражнение 18.2.</u>* Пусть $f \in L_1(G)$, а

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } |f(x)| < N; \\ N, \text{ если } |f(x)| \ge N. \end{cases}$$

Доказать, что $f_N(x)$ – интегрируемая на $G$ функция и

$$\lim_{N \to \infty} \int\limits_G f_N(x)dx = \int\limits_G f(x)dx .$$

## § 19. Пространства Соболева

### ***<u>19.1. Обобщенные производные</u>***

***<u>Определение 19.1.</u>*** Пусть $G \subseteq R^n$ – открытое множество, $f, g \in L_{1,loc}(G)$. Если

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(G) : \int\limits_G g(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|k|} \int\limits_G f(x)\varphi^{(k)}(x)dx , \qquad (19.1)$$

где $k=(k_1,k_2,...,k_n)$ – мультииндекс; $k_i \ge 0$ – целые числа, то функция $g$ называется обобщенной производной по Соболеву функции $f$ вида

$$f^{(k)}(x)=D^k f(x)=\frac{\partial^{|k|} f(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}},. \quad |k|=k_1+...k_n .$$

Отметим следующие свойства обобщенных производных.

1. Если $g(x)=f^{(k)}(x),\ h(x)=f^{(k)}(x)$ в $G$, то $g(x)=h(x)$ п.в. в $G$.

2. Если $\exists f^{(k)}(x),\ \exists h^{(k)}(x)$ в $G$, то

$$\exists Cf^{(k)}(x)+Dh^{(k)}(x)=\left(Cf(x)+Dh(x)\right)^{(k)} .$$

3. Если $f\in C^m(G)$, то

$$\forall k,|k|\le m \forall \varphi\in C_0^\infty(G):\int_G f^{(k)}(x)\varphi(x)dx=(-1)^{|k|}\int_G f(x)\varphi^{(k)}(x)dx .$$

Таким образом, если $f$ имеет в $G$ классическую производную $f^{(k)}(x)$, то она совпадает с обобщенной производной.

***<u>Примеры.</u>*** ***<u>19.1.</u>*** $f(x)=|x|, G=(-\infty,+\infty)$. Тогда для любой $\varphi\in C_0^\infty(R^1)$ будет выполнено

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,\varphi'(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)dx-\int_{0}^{\infty}\varphi'(x)dx=$$

$$=x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx-x\varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sign} x\ \varphi(x)dx.$$

Следовательно, существует $|x|'=\operatorname{sign} x.$

***<u>19.2.</u>*** $f(x)=\operatorname{sign} x, G=R^1=(-\infty,+\infty)$. Тогда для любой $\varphi\in C_0^\infty(R^1)$ будет

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sign} x\ \varphi'(x)dx=\int_{-\infty}^{0}\varphi'(x)dx-\int_{0}^{\infty}\varphi'(x)dx=$$

$$=\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0}-x\varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty}=2\varphi(0).$$

Таким образом, если существует $g \in L_{1,loc}(G)$, для которой равенство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx = 2\varphi(0)$ выполнено для всех $\varphi \in C_0^{\infty}(R^1)$, то это и есть производная от $\operatorname{sign} x$. Покажем, что такой функции нет.

В самом деле, для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ функция $\varphi(x)\cos nx \in C_0^{\infty}(R^1)$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)\cos nx\, dx = 2\varphi(0)$. По лемме Римана $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)\cos nx\, dx = 2\varphi(0)$. Взяв $\varphi(x)$, такую, что $\varphi(0) \neq 0$, приходим к противоречию.

*Вывод:* не всякая $f \in L_{1,loc}(G)$ имеет производную по Соболеву в смысле определения 19.1.

Получим еще одно важное свойство обобщенных производных.

***<u>Теорема 19.1.</u>*** Пусть функция $f \in L_p(G),\ 1 \le p < \infty,$ а $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ такова, что:

а) $\forall m : f_m \in L_p(G);$

б) $\forall m \exists f_m^{(k)} \in L_p(G), k = (k_1, k_2, \ldots, k_n).$

Тогда, если:

а) $f_m \to f$ в $L_p(G)$;

б) $\{f_m^{(k)}\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальна в $L_p(G)$,

то в $G$ существует $f^{(k)}$ и $f_m^{(k)} \to f^{(k)} \in L_p(G),\ m \to \infty$ в метрике пространства $L_p(G)$.

*<u>Доказательство.</u>* В силу полноты пространства $L_p(G)$ из фундаментальности $\{f_m^{(k)}\}_{m=1}^{\infty}$ в $L_p(G)$ следует, что существует $g \in L_p(G)$, такая, что $f_m^{(k)} \underset{m\to\infty}{\to} g$ в $L_p(G)$.

Далее, так как для любой $\varphi \in C_0^{\infty}(G)$ выполняется

$$\left| \int\limits_G \left( f_m^{(k)}(x) - g(x) \right) \varphi(x) \right| dx \le \| f_m^{(k)} - g \|_p \| \varphi \|_q \underset{m\to\infty}{\to} 0,$$

то для любой $\varphi \in C_0^\infty(G)$ будет справедливо соотношение

$$\int_G f(x)\varphi(x)dx = \lim_{m\to\infty}\int_G f_m^{(k)}(x)\varphi(x)dx = \lim_{m\to\infty}(-1)^{|k|}\int_G f_m(x)\varphi^{(k)}(x)dx =$$

$$= (-1)^{|k|}\int_G f(x)\varphi^{(k)}(x)dx.$$

Таким образом, существует $f^{(k)}(x) = g(x) \in L_p(G)$.

## ***19.2. Пространства С.Л. Соболева*** $W_p^l(G)$

***Определение 19.2.*** Пусть $G \subseteq R^n$ – открытое множество; $1 \le p < \infty,\ l \in N$. Символом $W_p^l(G)$ обозначим множество локально суммируемых на $G$ функций $f$, имеющих локально суммируемые на $G$ производные $f^{(k)}$ при всех $k : |k| \le l$, для которых конечна величина

$$\| f \|_{W_p^l(G)} = \left( \| f \|_{L_p(G)}^p + \sum_{0<|k|\le l} \| f^{(k)} \|_{L_p(G)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (19.2)$$

***Теорема 19.2.*** Множество $W_p^l(G)$ с нормой, определяемой соотношением (19.2), является полным, нормированным пространством.

*Доказательство.*

1. Проверим, что соотношение (19.2) определяет норму. Первая аксиома нормы принимается по определению, вторая аксиома очевидна. Проверим выполнение неравенства треугольника. Запишем неравенство Минковского

$$\left( \int_G | F(x) + G(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \left( \int_G | F(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_G | G(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

для функций

$$F(x) = \begin{cases} a_i, & x \in K_i; \\ 0, & x \notin \bigcup_{i=1}^N K_i; \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} b_i, & x \in K_i; \\ 0, & x \notin \bigcup_{i=1}^N K_i, \end{cases}$$

где $G = R^n$, а $K_i$ – не пересекающиеся, единичные кубы в $R^n$, $i = 1, 2, ..., N$. Получим неравенство Минковского для сумм

$$\left(\sum_{i=1}^{N} | a_i + b_i |^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{N} | a_i |^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{N} | b_i |^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда

$$(f+g)_{W_p^l(G)} = \left(\sum_{0<|k|\le l} \| f^{(k)} + g^{(k)} \|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{0<|k|\le l} \left(\| f^{(k)} \|_p + \| g^{(k)} \|_p\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

(неравенство Минковского для сумм)

$$\le \left(\sum_{0<|k|\le l} \| f^{(k)} \|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{0<|k|\le l} \| g^{(k)} \|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = \| f \|_{W_p^l(G)} + \| g \|_{W_p^l(G)}.$$

2. Проверим полноту пространства $W_p^l(G)$. Если $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальна в $W_p^l(G)$, то для любого $k$, $|k| \le l$ последовательность $\{f_m^{(k)}\}_{m=1}^{\infty}$ будет фундаментальна в $L_p(G)$. В силу полноты $L_p(G)$ существует $f \in L_p(G)$, такая, что $f_m \to f$ в $L_p(G)$. Теперь, применяя теорему 19.1, получаем, что для любого $k$, $|k| \le l$, существует $\lim\limits_{m\to\infty} f_m^{(k)} \to f^{(k)} \in L_p(G)$ в пространстве $L_p(G)$. Таким образом, $f \in W_p^l(G)$. Следовательно, $W_p^l(G)$ – полное пространство.

***<u>Замечание 19.1.</u>*** Полное, нормированное (банахово) пространство $W_p^l(G)$ называется пространством С.Л. Соболева.

***<u>Замечание 19.2.</u>*** Если $p = 2$, то $W_2^l(G) = H_2^l \equiv H^l(G)$ – полное, евклидово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_G f(x)\overline{g(x)}dx + \sum_{0<|k|\le l} \int_G f^{(k)}(x)\overline{g^{(k)}(x)}dx.$$

Этот случай (гильбертова пространства) будет наиболее важным для нас в дальнейшем.

## ***19.3. Пополнение*** $C_0^\infty(G)$ ***по норме*** $W_p^l(G)$**.**

## ***Пространство*** $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$

***Определение 19.3.*** Обозначим символом $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$ множество всех функций $f \in W_p^l(G)$, каждая из которых является пределом по метрике $W_p^l(G)$ некоторой последовательности $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(G)$,

$$\overset{\circ}{W}{}_p^l(G) = \left\{ f \in W_p^l(G) \mid \exists \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(G) : \| f - \varphi_m \|_{W_p^l(G)} \to 0, m \to \infty \right\}.$$

Это множество называется пополнением $C_0^\infty(G)$ по норме $W_p^l(G)$ (или замыканием $C_0^\infty(G)$ в метрике $W_p^l(G)$).

***Теорема 19.3.*** $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$ – линейное пространство в $W_p^l(G)$. $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$ – полное, нормированное пространство с нормой (19.2).

*Доказательство.*

1. Для любых функций $f, g \in \overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$ существуют последовательности $\{f_m\}_{m=1}^\infty, \{g_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(G)$, такие, что

$$\| f - f_m \|_{W_p^l(G)} \to 0, \| g - g_m \|_{W_p^l(G)} \to 0, m \to \infty .$$

Но тогда $\{\alpha f_m + \beta g_m\}_{m=1}^\infty \in C_0^\infty(G)$ и

$$\| (\alpha f + \beta g) - (\alpha f_m + \beta g_m) \|_{W_p^l(G)} \le |\alpha| \| f - f_m \|_{W_p^l(G)} + |\beta| \| g - g_m \|_{W_p^l(G)} \to 0,$$

т.е. $\alpha f + \beta g \in \overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$. Следовательно, $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$ – линейное пространство в $W_p^l(G)$.

2. Пусть теперь $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ – фундаментальная в $W_p^l(G)$ последовательность функций $f_m \in \overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$. Тогда существует предел $\lim\limits_{m\to\infty} f_m = f \in W_p^l(G)$. Покажем, что $f \in \overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$.

Имеем

$$\forall m \exists \{\varphi_{ml}\}_{l=1}^{\infty} : \| \varphi_{ml} - f_m \|_{W_p^l(G)} \underset{l\to\infty}{\to} 0 .$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\forall m \exists k_m : \| \varphi_{mk_m} - f_m \|_{W_p^l} < \dfrac{\varepsilon}{2^m}$. Рассмотрим последовательность $\left\{\varphi_{mk_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$. Для нее получаем

$$\| f - \varphi_{mk_m} \|_{W_p^l} < \| f - f_m \|_{W_p^l} + \| f_m - \varphi_{mk_m} \|_{W_p^l} .$$

Выбираем для фиксированного ранее $\varepsilon$ номер $N(\varepsilon)$ так, чтобы при $m > N(\varepsilon)$ выполнялось $\| f - f_m \|_{W_p^l} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда при $m > N(\varepsilon)$ будет

$$\| f - \varphi_{mk_m} \|_{W_p^l} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^m} < \varepsilon.$$

Таким образом, $\varphi_{mk_m} \to f$, $m \to \infty$ по метрике $W_p^l(G)$, т.е. $f \in \overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$.

***<u>Замечание.</u>*** Пространство $C_0^{\infty}(G)$ всюду плотно в $L_p(G)$. Это означает, что замыкание $C_0^{\infty}(G)$ в метрике $L_p(G)$ совпадает с $L_p(G)$. Можно показать, что если $G = R^n$, то $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G) = W_p^l(G)$. Если же $G \neq R^n$, например $G$ – ограниченная область в $R^n$, то это не так: в этом случае $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$ – собственное подпространство $W_p^l(G)$. Покажем, например, что $f(x) \equiv 1$ в $G$, очевидно принадлежащая $W_p^l(G)$ для любой ограниченной области $G$, тем не менее не при-

надлежит $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$. Пусть существует $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(G), \varphi_m \to 1$ в $W_p^l(G)$. Тогда, в частности, $\dfrac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_1} \to 0$ в $L_p(G)$. Отсюда

$$\int_G \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \varphi_m(x) dx = -\int_G x_1 \frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_1} dx \underset{m\to\infty}{\to} 0 .$$

С другой стороны, $\int_G \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \varphi_m(x) dx = \int_G \varphi_m(x) dx \underset{m\to\infty}{\to} \int_G 1 dx = \mu(G)$. Таким образом, приходим к противоречию, т.е. $1 \equiv f(x) \notin \overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$. Следовательно, $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$ – собственное подпространство в $W_p^l(G)$.

## § 20. Гильбертовы пространства $W_2^l(G) \equiv H^l(G),\ l \in Z$

### ***20.1. Теорема Рисса о представлении линейного функционала***

***Теорема 20.1.*** Пусть $f$ – линейный, ограниченный функционал в гильбертовом пространстве $H$ (с вещественными или комплексными значениями). Тогда существует единственный элемент $y_f \in H$, такой, что для любого $x \in H$ выполняется $f(x) = (x, y_f)$. При этом $\| y_f \| = \| f \|$.

*Доказательство.* Пусть $X = \{x \in H \mid f(x) = 0\}$. Если $X = H$, то $f(x) \equiv 0$ и, следовательно, $y_f = 0$. Если же $X \subset H$, то $\exists y_0 \in H : y_0 \perp X$, т.е. $\forall x \in X : (x, y_0) = 0$.

Определим $y_f = \overline{f(y_0)} \dfrac{y_0}{\| y_0 \|^2}$. Тогда:

1) для любого $x \in X : (x, y_f) = \overline{\left( \dfrac{\overline{f(y_0)}}{\| y_0 \|^2} \right)} (x, y_0) = 0 = f(x)$;

2) для любого $x = \alpha y_0$ получим

$$(x, y_f) = \frac{f(y_0)}{\| y_0 \|^2} \alpha(y_0, y_0) = f(\alpha y_0) = f(x);$$

3) для любого $x \in H$ имеем $x = \left( x - \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f \right) + \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f$, а так как

$$f\left( x - \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f \right) = 0,$$

т.е.

$$x - \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f \in X, \quad \text{и} \quad f(y_f) = (y_f, y_f) = \| y_f \|^2,$$

то $(x, y_f) = \left( \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f, y_f \right) = f(x).$

Таким образом, для любого $x \in H$ будет выполнено $(x, y_f) = f(x).$

Осталось проверить, что $\| f \| = \| y_f \|$.

Имеем $\|f\| \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{\|x\| \le 1} | f(x) | = \sup\limits_{\|x\| \le 1} | (x, y_f) | \le \| y_f \| \sup\limits_{\|x\| \le 1} \| x \| = \| y_f \|,$ а кроме того, $\|f\| \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{\|x\| \le 1} | f(x) | \ge f\left( \frac{y_f}{\| y_f \|} \right) = \left( \frac{y_f}{\| y_f \|}, y_f \right) = \| y_f \|.$

***<u>Определение 20.1.</u>*** Множество линейных функционалов, определенных на гильбертовом пространстве $H$, называется сопряженным пространством к $H$ и обозначается $H'$.

***<u>Замечание 20.1.</u>*** Легко проверить, что $H'$ является линейным пространством относительно обычных операций сложения функционалов и умножения их на числа. Пространство $H'$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения, определяемого по формуле $(f, g) \overset{\text{def}}{=} \overline{(y_f, y_g)}$. При доказательстве предыдущей теоремы было построено взаимно однозначное соответствие $f \leftrightarrow y_f$ между $H = H'$. При этом соответствии сохраняются линейные операции.

***Замечание 20.2.*** Если $H = L_2(G)$, то для любого линейного, ограниченного функционала $F$, действующего в пространстве $L_2(G)$, существует единственная функция $f \in L_2(G)$, такая, что для любой $g \in L_2(G)$ выполнено $F(g) = \int\limits_G g(x) f(x) dx,$ при этом

$$\| F \| = \left( \int\limits_G | f(x) |^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

## *20.2. Оснащенное гильбертово пространство. Основные и обобщенные функции*

***Определение 20.2.*** Банахово пространство $(B_1, \| \cdot \|_1)$ называется вложенным в банахово пространство $(B_2, \| \cdot \|_2)$, если:

1) $B_1 \subset B_2$ ($B_1$ есть подмножество в $B_2$);

2) для любого $x \in B_1$ выполнено $\| x \|_2 \le C \| x \|_1$, где $C$ не зависит от $x$.

Для записи этого вложения используется обозначение $B_1 \hookrightarrow B_2$.

***Определение 20.3.*** Вложение $B_1 \hookrightarrow B_2$ называется плотным, если замыкание множества $B_1$ в метрике $B_2$ совпадает с $B_2$.

***Примеры.***

***20.1.*** Справедливы соотношения $C^1(\overline{G}) \hookrightarrow C(\overline{G}) \hookrightarrow L_1(G)$, где последнее вложение справедливо, если $G$ – ограниченная область.

***20.2.*** $W_p^l(G) \hookrightarrow L_p(G)$.

***20.3.*** Так как $C_0^\infty(G)$ плотно в $L_p(G)$, то любое пространство $B$, содержащее $C_0^\infty(G)$ и вложенное в $L_p(G)$, вложено в него плотно.

***20.4.*** Вложение $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G) \hookrightarrow W_p^l(G)$ – не плотное, а вложение $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G) \hookrightarrow L_p(G)$ и $W_p^l(G) \hookrightarrow L_p(G)$ – плотное.

*Упражнение.* Доказать, что для любых $1 \le p < q < \infty$ выполнено $L_q(G) \hookrightarrow L_p(G)$.

***Определение 20.4.*** Пусть банахово пространство $B_+$ плотно вложено в гильбертово пространство $H_0$. Для любой $f \in H_0$ обозначим

$$\| f \|_- = \sup_{x \in B_+, \|x\|_+ \le 1} |(x, f)|. \tag{20.1}$$

Тогда $(B_+, \|\cdot\|_+)$ называется позитивным пространством (или пространством основных функций), пополнение $H_0$ по норме $\|\cdot\|_-$ обозначается $(B_-, \|\cdot\|_-)$ и называется негативным пространством (или пространством обобщенных функций), а тройку вложенных пространств $B_+ \hookrightarrow H_0 \hookrightarrow B_-$ называют оснащенным пространством.

***Замечание 20.3.*** То, что (20.1) определяет норму на $H_0$ очевидно. Из неравенства Коши–Буняковского–Шварца получаем, что для любой $f \in H_0$ следуют неравенства

$$\| f \|_- \le \sup_{x \in B_+, \|x\|_+ \le 1} \| x \|_0 \| f \|_0 \le \sup_{x \in B_+, \|x\|_+ \le 1} C \| x \|_+ \| f \|_0 \le C \| f \|_0,$$

откуда получаем, что $H_0 \hookrightarrow B_-$, причем это вложение – плотное (по определению пополнения).

***Пример 20.5.*** Пусть $H_0 = L_2(G), B_+ = \overset{\circ}{H}{}^l(G) \equiv \overset{\circ}{W}{}_2^l(G), l = 1, 2, \ldots$.

Тогда пространство $B_-$ обозначается символом $H^{-l}(G)$ и называется пространством Соболева с отрицательным показателем дифференцирования. Тройка пространств $\overset{\circ}{H}{}^l(G) \hookrightarrow L_2(G) \hookrightarrow H^{-l}(G)$ образует оснащенное гильбертово пространство.

Норма $H^{-l}(G), l = 1, 2, \ldots,$ задается соотношением

$$\| f \|_{H^{-l}(G)} = \sup_{\|x\|_{H^l(G)} \le 1} |(x, f)_{L_2(G)}|.$$

Таким образом, определили пространства $H^l(G)$ при $l \in Z$.

***Пример 20.6.*** Пусть $G=(a,b), H_+=\overset{\circ}{H}{}^1(a,b)\equiv \overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$. Покажем, что справедливо вложение $\overset{\circ}{H}{}^1(a,b)\hookrightarrow C[a,b]$. Действительно, для любой $\varphi\in C_0^\infty(a,b)$ будет выполнено:

1) $\exists\xi\in(a,b):\int\limits_a^b\varphi(x)dx=\varphi(\xi)(b-a)\Rightarrow\varphi(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b\varphi(x)dx;$

2) $\varphi(x)=\varphi(\xi)+\int\limits_\xi^x\varphi'(t)dt=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b\varphi(x)dx+\int\limits_\xi^x\varphi'(t)dt.$

Отсюда, используя неравенство Коши−Буняковского, получим

$$|\varphi(x)|\le\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b|\varphi(t)|\,dt+\int\limits_\xi^x|\varphi'(t)|\,dt\le\frac{1}{\sqrt{b-a}}\|\varphi\|_{L^2}+\sqrt{b-a}\,\|\varphi'\|_{L^2}\le$$

$$\le C\left(\|\varphi\|_{L^2}^2+\|\varphi'\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}=C\|\varphi\|_{W_2^1}.$$

Таким образом, для любой $\varphi\in C_0^\infty(a,b)$ выполнено

$$\|\varphi\|_{C[a,b]}=\sup_{x\in[a,b]}|\varphi(x)|\le C\|\varphi\|_{W_2^1(a,b)}\qquad(20.2)$$

Далее, если $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty\subset C_0^\infty(a,b)$ и фундаментальна в $W_2^1(a,b)$, то существует $f\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$, такая, что $\varphi_m\underset{m\to\infty}{\to}f$ в $W_2^1(a,b)$. Но тогда и подавно $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ фундаментальна в $C[a,b]$, следовательно, $f\in C[a,b]$. Получим, что $\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)\hookrightarrow C[a,b]$. Пусть $\xi\in(a,b)$. Определим на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$ функционал $\delta_\xi f(x)=f(\xi)$. Это очевидно линейный функционал. Из соотношения

$$\|\delta_\xi\|_-=\sup_{\|f\|_{W_2^1}\le1}|f(\xi)|\le\sup_{\|f\|_{C[a,b]}\le1}|f(\xi)|\le C,$$

где $C$ – константа в неравенстве (20.2), следует ограниченность этого функционала на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$.

Таким образом, $\delta_\xi\in W_2^{-1}(a,b)=H^{-1}(a,b)$.

***<u>Определение 20.5.</u>*** Функционал $\delta_\xi \in W_2^{-1}(a,b)$, определенный равенством $\delta_\xi f(x) = f(\xi), \xi \in (a,b)$ (определенный на функциях $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$), называется дельта-функцией, сосредоточенной в точке $\xi \in (a,b)$. Часто $\delta_\xi$ обозначается $\delta(\xi - x)$ и применяется запись:

$$\delta_\xi f(x) = \int_a^b \delta(\xi - x) f(x) dx = f(\xi).$$

***<u>Замечание 20.4.</u>*** В общем случае, если $G \subset R^n$ – ограниченная область, то вложение $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G) \subsetneq C(\overline{G})$ справедливо при $l > \dfrac{n}{2}$.

***<u>Замечание 20.5.</u>*** Возможно построение оснащения с помощью более общих, чем банаховы простанства (что будет сделано ниже).

Введем следующее определение.

***<u>Определение 20.5.</u>*** Линейный функционал $F$ в $L_2(G)$, определенный по крайней мере на множестве $C_0^\infty(G)$, называется обобщенной производной функции $f \in L_2(G)$ вида $f^{(k)}$, где $k = (k_1, k_2, ..., k_n)$, если для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$ выполнено $F(\varphi) = (-1)^{|k|} \int\limits_G f(x) \varphi^{(k)}(x) dx.$

***<u>Теорема 20.2.</u>*** $\forall f \in L_2(G) \forall k = (k_1, k_2, ..., k_n) \exists f^{(k)} \in W_2^{-|k|}(G),$ где $|k| = k_1 + k_2 + ... + k_n$.

<u>*Доказательство*</u>. На множестве $C_0^\infty(G)$ определим функционал $F(\varphi)$ равенством $F(\varphi) = (-1)^{|k|} \int\limits_G f(x) \varphi^{(k)}(x) dx.$ Тогда

$$|F(\varphi)| \le \| \varphi^{(k)} \|_{L_2(G)} \| f \|_{L_2(G)} \le \| \varphi^{(k)} \|_{W_2^{|k|}(G)} \| f \|_{L_2}.$$

Далее, если $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(G)$ – фундаментальная в $W_2^{|k|}(G)$ последовательность, то:

1) существует $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{|k|}(G)$, такая, что $u = \lim\limits_{m \to \infty} \varphi_m(x)$ в $W_2^{|k|}(G)$;

2) $|F(\varphi_m)-F(\varphi_l)|=|F(\varphi_m-\varphi_l)|\le\|f\|_{L_2}\|\varphi_m-\varphi_l\|_{W_2^{|k|}(G)}$, т.е. $\{F(\varphi_m)\}_{m=1}^{\infty}$ – фундаментальная числовая последовательность. Но тогда существует $\lim\limits_{m\to\infty}F(\varphi_m)$. Положим $F(u)=\lim\limits_{m\to\infty}F(\varphi_m)$.

Таким образом, функционал $F$ определен на всем $\overset{\circ}{W}{}_2^{|k|}(G)$, и для любой $u\in\overset{\circ}{W}{}_2^{|k|}(G)$ будет выполнено $|F(u)|\le\|f\|_{L_2}\|u\|_{W_2^{|k|}(G)}$, т.е. это ограниченный на $\overset{\circ}{W}{}_2^{|k|}(G)$ функционал. Но тогда $F\in W_2^{-|k|}(G)$ и по построению $F$ совпадает с $f^{(k)}(x)$.

## ***20.3. Теорема Лакса–Мильграма***

***Теорема 20.3.*** Пусть $H_+\subset H_0\subset H_-$ – оснащенное гильбертово пространство, а $B(f,g)$ – билинейный функционал на гильбертовом пространстве $H_+$, удовлетворяющий условиям:

1) $\exists\kappa>0\forall f\in H_+:B(f,f)\ge\kappa\|f\|_+^2$;

2) $\exists C>0\forall f,g\in H_+:B(f,g)\le C\|f\|_+\|g\|_+$.

Тогда существует линейный оператор $A:H_+\to H_-$, осуществляющий изоморфизм этих пространств и такой, что $B(f,g)=\langle Af,g\rangle$, где символ $<Af,g>$ означает действие функционала $Af\in H_-$ на элемент $g\in H_+$.

*Доказательство.*

1. Фиксируем $f\in H_+$. Тогда, полагая $F(g)=B(f,g)$, получаем, что $F$ – линейный, ограниченный функционал (использовалось второе условие теоремы). Положим теперь $Af=F$.

2. Очевидно, что $A$ – линейный оператор с $D(A)=H_+$ и $E(A)=H_-$. Если $Af=\theta\in H_-$ – нуль в $H_-$, то это означает, что $\forall g\in H_+:\langle Af,g\rangle=B(f,g)=0$.

Взяв $f = g$, получим $0 = B(f,f) \geq \kappa \| f \|_+^2$, т.е. $\| f \|_+^2 = 0$ в $H_+$. Таким образом, $\operatorname{Ker} A = \{\theta\}$.

3. Пусть $F \in H_-$ – произвольный элемент. Тогда $< F, g >$ – линейный, ограниченный функционал на $H_+$. В силу условий теоремы форма $B(f,g)$ является на $H_+$ скалярным произведением, порождающим эквивалентную норме $\|\cdot\|_+$ норму $\|\cdot\|_{+,B}$. Но тогда $\langle F, g \rangle$ – линейный, ограниченный по этой норме функционал. По теореме Рисса $\forall f \in H_+ : \langle F, g \rangle = B(f,g) = \langle Af, g \rangle$ для всех $g \in H_+$. Таким образом, $E(A) = H_-$. Тем самым доказано, что $A : H_+ \to H_-$ – изоморфизм этих пространств.

***<u>Пример 20.7.</u>*** Пусть $A = -\Delta + I$, т.е. для любой $\varphi \in C_0^\infty(G)$: $A\varphi = -\Delta\varphi + \varphi$, где $\Delta$ – оператор Лапласа. Тогда рассмотрим форму

$$B(\varphi,\psi) = (A\varphi,\psi) = \int_G (-\Delta\varphi + \varphi)\overline{\psi}(x)dx = \int_G \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \varphi\overline{\psi}(x) \right) dx . \quad (20.3)$$

Очевидно, получаем для любых $\varphi, \psi \in C_0^\infty(G)$:

1) $B(\varphi,\varphi) = \| \varphi \|^2_{W_2^1(G)}$;

2) $| B(\varphi,\psi) | \leq \| \varphi \|_{W_2^1} \| \psi \|_{W_2^1}$.

По непрерывности, приведенные выше оценки остаются справедливыми для любых $\varphi, \psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$. При этом оператор $A$ понимается в (20.3) уже в обобщенном смысле. Взяв $H_+ = \overset{\circ}{W}{}_2^1(G), H_0 = L_2(G), H_- = W_2^{-1}(G)$ и применив теорему Лакса–Мильграма, получаем, что оператор $A = -\Delta + I$ есть изоморфизм $W_2^1(G)$ и $W_2^{-1}(G)$.

## ***20.4. Неравенство Фридрихса.***

Введем обозначение $\left|u\right|_{W_2^l(G)} = \left(\sum\limits_{|k|=l}\left|u^{(k)}(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ .

***Теорема 20.4.*** Для любой $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$ выполняется

$$\| u \|_{L_2} \le C \| u \|_{W_2^l(G)},$$

где $C$ – некоторая постоянная, не зависящая от $u$ .

*Доказательство.* Очевидно достаточно доказать неравенство для функций класса $C_0^\infty(G)$ .

Рассмотрим куб $Q = \{x \in R^n : \ a \le x_i \le b, \ i = 1,2,...,n\}$, содержащий область $G$ . Тогда для любой $\varphi \in C_0^\infty(G)$ будут выполнены соотношения:

$$\varphi(x_1, \overline{x}) = \int\limits_a^{x_1} \frac{\partial\varphi(\xi, \overline{x})}{\partial\xi} d\xi;$$

$$\left|\varphi(x_1, \overline{x})\right|^2 \le \left(\int\limits_a^{x_1}\left|\frac{\partial\varphi(\xi, \overline{x})}{\partial\xi}\right| d\xi\right)^2 \le (b-a)\int\limits_a^b\left|\frac{\partial\varphi(\xi, \overline{x})}{\partial\xi}\right|^2 d\xi;$$

$$\| \varphi \|_{L_2(G)}^2 \le (b-a)\int\limits_Q dx\int\limits_a^b\left|\frac{\partial\varphi(\xi, \overline{x})}{\partial\xi}\right|^2 d\xi = (b-a)^2\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right\|_{L_2(G)}^2 \le (b-a)^2 \|\varphi\|_{W_2^1(G)}^2 .$$

Далее, рассуждая по индукции, получаем, что для любой $\varphi \in C_0^\infty(G)$ будет выполнено $\left|\varphi\right|_{L_2(G)} \le C\left|\varphi\right|_{W_2^l(G)}$, $l = 1, 2, \ldots$.

В силу плотности $C_0^\infty(G)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$ получаем справедливость этой оценки для всех $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$.

# IV. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

## § 21. Пространства $D$ и $D'$

### ***21.1. Определения и основные свойства***

Всюду далее $G = R^n$ или $G \subset R^n$ − некоторая область.

***Определение 21.1.*** На классе $C_0^\infty(G)$ введем понятие сходимости следующим образом: последовательность $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(a,b)$ называется сходящейся к функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$ ($\varphi_m \xrightarrow{D} \varphi$), если выполняются условия.

1. Существует компакт $K \subset G$, такой, что для любого $m$ будет $\operatorname{supp} \varphi_m \subseteq K$.

2. Для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ имеет место равномерная сходимость $D^\alpha \varphi_m \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ на $G$; множество $C_0^\infty(G)$ с такой сходимостью обозначается символом $D$ и называется пространством основных функций.

Перечислим основные свойства пространства $D$.

1. Пространство $D$ является полным относительно введенной сходимости, т.е. если $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(a,b)$, удовлетворяет первому условию определения 21.1 и фундаментальна в смысле второго условия, то существует $\varphi \in D$, такая, что $\varphi_m \to \varphi$ в $D$.

2. Оператор дифференцирования $D^\beta : D \to D$ непрерывен, т.е. если $\varphi_m \to \varphi$ в $D$, то $D^\beta \varphi_m \to D^\beta \varphi$ в $D$.

3. Для любого $l = 0, 1, 2, ...$ в случае сходимости $\varphi_m \to \varphi$ в $D$ будет иметь место и сходимость $\varphi_m \to \varphi$ в $W_2^l(G)$. В этом смысле справедливо вложение $D \subsetneq W_2^l(G) \subsetneq L_2(G) \subsetneq W_2^{-l}(G)$.

***Определение 21.2.*** Символом $D'$ обозначим множество всех функционалов на $D$, обладающих следующими свойствами:

1) линейностью: $\forall \varphi, \psi \forall \alpha, \beta : f(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha f(\varphi) + \beta f(\psi)$;

2) непрерывностюю в $D$: если последовательность $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ сходится $\varphi_m \to \varphi$ в $D$, то будет сходится и последовательность $f(\varphi_m) \to f(\varphi)$;

***<u>Определение 21.3.</u>*** Последовательность $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D'$ называется слабосходящейся к $f \in D'$, если для любой $\varphi \in D$ выполняется $f_m(\varphi) \to f(\varphi)$.

Пространство $D'$ называется пространством обобщенных функций.

Свойства пространства обобщенных функций.

1. $D'$ – полное относительно слабой сходимости пространство.

Доказательство см. [3], 5.4.

2. Если $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset W_2^{-l}(G)$ и $f_m \to f$ в $W_2^{-l}(G)$, т.е.

$$\| f_m - f \|_{-l} = \sup_{\substack{\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^{l}(G) \\ \|\varphi\|_l \le 1}} |(f_m - f)(\varphi)| \to 0,$$

то очевидно и подавно для любой функции $\varphi \in D$ будет $(f_m - f)(\varphi) \to 0$, т.е. $f_m \to f$ в $D'$. Таким образом, можем записать, что $W_2^{-l}(G) \subsetneq D'$, а тогда для любого $l = 0, 1, 2, \ldots$ будут справедливы вложения $D \subsetneq \overset{\circ}{W}{}_2^{l}(G) \subsetneq L_2(G) \subsetneq W_2^{-l}(G) \subsetneq D'$.

3. Если $a \in C^{\infty}(R^n)$, а $f \in D'$, то по определению $(af)(\varphi) = af(\varphi) = f(a\varphi)$, т.е. определено произведение функции $a \in C^{\infty}(R^n)$ и обобщенной функции $f \in D'$. Иногда можно ослабить условие, например, требовать, чтобы $(a\delta_\xi)\varphi = a\varphi(\xi)$ было бы определено для любой $a \in C(R^n)$.

***<u>Определение 21.4.</u>*** Ранее была определена дельта-функция: для любой функции $\varphi \in D$ и $\xi \in R^n$ положим $\langle \delta_\xi, \varphi \rangle \equiv \delta_\xi(\varphi) = \varphi(\xi)$ – дельта-функция, сосредоточенная в точке $\xi \in R^n$.

***<u>Определение 21.5.</u>*** $\langle \delta_S, \varphi \rangle \equiv \delta_S(\varphi) = \int\limits_S \varphi(x)dS$ – дельта-функция, сосредоточенная на множестве $S$.

***<u>Определение 21.6.</u>*** $\langle \mu\delta_S, \varphi \rangle = \int\limits_S \mu(x)\varphi(x)dS, \mu \in C(\overline{S})$ − простой потенциал с плотностью $\mu$.

***<u>Пример 21.1.</u>*** Найти функционал $P\dfrac{1}{x}$.

Определим на $D$ функционал $P\dfrac{1}{x}$ как главное значение ($V.P.$) по Коши интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x}dx$. Именно, для любой функции $\varphi \in D$ положим

$$\left\langle P\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle \overset{def}{=} V.P.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon \to 0+0}\left( \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx \right).$$

Покажем, что $P\dfrac{1}{x} \in D'$. Если в $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D, \varphi_m \to 0$ в $D$, то существует $R > 0$, такое, что $\operatorname{supp} \varphi_m \subseteq [-R, R]$ для всех $m$, а тогда

$$\left| \left\langle P\frac{1}{x}, \varphi_m \right\rangle \right| = \left| V.P.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_m(x)}{x}dx \right|.$$

По формуле Лагранжа $\left| V.P.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\varphi_m(x)}{x}dx \right| = \left| V.P.\int\limits_{-R}^{R} \dfrac{\varphi_m(0) + \varphi_m'(\xi)}{x}dx \right| =$

$$= \left| V.P.\int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_m(0)}{x}dx + \int\limits_{-R}^{R} \varphi_m'(\xi)dx \right| \le 2R \sup_{x \in [-R,R]} |\varphi_m'(x) - 0| \to 0, m \to \infty,$$

так как $\xi \in (0, x)$. Следовательно, $P\dfrac{1}{x}$ − непрерывный в $D$ функционал, т.е. $P\dfrac{1}{x} \in D'$. Кроме того, имеем

$$\left\langle P\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = V.P.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = V.P.\int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}dx = \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}dx,$$

так как существует $R$, такое, что носитель функции будет $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-R,R]$, а $V.P.\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(0)}{x}dx = 0.$

***<u>Пример 21.2.</u>*** Найти обобщенные функции $\frac{1}{x \pm i0}$ и формулы Соходского. По определению $\left\langle \frac{1}{x \pm i0}, \varphi \right\rangle \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\varepsilon \to 0+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x \pm i0}dx\right).$

Имеем, если $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-R,R]$, то

$$\left\langle \frac{1}{x \pm i0}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+0}\left(\int\limits_{-R}^{+R}\frac{x - i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\left[\varphi(0) + (\varphi(x) - \varphi(0))\right]dx\right) =$$

$$= \varphi(0)\lim_{\varepsilon \to 0+0}\left(\int\limits_{-R}^{+R}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}dx\right) - i\varphi(0)\lim_{\varepsilon \to 0+0}\left(\int\limits_{-R}^{+R}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx\right) +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0+0}\left(\int\limits_{-R}^{+R}\frac{x - i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}(\varphi(x) - \varphi(0))dx\right) = 2i\varphi(0)\lim_{\varepsilon \to 0+0}\operatorname{arctg}\frac{x}{\varepsilon} +$$

$$+ \int\limits_{-R}^{+R}\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}dx = -i\pi\varphi(0) + \left\langle P\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle.$$

Получаем формулы Соходского:

$$\frac{1}{x + i0} = -i\pi\delta(x) + P\frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{x - i0} = i\pi\delta(x) + P\frac{1}{x}.$$

***<u>Пример 21.3.</u>*** Доказать, что $\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \to \delta(x)$ при $\varepsilon \to 0+0$ в $D$.

<u>*Доказательство*</u>. Для любой функции $\varphi \in D$ выполнено

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}\varphi(x)dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\varphi(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}dx +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\varphi(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}\left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)dx = \varphi(0) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\left(\varphi(2\sqrt{\varepsilon}t) - \varphi(0)\right)dt.$$

При $\varepsilon \in (0,\ 1]$ рассмотрим функцию

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \left(\varphi(2\sqrt{\varepsilon}t) - \varphi(0)\right) dt.$$

В силу непрерывности по $\varepsilon$ и $t$ подынтегральной функции и равномерной сходимости интеграла на множестве $(0,\ \varepsilon]$ функция $\Phi(\varepsilon)$ будет непрерывна на $[0,\ 1]$, откуда $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \Phi(\varepsilon) = \Phi(0) = 0.$

Таким образом, для любой $\varphi \in D$ будет выполнено равенство $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \varphi(x) dx = \varphi(0)$, и, следовательно,

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \to \delta(x) \text{ в } D.$$

## ***<u>21.2. Дифференцирование обобщенных функций</u>***

***<u>Определение 21.7.</u>*** Для любой $f \in D'$ и любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ положим $\langle g, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \varphi^{(\alpha)} \rangle$ для любой $\varphi \in D.$ Тогда функционал $g \in D'$ обозначается $f^{(\alpha)} \equiv D^\alpha f$ и называется обобщенной производной функции $f$ вида $D^\alpha f.$ Таким образом, для любой $\varphi \in D$ будет выполнено

$$\langle D^\alpha, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Отметим свойства обобщенной производной.

1. Линейность. Для любых $f_1, f_2,\ \ C_1, C_2 \in \boldsymbol{C},\ \ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ существует $D^\alpha(C_1 f_1 + C_2 f_2)$ и $D^\alpha(C_1 f_1 + C_2 f_2) = C_1 D^\alpha(f_{12}) + C_2 D^\alpha(f_2).$

2. $D^\alpha(D^\beta f) = D^\beta(D^\alpha f) = D^{\alpha+\beta}(f).$

3. Непрерывность. Для любого $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ оператор $D^\alpha : D' \to D'$ является непрерывным оператором.

<u>*Доказательство*</u>. Для любой последовательности $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D'$, сходящейся к $f$ в $D'$, имеем

$$\left\langle D^{\alpha} f_m, \varphi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle f_m, D^{\alpha}\varphi \right\rangle \to (-1)^{|\alpha|} \left\langle f, D^{\alpha}\varphi \right\rangle = \left\langle D^{\alpha} f, \varphi \right\rangle$$

для всех $\varphi \in D$. Таким образом, по определению, $D^{\alpha} f_m \to D^{\alpha} f$, $m \to \infty$ в $D'$.

***<u>Замечание 21.1.</u>*** Оператор $D^{\alpha} : W_2^l(G) \to W_2^{l-|\alpha|}(G)$ – непрерывный оператор, $l \in Z$.

## *<u>21.3. Обобщенные функции как производные</u>*

***<u>Теорема 21.1.</u>*** Пусть $f \in D'$, $K \subset G$, – компакт в $G$. Тогда существуют $g \in C(\overline{G})$ и мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, такие, что $\left\langle f, \varphi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_G g(x) D^{\alpha}\varphi(x) dx = \left\langle g^{(\alpha)}, \varphi \right\rangle$ для любой $\varphi \in D$ с носителем $\operatorname{supp} \varphi \subseteq K$.

Эта теорема означает, что любая обобщенная функция локально совпадает с производной некоторого порядка от непрерывной функции.

***<u>Пример 21.4.</u>*** Пусть функция $f$ такова, что

$$f \in C^1(x \le x_0) \cup C^1(x \ge x_0);$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = [f](x_0) \ne 0.$$

Тогда для любой $\varphi \in C_0^{\infty}(R^1)$ будет выполняться

$$\left\langle f', \varphi \right\rangle \overset{def}{=} -\left\langle f, \varphi' \right\rangle = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)dx - \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx =$$

$$= -f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{x_0} + \int\limits_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)dx - f(x)\varphi(x)\Big|_{x_0}^{+\infty} + \int\limits_{x_0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx =$$

$$= [f(x_0)]\varphi(x_0) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{f'\}(x)\varphi(x)dx,$$

где $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \{f'\}(x)\varphi(x)dx \overset{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)dx + \int\limits_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx$.

Получили: $f' = [f](x_0)\delta(x - x_0) + \{f'\}$.

***<u>Пример 21.5.</u>*** Пусть $n = 2$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, тогда для любой функции $\varphi$ с носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset U_R(0)$ и $\varphi \in C_0^\infty(R^2)$ будет выполнено

$$\langle \Delta \ln|x|, \varphi \rangle = \iint\limits_{U_R(0)} \ln|x| \Delta\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \iint\limits_{\varepsilon \le |x| \le R} \ln|x| \Delta\varphi(x)dx =$$

$$\left(\text{по формуле Грина } \iint\limits_G (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int\limits_S \left( u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \right)$$

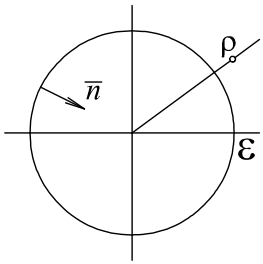
$$= \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left[ \iint\limits_{\varepsilon \le |x| \le R} \underbrace{\Delta \ln|x|}_{0} \varphi(x)dx + \left( \int\limits_{S_\varepsilon} + \int\limits_{S_R} \right) \left( \ln|x| \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \ln|x|}{\partial n} \right) dS \right],$$

где интеграл по $S_R$ равен нулю, так как носитель $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K_R(0)$. Тогда получаем:

$$\langle \Delta \ln|x|, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \iint\limits_{S_\varepsilon} \left( \ln|x| \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi(x) \frac{\partial \ln|x|}{\partial n} \right) dS = \left( \frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int\limits_0^{2\pi} \left( \ln\varepsilon \left( -\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \right) + \varphi(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta) \frac{1|}{\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta = -\lim_{\varepsilon \to 0+0} \int\limits_0^{2\pi} \varepsilon \ln\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} d\theta +$$

$$+\varphi(0,0)2\pi = 2\pi\varphi(0) \text{ (см. рисунок).}$$




$$x = \varepsilon\cos\theta$$
$$y = \varepsilon\sin\theta$$
$$dS = \varepsilon d\theta$$

Таким образом, $\Delta \ln|x| = 2\pi\delta(x); \Delta\left( \frac{1}{2\pi} \ln\frac{1}{|x|} \right) = -\delta(x)$.

*<u>Упражнение 21.1.</u>* Проверить, что $\Delta\left( \frac{1}{2\pi} \ln\frac{1}{|x|} \right) = -\delta(x)$.

*<u>Упражнение 21.2.</u>* Решить уравнение $xu'(x) = 1$. (Ответ: $u(x) = C_1 + C_2\theta(x) + \ln|x|$.)

## *21.4. Преобразование Фурье*

### *Преобразование Фурье быстроубывающих функций*

***Определение 21.8.*** Символом $S(R^n)$ обозначим совокупность функций $\varphi \in C^\infty(R^n)$, которые для всех мультииндексов α, β удовлетворяют условиям: $\sup\limits_{x\in R^n}\left|x^\beta D^\alpha \varphi(x)\right| < +\infty$, здесь $x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}$. Множество $S(R^n)$ называется множеством быстроубывающих функций. Множество $S(R^n)$ – линейное. Введем на $S(R^n)$ сходимость следующим образом: будем говорить, что последовательность $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ сходится к φ в $S(R^n)$ при $m \to \infty$, если для любых α, β выполнено $\sup\limits_{x\in R^n}\left|x^\beta D^\alpha\left(\varphi_m(x) - \varphi(x)\right)\right| \underset{m\to\infty}{\to} 0.$

Множество $S(R^n)$ с введенной на нем сходимостью называется пространством быстроубывающих функций.

Справедливы следующие свойства.

1. $D \subsetneq S(R^n)$, причем это вложение строгое. Например, $e^{-|x|^2} \in S(R^n)$, но $e^{-|x|^2} \notin D.$

2. Для любого α оператор $D^\alpha : S(R^n) \to S(R^n)$ – непрерывный оператор.

3. Если функция $a(x) \in C^\infty(R^n)$ такова, что для любого α существуют $m_\alpha, C_\alpha$, такие, что выполнено неравенство $\left|D^\alpha a(x)\right| \le C_\alpha\left(1 + |x|^2\right)^{m_\alpha}$, то $a(x)\varphi \in S(R^n)$ для любой $\varphi \in S(R^n)$.

4. Множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в $S(R^n)$. Доказательство здесь не приводится.

***Определение 21.9.*** Для любой $\varphi \in S(R^n)$ положим

$$(F\varphi)(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} \varphi(t) e^{-i(\xi,t)} dt.$$

Функция $\hat{\varphi}(\xi)$ называется преобразованием Фурье функции $\varphi \in S(R^n)$.

Отметим следующие свойства.

1. Оператор $F:\varphi \to \hat{\varphi}$ является линейным, непрерывным оператором в $S(R^n)$.

<u>*Доказательство*</u>. Для любого $\alpha$ имеем

$$D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} (-i)^{|\alpha|} x^\alpha \varphi(x) e^{-i(\xi,x)} dx.$$

Если $\varphi \in S(R^n)$ фиксирована, то интеграл справа для любого $\alpha$ сходится равномерно по $\xi \in R^n$. Следовательно, дифференцирование законно. Далее:

$$i^{|\beta|} \xi^\alpha \hat{\psi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} e^{-i(\xi,x)} D^\alpha \psi(x) dx.$$

Откуда следует, что

$$\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \int\limits_{R^n} e^{-i(\xi,x)} D^\alpha (x^\alpha \varphi(x)) dx,$$

$$\sup_{\xi \in R^n} \left| \xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) \right| \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} | D^\alpha (x^\alpha \varphi(x)) | \, dx < +\infty,$$

т.е. $\hat{\varphi} \in S(R^n)$. Отсюда, очевидно, следует и линейность $F$ в $S(R^n)$. В силу линейности $F$ достаточно доказать его непрерывность в нуле, т.е. если последовательность $\forall \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty \subset S(R^n)$ сходится к $0, \varphi_m \to 0,$ то $\hat{\varphi}_m \to \hat{0} = 0$ в $S(R^n)$. Это следует из оценки: для любых $\alpha, \beta$

$$\sup_{\xi \in R^n} \left| \xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}_m(\xi) \right| \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} | D^\alpha (x^\alpha \varphi_m(x)) | \, dx \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

***<u>Замечание 21.2.</u>*** Если $\varphi \in D$, то $\hat{\varphi}$ – целая аналитическая функция переменной $\xi$. Следовательно, $\hat{\varphi} \notin D$.

2. Обратное преобразование Фурье задается формулой

$$\left(F^{-1}\hat{\varphi}\right)(x) \equiv \tilde{\hat{\varphi}} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} \hat{\varphi}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi.$$

3. Для любых $\varphi, \psi \in S(R^n)$ выполнено

$$\left\langle F\varphi, \psi \right\rangle = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} \left( \int\limits_{R^n} \varphi(x) e^{-i(x,\xi)} dx \right) \psi(\xi) d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} \varphi(x) \left( \int\limits_{R^n} e^{-i(x,\xi)} \psi(\xi) d\xi \right) dx = \left\langle \varphi, F\psi \right\rangle.$$

4. Преобразование Фурье свертки. Напомним, что для любых $\varphi, \psi \in S(R^n)$ свертка определяется равенством

$$\left(\varphi * \psi\right)(x) = \int\limits_{R^n} \varphi(y)\psi(x-y) dy.$$

Тогда

$$\widehat{\left(\varphi * \psi\right)}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{\varphi}(\xi)\hat{\psi}(\xi).$$

### *Пространство $S'(R^n)$ обобщенных функций медленного роста*

***<u>Определение 21.10</u>.*** Обозначим через $S'(R^n)$ множество всех линейных, непрерывных на $S(R^n)$ функционалов со сходимостью, определенной следующим образом: последовательность $\{f_m\}$ сходится к $f$, если для любой $\varphi \in S(R^n)$ имеет место сходимость $(f_m, \varphi) \underset{m\to\infty}{\to} (f, \varphi)$.

Очевидно, что $S'(R^n)$ – линейное подпространство в $D'$. Это пространство называется пространством обобщенных функций медленного роста.

Отметим следующие свойства.

1. Для любого $l \in N$ будут справедливы включения

$$D \subsetneq S(R^n) \subsetneq \overset{\circ}{W}{}_2^l(R^n) \subsetneq L_2(R^n) \subsetneq W_2^{-l}(R^n) \subsetneq S'(R^n) \subsetneq D'.$$

2. ***<u>Лемма 21.1 (Шварца).</u>*** Для того, чтобы $f \in S'(R^n)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали $C > 0$ и целое $p \geq 0$, такие, что для любой $\varphi \in S(R^n)$ выполняется неравенство

$$\left|\langle f, \varphi \rangle\right| \leq C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in R^n} (1 + |x|^2)^{p/2} \left|D^\alpha \varphi(x)\right|.$$

3. $D^\alpha : S'(R^n) \to S'(R^n)$ – линейный, непрерывный оператор.

*<u>Доказательство.</u>* Так как $D^\alpha : D' \to D'$ – линейный, непрерывный оператор, но нужно только показать, что для любой $f \in S'(R^n)$ будет $D^\alpha f \in: S'(R^n)$, что очевидно, так как

$$\left\langle D^\alpha f, \varphi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle f, D^\alpha \varphi \right\rangle$$

для любой $\varphi \in S(R^n)$.

### *Преобразование Фурье функций из* $S'(R^n)$

***<u>Определение 21.11.</u>*** Функционал $F(f)$, определяемый равенством $\langle F(f), \varphi \rangle = \langle f, F(\varphi) \rangle$ для всех $\varphi \in S(R^n)$, называется преобразованием Фурье функций $f \in S'(R^n)$.

Свойства преобразования Фурье.

1. Для любой $f \in S'(R^n)$ будет $F(f) \in S'(R^n)$, следовательно, $F$ непрерывна в $S'$.

*<u>Доказательство.</u>* В силу линейности преобразования $F$ получаем, что $F(f)$ – линейный функционал на $S(R^n)$. Далее, если $f_m \underset{m \to \infty}{\to} f$ в $S'(R^n)$, то так как для любой $\varphi \in S(R^n)$ выполняется $F(\varphi) \in S(R^n)$, получаем:

$$\langle F(f_m), \varphi \rangle = \langle f_m, F(\varphi) \rangle \to \langle f, F(\varphi) \rangle = \langle F(f), \varphi \rangle,$$

т.е. $F(f_m) \to F(f)$. Наконец, если $\varphi_m \underset{m \to \infty}{\to} \varphi$ в $S(R^n)$, то $\hat{\varphi}_m \underset{m \to \infty}{\to} \hat{\varphi}$, в $S'(R^n)$, и тогда справедливо:

$$\langle F(f), \varphi_m \rangle = \langle f, \hat{\varphi}_m \rangle \to \langle f, \hat{\varphi} \rangle = \langle F(f), \varphi \rangle, \text{ т.е. } F(f) \in S'(R^n).$$

2. Обратное преобразование Фурье определяется равенством

$$F^{-1}[f]=F[f(-x)],\ \text{где}\ \langle f(-x),\varphi\rangle=\langle f,\varphi(-x)\rangle.$$

*Доказательство*. Для любой $\varphi\in S(R^n)$ выполнено

$$F(\varphi(-x))=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{R^n}\varphi(-x)e^{-i(x,\xi)}dx=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{R^n}\varphi(t)e^{i(t,\xi)}dt=\left(F^{-1}\varphi\right)(\xi).$$

Отсюда

$$\left\langle F^{-1}[F(f)],\varphi\right\rangle=\left\langle F\left(F(f)(-\xi)\right),\varphi\right\rangle=\left\langle F(f)(-\xi),F(\varphi)\right\rangle=$$

$$=\left\langle F(f),F(\varphi)(-\xi)\right\rangle=\left\langle F(f),F^{-1}\varphi\right\rangle=\langle f,\varphi\rangle,$$

т.е. $F(F(f))(-\xi)=f$. Аналогично, $F(F(f(-x)))=f$.

***Следствие***. Оператор $F$ осуществляет гомеоморфизм (взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение) пространства $S'(R^n)$ на себя, а также $S(R^n)$ на себя.

3. Преобразование Фурье и дифференцирование связаны равенствами:

а) $D^\alpha F(f)=F[(-ix)^\alpha f]$,

б) $F(D^\alpha f)=(-i\xi)^\alpha F(f)$.

*Упражнение 21.3.* Доказать эти равенства.

4. Преобразование Фурье сдвигов и преобразований подобия задаются равенствами:

а) $F[f(x-x_0]=e^{i(x_0,\xi)}F(f)$;

б) $(Ff)(\xi+\xi_0)=F[e^{-i(x_0,x)}f](\xi)$;

в) $F[f(Cx)](\xi)=\dfrac{1}{|C|^n}F[f]\left(\dfrac{\xi}{C}\right),0\neq C\in R.$

*Упражнение 21.4.* Доказать эти равенства.

***Примеры.***

***21.6.*** Вычислим преобразование Фурье дельта-функции.

Имеем: $\langle F\delta,\varphi\rangle=\langle\delta,F\varphi\rangle=\hat{\varphi}(0)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n}\varphi(x)dx.$

Следовательно, $F(\delta)=(2\pi)^{-n/2}$.

***21.7.*** $F[\delta(x-x_0]=e^{i(x_0,\xi)}F[\delta(x)]=(2\pi)^{-n/2}e^{i(x_0,\xi)}$.

***21.8.*** $F[1]=F^{-1}[1(-x)]=F^{-1}[1]=(2\pi)^{n/2}\delta(x).$

***21.9.*** Пусть $\theta(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x\ge 0;\\ 0 \text{ при } x<0.\end{cases}$

Тогда

$$\langle F[\theta],\varphi\rangle=\langle\theta,F\varphi\rangle=\lim_{\alpha\to 0+0}\frac{1}{|C|^n}\langle e^{-\alpha x},F\varphi\rangle=\lim_{\alpha\to 0+0}\langle F[e^{-\alpha x}\theta],\varphi\rangle=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-(\alpha+i\xi)x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{\alpha+i\xi}e^{-(\alpha+i\xi)x}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\alpha+i\xi}=$$

$$=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\xi-i\alpha}.$$

Переходя к пределу при $\alpha\to 0+0$ в $S'$ (или в $D'$) по формуле Сохоцкого, получаем $F[\theta](\xi)=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\xi+i0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\pi\delta(\xi)-iP\frac{1}{\xi}\right].$

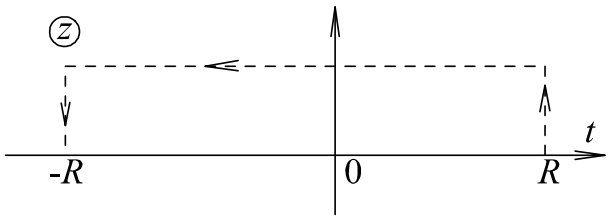
***21.10.*** Пусть $f(x)=e^{-\alpha^2|x|^2}$, $\alpha>0$. Тогда $f\in S(R^n)$ и

$$F[f](\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2|x|^2-i(\xi,x)}dx=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2x_j^2-i\xi_jx_j}dx_j=$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2-i\xi_jt/2}dt=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha}e^{-\xi_j^2/(4\alpha^2)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(t+i\xi_j/(2\alpha))}dt=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\alpha\right)^n}e^{-|\xi|^2/(4\alpha^2)}\prod_{j=1}^{n}\int_{\operatorname{Im}z=\xi_j/(2\alpha)}e^{-z^2}dz=\frac{1}{\left(2\pi\alpha\right)^{n/2}}e^{-|\xi|^2/(4\alpha^2)}\left(\int_{\operatorname{Im}z=0}e^{-z^2}dz\right)^n=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2}\alpha\right)^n}e^{-|\xi|^2/(4\alpha^2)}\text{ (см. рисунок).}$$



Положив $\alpha = a\sqrt{t}, a > 0,$ получим

$$F\left[e^{-a^2 t|x|^2}\right](\xi) = \frac{1}{\left(\sqrt{2t}a\right)^n} e^{-|\xi|^2/(4\alpha a^2 t)}.$$

## *21.5. Преобразование Фурье и свертка обобщенных функций*

***Определение 21.12.*** Пусть $g \in S'(R^n)$ и компакт $K \subset R^n$ таковы, что для любой функции $\varphi \in S(R^n)$ из условия $\operatorname{supp}\varphi \cap K = \varnothing$ следует, что $\langle g, \varphi \rangle$=0. Тогда обобщенная функция $g \in S'(R^n)$ называется финитной, а пересечение всех таких компактов – ее носителем.

***Определение 21.13.*** Пусть $f$, $g \in S'(R^n)$ и $g$ – финитная обобщенная функция, а $\eta \in D$ и равна единице в окрестности носителя $g$. Положим $\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x)g(x), \eta(y)\phi(x+y) \rangle$ для всех $\varphi \in S(R^n)$. Тогда функционал $f * g$ называется сверткой обобщенной функции $f \in S'(R^n)$ и финитной обобщенной функции $g$.

Здесь $\langle f(x)g(x), \psi(x,y) \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \psi(x,y) \rangle \rangle$ для любой $\psi \in S(R^n \times R^n)$ называется прямым произведением обобщенных функций $f$ и $g$.

Свойства свертки.

1. Свертка $f * g \in S'(R^n)$ и линейна по каждому аргументу.

2. Для любого мультииндекса $\alpha$ выполняется

$$D^\alpha f * g = D^\alpha (f * g) = f * D^\alpha g = D^\alpha g * f.$$

3. $f * \delta = \delta * f) = f$ для любой $f \in S'(R^n)$.

*Доказательство.*

$$\langle f(x)\delta(y), \eta(y)\varphi(x+y) \rangle = \langle f(x), \langle \delta(y), \eta(y)\varphi(x+y) \rangle \rangle =$$
$$= \langle f(x), \varphi(x) \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

так как $\eta(y) \equiv 1$ в окрестности точки $y = 0$.

4. Как следствие 2 и 3 получаем $D^{\alpha} f = D^{\alpha}\delta * f = \delta * D^{\alpha} f$.

5. Справедливо равенство $F[f * g] = (2\pi)^{n/2} F[f]F[g]$.

Доказательство проведем для случая $g = \delta$. Имеем:

$$\left\langle F[f * \delta], \varphi \right\rangle = \left\langle f * \delta, F[\varphi] \right\rangle = \left\langle f(x), \left\langle \delta(y), \eta(y) F[\varphi](x+y) \right\rangle \right\rangle =$$

$$= \left\langle f, F[\varphi] \right\rangle = \left\langle F[f] \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}, \varphi \right\rangle (2\pi)^{n/2} = (2\pi)^{n/2} \left\langle F[f]F[\delta], \varphi \right\rangle$$

для любого $\varphi \in S(R^n)$, таким образом, $F[f * \delta] = F[f]F[\delta]$.

## ***21.6. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами***

***Определение 21.14.*** Обобщенная функция $u \in D'$ называется обобщенным решением дифференциального уравнения, если

$$L(D)u = \left\langle \sum_{|\alpha| \le m} a_{\alpha} D^{\alpha} u, \varphi \right\rangle = \left\langle f, \varphi \right\rangle.$$

***Определение 21.15.*** Обобщенная функция $E \in D'$ называется фундаментальным решением дифференциального оператора $L(D)$, если $L(D)E(x) = \delta(x)$.

***Замечание 21.3.*** Для многих задач фундаментальные решения $E \in S'(R^n)$. И для их вычисления удобен аппарат преобразования Фурье.

***Лемма 21.2.*** $E \in D'$ является фундаментальным решением оператора $L(D)$: $L(-i\xi)F[E\} = (2\pi)^{-n/2}$, где $F[E]$ – преобразование Фурье от $E$, и $L(-i\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} a_{\alpha} (-i\xi)^{\alpha}$.

*Доказательство.*

$$F[L(D)E] = \sum_{|\alpha| \le m} a_{\alpha} F[D^{\alpha} E] = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{a_{\alpha}}{(-i\xi)^{\alpha}} F[E] = F[\delta] = (2\pi)^{-n/2},$$

т.е. справедливо равенство $L(-i\xi)F[E] = (2\pi)^{-n/2}$.

Обратно, если выполнено равенство леммы, то выполняется обратное преобразование Фурье и получим, что $E(x)$ удовлетворяет уравнению $L(E)=\delta$.

***<u>Лемма 21.3.</u>*** Если $z(t)$ – решение задачи

$$z'(t)+a(t)z(t)=0, z(0)=1,$$

то $E(t)=\theta(t)z(t)$ – фундаментальное решение оператора $\dfrac{d}{dt}+a(t)$.

*<u>Доказательство.</u>* $E'(t)=\theta(t)z'(t)+z(t)\delta(t)=\theta(t)z'(t)+\delta(t)$. Отсюда следует $E'+a(t)E=\theta(t)[z'(t)+a(t)z]+\delta(t)=\delta(t)$.

***<u>Пример 21.6</u>*** (фундаментальное решение уравнения теплопроводности). Если $E(x,t)\in S'(R^{n+1})$ таковы, что

$$\frac{\partial E}{\partial t}-a^2\Delta E=\delta(x,t),\quad a>0,$$

то, выполняя преобразование Фурье по $x$, получим

$$F_x\left[\frac{\partial E}{\partial t}\right]=\frac{\partial}{\partial t}F_x[E]=\frac{\partial}{\partial t}F_x[E]=\frac{\partial}{\partial t}\hat{E}(\xi,t),$$

$$F_x\left[\Delta E\right]=-|\xi|_2\frac{\partial}{\partial t}\hat{E}(\xi,t),$$

$$F_x\left[\delta(x,t)\right]=F_x[\delta(x)\delta(t)]=(2\pi)^{-n/2}1(\xi)\delta(t).$$

Следовательно, $\hat{E}(\xi,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\hat{E}(\xi,t)}{\partial t}+a^2|\xi|^2\,\hat{E}(\xi,t)=(2\pi)^{-n/2}1(\xi)\delta(t).$$

Используя лемму 21.3, получим $\hat{E}(\xi,t)=(2\pi)^{-n/2}\theta(t)e^{-a^2|\xi|^2t}$. Применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$E(x,t)=F_\xi^{-1}[\hat{E}(\xi,t)]=F_\xi[\hat{E}(-\xi,t)]=F_\xi[\hat{E}(\xi,t)]=\frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-|x|^2/(4a^2t)}.$$

***<u>Пример 21.12.</u>*** Пусть $n=3$. Вычислим с помощью преобразования Фурье фундаментальные решения оператора Лапласа $E_3(x)$. Если $\Delta E_3(x)=\delta(x)$, то $-|\xi|^2\,F[E_3](\xi)=(2\pi)^{-3/2}$, и получаем соотношение $F[E_3](\xi)=-(2\pi)^{-3/2}|\xi|^{-2}$. Это локально интегрируемая в

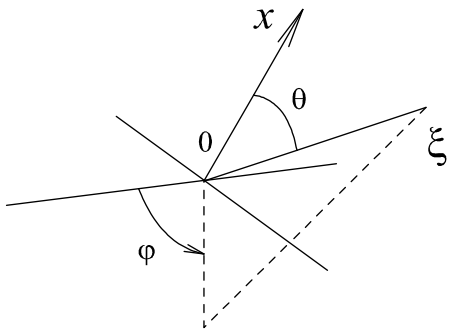
$R^3$ функция. Тогда имеем $E_3(x) = -(2\pi)^{-3/2} F^{-1}[|\xi|^{-2}]$. Подсчитываем выражение справа, т.е. для любой функции $\varphi \in S(R^3)$ будет выполнено:

$$\left\langle F^{-1}[|\xi|^{-2}], \varphi \right\rangle = \left\langle |\xi|^{-2} \; F^{-1}[\varphi] \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{|R^3} \frac{d\xi}{|\xi|^2} \int\limits_{R^3} e^{i(\xi,x)} \varphi(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|\xi|<|R^3} \frac{d\xi}{|\xi|^2} \int\limits_{R^3} e^{i(\xi,x)} \varphi(x) dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|R^3} \varphi(x) dx \int\limits_{|\xi|<R^3} \frac{e^{i(\xi,x)}}{|\xi|^2} d\xi.$$

Во внутреннем интеграле перейдем к сферическим координатам, направив полярную ось по вектору $\vec{x}$. Тогда $(\xi, x) = |x| \rho \cos\theta$, где $\xi_1 = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $\xi_2 = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $\xi_2 = \rho \cos\theta$. Якобиан такого преобразования $I = \rho^2 \sin\theta$.




Имеем

$$\int\limits_{|\xi|<R} \frac{e^{i(\xi,x)}}{|\xi|^2} d\xi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^R e^{i|x|\rho\cos\theta} d\rho =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\pi} d(-\cos\theta) \int\limits_0^R e^{i|x|\rho\cos\theta} d\rho = (-\cos\theta = t) = 2\pi \int\limits_0^R d\rho \int\limits_{-1}^1 e^{-i|x|\rho t} dt =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^R d\rho) \int\limits_{-1}^1 (\cos|x|\rho t e - i \sin|x|\rho t) dt = 4\pi \int\limits_0^R \frac{\sin|x|\rho}{|x|\rho} d\rho =$$

$$= 4\pi\int_0^R \frac{\sin|x|\rho}{|x|\rho} d\rho) = \frac{4\pi}{|x|}\int_0^R \frac{\sin t}{t} dt.$$

Отсюда следует равенство

$$E_3(x) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3 |x|} \lim_{R\to\infty} \int_0^{R|x|} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{4\pi|x|},$$

так как $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

***<u>Лемма 21.4.</u>*** Пусть $f \in D'$ такова, что $E * f$ существует в $D'$. Тогда решение уравнения $L(D)u(x) = f(x)$ существует и задается формулой $u = E * f$.

*<u>Доказательство</u>*. Имеем $L(D)(E * f) = (L(D)E) * f = \delta * f = f$.

# V. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

## § 22. Обобщенная задача Дирихле для уравнений эллиптического типа

В качестве примера приложения полученных результатов рассмотрим доказательство существования обобщенных решений задачи Дирихле для оператора

$$(Lu)(x) = -\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad} u(x)) + q(x)u(x), \tag{22.1}$$

где $p(x) \in C^1(\overline{G})$, $p(x) > 0$ в $G$; $q(x) \in C(\overline{G})$, $\mathrm{q}(x) > 0$ в $\overline{G}$.

Область $G$ предполагаем ограниченной. Рассмотрим билинейную форму Дирихле

$$B(u,v) = \int_G \left( p(x)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + q(x)\overline{v}(x) \right) dx. \tag{22.2}$$

Эта форма определена для всех $u, v \in W_2^1(G)$, а для $u \in C^2(\overline{G})$ и $v \in C_0^\infty(G)$ очевидно, что $(Lu,v)_{L_2(G)} = B(u,v)$. Положим

$$\kappa = \min_{x\in\overline{G}} p(x) > 0, C_0 = \max_{x\in\overline{G}} \left(\max(p(x), q(x))\right).$$

Тогда для любых $u, v \in W_2^1(G)$ будет выполнено

$$\left.\begin{aligned} &\text{а) } B(u,u) \ge \kappa \|u\|^2_{W_2^1(G)}; \\ &\text{б) } B(u,v) \le C_0 \|u\|_{W_2^1(G)} \|v\|_{W_2^1(G)}. \end{aligned}\right\} \tag{22.3}$$

Рассматривается следующая задача. Для заданной функции $f \in W_2^{-1}(G)$ найти $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(G)$, такую, что

$$B(u,v) = \langle f, v \rangle \text{ для любой } v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G). \tag{22.4}$$

***<u>Замечание 22.1.</u>*** Сформулированная задача называется обобщенной (однородной) задачей Дирихле для оператора (22.1).

Если $f \in C(\overline{G})$ $W_2^{-1}(G)$, а $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ – классическое решение задачи Дирихле для оператора $L$, т.е.

$$(Lu)(x) = f(x), u\big|_{\partial G} = 0, \tag{22.5}$$

то можно показать, что $u \in W_p^1(G)$ (другими словами, функция $u$ имеет суммируемые в квадрате на $G$ первые производные) и $u$ является решением задачи (22.4). Решение задачи (22.4) называют обобщенным из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ решением задачи (22.5).

***<u>Теорема 22.1.</u>*** Задача (22.4) имеет и притом единственное решение.

*<u>Доказательство</u>*. В силу неравенства Фридрихса

$$\exists C \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) : \| u \|_{L_2(G)}^2 \le C \| u \|_{W_2^1(G)}^2,$$

откуда

$$\kappa \| u \|_{W_2^1(G)}^2 \ge \frac{\kappa}{2} \| u \|_{W_2^1(G)}^2 + \frac{\kappa}{2C} \| u \|_{L_2(G)}^2 \ge \kappa_0 \| u \|_{W_2^1(G)}^2,$$

где $\kappa_0 = \min\left(\frac{\kappa}{2}, \frac{\kappa}{2C}\right)$. Но тогда из (22.3) получаем, что для любых $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ будет выполнено

а) $B(u,u) \ge \kappa \| u \|_{W_2^1(G)}^2$;

б) $| B(u,v) | \le C_0 \| u \|_{W_2^1(G)} \| v \|_{W_2^1(G)}$.

По теореме Лакса–Мильграма существует однозначно определенный изоморфизм $A$ пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ на $W_2^{-1}(G)$, такой, что для любых $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ будет выполнено $B(u,v) = \langle Au, v \rangle$, следовательно, для любой $f \in W_2^{-1}(G)$ существует единственная функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, а именно $u = A^{-1} f$, такая, что $B(u,v) = \langle f, v \rangle$ для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$. Таким образом, $u = A^{-1} f$ и есть решение задачи (22.4).

***<u>Замечание 22.2.</u>*** Обобщенная неоднородная задача Дирихле для оператора (22.1) ставится следующим образом: для заданных $f \in W_2^{-1}(G)$ и $g \in W_2^1(G)$ требуется найти $u \in W_2^1(G)$, такую, что

$$\begin{cases} B(u,v) = \langle f, v \rangle, \ \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 \ ; \\ (u - g) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 \ . \end{cases}$$

Заменой $w = u - g$ эта задача сводится к рассмотренной ранее однородной задаче.

***<u>Замечание 22.3.</u>*** Если $f \in C(\overline{G})$ и граница $\partial G$ области $G$ является достаточно гладким $(n-1)$-мерным многообразием, то можно показать, что обобщенное решение задачи (22.5) будет классическим решением этой задачи.

## § 23. Задача Коши для уравнения теплопроводности

В $D'\left(R^{n+1}_{(x,t)}\right)$ ищем решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f.$$

Согласно примеру 21.11 функция $E(x,t) = \dfrac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-|x|^2/(4a^2 t)}$ является фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

***<u>Определение 23.1.</u>*** Пусть функция $u$ обращается в нуль при $t < 0$. Тогда обобщенная функция $V = E * f$ называется тепловым потенциалом с плотностью $f$.

***<u>Теорема 23.1.</u>*** Пусть $f(x,t) \in C(t \geq 0)$ обращается в нуль при $t \leq 0$ и ограничена в любой полосе $0 \leq t \leq T$. Тогда тепловой потенциал $V = E * f$ выражается формулой

$$V(x,t) = \int_0^t \int_{R^n} \frac{f(\xi,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau,$$

является непрерывной в $R^{n+1}_{t\geq 0}$ функцией, удовлетворяющей оценке:

$$|V(x,t)|\leq t \sup_{\begin{cases}0\leq\tau\leq t\\ \xi\in R^n\end{cases}} |f(\xi,\tau)|, t>0,$$

начальному условию $\forall x\in R^n \exists \lim\limits_{t\to 0+0} V(x,t)=0$ и уравнению теплопроводности $\dfrac{\partial V}{\partial t}=a^2\Delta V+f$ в $D'$.

*Доказательство*. Имеем

$$(E*f)(x,t)=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{R^n} f(\xi,\tau)E(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau = V(x,t).$$

Используя теоремы о непрерывности по параметру, получаем, что $V(x,t)$ непрерывна при $t>0$. Далее

$$|V(x,t)|\leq t \sup_{\begin{cases}0\leq\tau\leq t\\ \xi\in R^n\end{cases}} |f(\xi,\tau)| \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} \frac{f(\xi,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi =$$

$$= t \sup_{\begin{cases}0\leq\tau\leq t\\ \xi\in R^n\end{cases}} |f(\xi,\tau)|, t>0.$$

Отсюда $\exists \lim\limits_{t\to 0+0} V(x,t)=0$. Наконец, из леммы 21.4 следует, что $V(x,t)$ удовлетворяет в $D'$ уравнению теплопроводности.

***Определение 23.2.*** Пусть $u_0(x)-$ ограниченная в $R^n$ функция. Тогда обобщенная функция $V_0(x,t)=E(x,t)*u_0(x)\delta(t)$ называется поверхностным тепловым потенциалом.

***Теорема 23.2.*** Пусть $u_0(x)\in C(R^n)$ и ограничена в $R^n$. Тогда поверхностный тепловой потенциал $V_0(x,t)$ представляется интегралом Пуассона

$$V_0(x,t)=\frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int\limits_{R^n} u_0(\xi)e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} d\xi,$$

принадлежит классу $C^\infty(t>0)$, удовлетворяет неравенству

$$|V_0(x,t)| \le \sup_{x\in R^n} |u_0(x)|$$

для всех $(x,\ t)$, $t>0$, непрерывен при $t \ge 0$, удовлетворяет начальному условию $V_0(x,0)=u_0(x)$ и однородному уравнению теплопроводности $\dfrac{\partial V_0}{\partial t} = a^2 \Delta V_0$.

<u>*Доказательство*</u>. Для любой $\varphi \in D(R^{n+1})$ выполняется

$$\left\langle E * u_0(x)\delta(t), \varphi \right\rangle = \left\langle E(x,t)u_0(\xi)\delta(\tau), \eta(\xi,\tau)\varphi(x+\xi,t+\tau) \right\rangle =$$
$$= \left\langle E(x,t)u_0(\xi), \varphi(x+\xi,t) \right\rangle = \left\langle E * u(x), \varphi \right\rangle,$$

где последняя свертка берется по $x$. Отсюда следует, что

$$V_0(x,t) = (E * u_0)(x,t) = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_{R^n} u_0(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

При любом $t>0$ имеем $V_0(x,t) \in C^\infty$ и, очевидно, удовлетворяет оценке $|V_0(x,t)| \le \sup\limits_{\xi\in R^n} |u_0(\xi)|$. Дифференцируя, получаем, что $\dfrac{\partial V_0}{\partial t} = a^2 \Delta V_0$. Наконец, фиксируя $x_0 \in R^n$, получаем:

$$\left|V_0(x,t) - u_0(x_0)\right| = \left| \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_{R^n} \left(u_0(\xi) - u_0(x)\right) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} d\xi \right| \le$$

$$\le \int_{R^n} \left|u_0(\xi) - u_0(x_0)\right| E(x-\xi,t) d\xi = \int_{R^n} \left|u_0(x-y) - u_0(x_0)\right| E(y,t) dy =$$

$$= \int_{|y|\le\delta} \left|u_0(x-y) - u_0(x_0)\right| E(y,t) dy + \int_{|y|>\delta} \left|u_0(x-y) - u_0(x_0)\right| E(y,t) dy \le$$

$$\le \varepsilon + \frac{2M}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_{|y|>\delta} e^{-\frac{|y|^2}{4a^2 t}} dy,$$

где $M = \sup\limits_{x\in R^n} |u_0(x)|$, а оценка следует из непрерывности $u(x)$ в точке $x_0$. В самом деле, в силу непрерывности $u(x)$ в точке $x_0$ получаем, что

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0\forall x,y\in R^n,|x-x_0|<\delta,|y|<\delta:|u_0(x+y)-u_0(x_0)|<\varepsilon.$$

Далее, пользуемся тем, что

$$\int\limits_{|y|>\delta}E(y,t)dy\le 1,\ \int\limits_{|y|>\delta}e^{-\frac{|y|^2}{4a^2t}}dt\frac{2M}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}=\int\limits_{|z|>\frac{\delta}{2a\sqrt{t}}}e^{-z^2}dz\frac{2M}{(\pi)^{n/2}}\to 0\ ,$$

при $t\to 0+0$, следовательно, существует $\lim\limits_{\substack{t\to 0+0\\ x\to x_0}}V(x,t)=u_0(x_0).$

***<u>Замечание.</u>*** Если при $f\in C(t\ge 0), f\equiv 0$ при $t<0,$ ограничена в каждой полосе $0\le t\le T$, а $u_0\in C(R^n)$ и ограничена, то обобщенное решение задачи Коши $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(x,t),u(x,0)=u_0(x)$ задается формулой Пуассона

$$u(x,t)=V(x,t)+V_0(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{R^n}\frac{f(\xi,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau+$$

$$+\frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int\limits_{R^n}u_0(\xi)e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}d\xi.$$

Можно показать, что если к тому же $f\in C^2(R^n),$ то

$$u\in C^2(x>0)\cap C(t\ge 0),$$

т.е. является классическим решением задачи Коши для уравнения теплопроводности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Бремерман Г.Б. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968.
2. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М.: Физматлит, 2002.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.: Наука, 1975.
5. Лебег А. Об измерении величин. М.: Учпедгиз, 1960.
6. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1981.
7. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Наука, 1965.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
9. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.
10. Шилов Г.Е., Гуревич Б.А. Интеграл, мера и производная. М.: Наука, 1967.
11. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
12. Шубин М.А. Лекции по уравнениям математической физики. М.: МЦНМО, 2003.

## СОДЕРЖАНИЕ

Николай Васильевич Мирошин
Александр Сергеевич Логинов
Валерий Михайлович Простокишин

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ**

**И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ**

Учебно-методическое пособие

Редактор М.В. Макарова

Подписано в печать 16.03.2009. Формат 60x84 1/16.
Уч.-изд.л. 10,5. Печ. л. 10,5. Тираж экз.
Изд. № 1/1/67. Заказ №

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».*
*Типография НИЯУ МИФИ.*
*115409, Москва, Каширское ш., 31*