Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

И. Н. Сергеев

Лекции по дифференциальным уравнениям

II семестр

Москва 2004

Сергеев И. Н.

Лекции по дифференциальным уравнениям. II семестр. — М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 64 с.

Настоящий текст служит продолжением брошюры того же автора "Лекции по дифференциальным уравнениям. II семестр", изданной тем же издательством в январе 2004 г.

Представлен конспект лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям, читавшихся автором в весеннем семестре второго курса механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова и связанных с вопросами непрерывности и дифференцируемости по параметрам решений дифференциальных уравнений, теорией устойчивости по Ляпунову, с особыми точками и первыми интегралами автономных систем, а также с вопросами существования и единственности решения задачи Коши для квазилинейного уравнения с частными производными первого порядка.

Даны точные определения, подробно доказаны сформулированные утверждения, теоретически обоснованы наиболее важные методы решения задач. Приведены все необходимые теоретические сведения, сопутствующие понятия и факты из смежных разделов математики. Предложены задачи для самостоятельного решения, развивающие и углубляющие прочитанный материал и, тем самым, позволяющие лучше подготовиться к экзамену.

Для студентов и аспирантов, изучающих классическую теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Содержание

5. Зависимость решений от параметров

5.1. Непрерывная зависимость от правых частей

решений задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t, x) \in G \subset \mathbf{R}^{1+n}, \tag{64}$$

предполагает, что наряду с этой задачей и ее решением $\mathsf{x}(\cdot)$, называемыми в дальнейшем *исходными*, рассматриваются *возмущенные* задачи Коши

$$\dot{y} = g(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (t, x) \in G,$$

и, соответственно, их решения $\mathsf{y}(\cdot)$.

И исходное, и все возмущенные решения заранее считаются *непродолжаемыми*, а вопрос ставится так: можно ли гарантировать, что при малых отклонениях правых частей возмущенной задачи от правых частей исходной задачи возмущенное решение будет иметь близкую к исходной область определения и на ней будет мало отличаться от исходного решения.

Ответ оказывается положительным уже при весьма слабых ограничениях на правую часть уравнения[1)], в чем и состоит основная

Теорема 95. *Пусть* $f, f'_x \in \mathrm{C}(G)$, *а* x — *исходное решение. Тогда для любого отрезка* $K \subset D(\mathsf{x})$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что если* $g, g'_y \in \mathrm{C}(G)$ *и выполнены неравенства*

$$\|f - g\|_G \equiv \sup_{(t,x)\in G} |f(t,x) - g(t,x)| < \delta, \quad |x_0 - y_0| < \delta, \qquad (65)$$

то возмущенное решение y *определено на отрезке* K *и удовлетворяет оценке*

$$\|\mathsf{x} - \mathsf{y}\|_K \equiv \sup_{t\in K} |\mathsf{x}(t) - \mathsf{y}(t)| < \varepsilon. \qquad (66)$$

$\lhd$ 1. Без ограничения общности[2)] считаем, что данный отрезок

$$K \equiv [\alpha; \beta] \subset D(\mathsf{x})$$

содержит точку t_0, а данное число $\varepsilon > 0$ удовлетворяет оценке

$$\rho(\Gamma_{\mathsf{x}|_K}, \partial G) \equiv \varepsilon_0 > \varepsilon,$$

так как граница ∂G области G — замкнута, а график $\Gamma_{\mathsf{x}|_K}$ непрерывной функции x на отрезке K — компакт).

2. Введем обозначение

$$U_{\varepsilon,K} \equiv \{(t,x) \in \mathbf{R}^{1+n} |\ t \in K,\ |x - \mathsf{x}(t)| < \varepsilon\} \qquad (67)$$

и заметим, что для любой точки $(t,x) \in U$ выполнена оценка

$$\rho((t,x), \Gamma_{\mathsf{x}|_K}) \leqslant \rho((t,x),(t,\mathsf{x}(t))) < \varepsilon,$$

поэтому замыкание этого множества

$$C \equiv \overline{U_{\varepsilon,K}} \subset \{(t,x) \in \mathbf{R}^{1+n} |\ \rho((t,x), \Gamma_{\mathsf{x}|_K}) \leqslant \varepsilon\} \subset G \qquad (68)$$

— ограничено, а значит, является компактом. Поэтому существует константа[3)]

$$L \equiv \|f'_x\|_C < \infty.$$

[1)] Таких же, как в теоремах существования и единственности; см. главу 2.

[2)] Заметим, что отрезок K, не в ущерб утверждению теоремы, можно увеличивать, а число ε — уменьшать.

[3)] Выпуклость области C по переменной x здесь, конечно, имеет место).

3. Пусть для некоторого положительного $\delta < \varepsilon$, значение которого мы уточним позже (см. соотношение (71) ниже), правые части возмущенного уравнения удовлетворяют оценкам

$$\|g - f\|_C < \delta, \quad |y_0 - x_0| < \delta. \tag{69}$$

Тогда точка (t_0, y_0) — внутренняя для множества $U_{\varepsilon,K}$: действительно, в силу непрерывности функции x при достаточно малом $\gamma < (\varepsilon - \delta)/2$ из оценок $|t - t_0| < \gamma$ и $|y - y_0| < \gamma$ имеем $t \in K$ и

$$|y - \mathsf{x}(t)| \leqslant |y - y_0| + |y_0 - x_0| + |\mathsf{x}(t_0) - \mathsf{x}(t)| < \gamma + \delta + \frac{\varepsilon - \delta}{2} < \varepsilon,$$

откуда $(t, y) \in U_{\varepsilon,K}$.

4. Согласно теореме 20, график непродолжаемого возмущенного решения y покинет компакт C, например, при достаточно больших $t > t_0$. Поэтому выполнены соотношения

$$\beta' \equiv \inf\{t > t_0 |\ (t, \mathsf{y}(t)) \notin C\} > t_0, \quad (t, \mathsf{y}(t)) \in \begin{cases} U_{\varepsilon,K}, & t \in [t_0; \beta'), \\ \partial U_{\varepsilon,K}, & t = \beta'. \end{cases}$$

5. Предположим, что

$$\beta' < \beta. \tag{70}$$

Тогда при каждом $t \in [t_0; \beta')$ для функции $u \equiv |\mathsf{x} - \mathsf{y}|$ имеем неравенство

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u(t) = |\mathsf{x}(t) - \mathsf{y}(t)| \leqslant \left| x_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} \big(\dot{\mathsf{x}}(\tau) - \dot{\mathsf{y}}(\tau)\big)\, d\tau \right| \leqslant |x_0 - y_0| \\ + \left| \int_{t_0}^{t} \big(f(\tau, \mathsf{x}(\tau)) - f(\tau, \mathsf{y}(\tau))\big)\, d\tau \right| + \left| \int_{t_0}^{t} \big(f(\tau, \mathsf{y}(\tau)) - g(\tau, \mathsf{y}(\tau))\big)\, d\tau \right| \\ \leqslant \delta + \left| \int_{t_0}^{t} L|x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau \right| + \left| \int_{t_0}^{t} \delta\, d\tau \right| \leqslant \delta(1 + T) + L\left| \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau \right|, \end{aligned}$$

где $T \equiv \beta - t_0$.

6. По лемме Гронуолла — Беллмана при каждом $t \in [t_0; \beta')$ получаем

$$|x(t) - y(t)| = u(t) \leqslant \delta(1 + T)e^{L|t - t_0|} \leqslant \delta(1 + T)e^{LT} = \varepsilon/2,$$

например, если

$$\delta \equiv \frac{\varepsilon}{2(1 + T)e^{LT}} < \varepsilon \tag{71}$$

(последняя оценка выполняется автоматически).

7. Из полученного неравенства вытекает оценка

$$|x(\beta') - y(\beta')| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

означающая, что точка $(\beta', \mathsf{y}(\beta'))$ — внутренняя для множества $U_{\varepsilon,K}$ (доказательство аналогично приведенному в п. 3), и тем самым противоречащая соотношению $(\beta', \mathsf{y}(\beta')) \in \partial U_{\varepsilon,K}$.

8. Таким образом, сделанное выше предположение (70) не верно, откуда $\beta' \geqslant \beta$, т. е. решение y, во-первых, определено до самого конца[4)] отрезка K и, во-вторых, удовлетворяет требуемой оценке (66). $\triangleright$

5.2. Компактно-открытая топология

I. Только что доказанная теорема фактически утверждает[5)], что решение x задачи Коши непрерывно зависит от ее *правых частей*, т. е. от правой части f уравнения и начального значения x_0. Для уточнения этой формулировки, введем следующие обозначения:

а) $\mathrm{C}^{0,1}(G)$ — множество функций, определенных на области G и непрерывных, вместе с производной по x, наделенное *равномерной на* G топологией, которая задается всевозможными δ-окрестностями

$$U_\delta(f) \equiv \{g \in \mathrm{C}^{0,1}(G) |\ \|f - g\|_G < \delta\}$$

функций $f \in \mathrm{C}^{0,1}(G)$;

b) $G_{t_0} \subset \mathbf{R}^n$ — сечение[6)] области G гиперплоскостью $t = t_0$ с топологией, определяемой нормой в $\mathbf{R}^n$, т. е. задаваемой всевозможными δ-окрестностями

$$U_\delta(x_0) \equiv \{y_0 \in G_{t_0} |\ |y_0 - x_0| < \delta\}$$

точек $x_0 \in G_{t_0}$;

c) $S(G)$ — множество всех непродолжаемых[7)] решений всех уравнений с правыми частями из пространства $\mathrm{C}^{0,1}(G)$, наделенное *компактно-открытой* топологией, т. е. равномерной, но не на

[4)] Правого и, аналогично, левого.

[5)] Оправдывая, тем самым, название предыдущего параграфа.

[6)] Точнее, его проекция на пространство $\mathbf{R}^n$.

[7)] Асимптотически продолженных до границы области G; см. теорему 20.

полных областях определения решений, а лишь на любых их компактных[8] подмножествах. Эта топология задается всевозможными *ε-трубками*[9]

$$U_{\varepsilon,K}(\mathsf{x}) \equiv \{\mathsf{y} \in S(G) |\ D(\mathsf{y}) \supset K,\ \|\mathsf{y}-\mathsf{x}\|_K < \varepsilon\}$$

функций $\mathsf{x} \in S(G)$ на различных *компактах* $K \subset D(\mathsf{x})$.

В новой терминологии теорема 95 звучит как

Следствие 96. *Отображение*

$$\mathrm{C}^{0,1}(G) \times G_{t_0} \to S(G), \tag{72}$$

которое каждой паре $f \in \mathrm{C}^{0,1}(G)$ и $x_0 \in G_{t_0}$ правых частей задачи Коши ставит в соответствие ее непродолжаемое решение $\mathsf{x} \in S(G)$, — непрерывно.

II. В множестве $\mathrm{C}^{0,1}(G)$ можно задать и компактно-открытую на G топологию с помощью δ-трубок

$$U_{\delta,C}(f) \equiv \{g \in \mathrm{C}^{0,1}(G) |\ \|g-f\|_C < \delta\}$$

функций $f \in \mathrm{C}^{0,1}(G)$ на компактах $C \subset G$. Из доказательства теоремы 95 можно выудить несколько более тонкий[10], чем вынесенный в ее формулировку, результат, составляющий

Следствие 97. *Если равномерную топологию в* $\mathrm{C}^{0,1}(G)$ *заменить компактно-открытой, то отображение* (72) *останется непрерывным.*

$\lhd$ Действительно, по данным отрезку $K \subset D(\mathsf{x})$ и числу $\varepsilon > 0$ в процессе доказательства теоремы 95 построены такие компакт $C \subset G$ (68) и число $\delta > 0$ (71), что справедлива импликация

$$g \in U_{\delta,C}(f), \quad y_0 \in U_\delta(x_0) \implies \mathsf{y} \in U_{\varepsilon,K}(\mathsf{x})$$

(см. неравенства (69) и (66)). $\rhd$

III. Связь между поточечной непрерывностью по паре переменных и непрерывностью по одной из них, равномерной на компактах по другой, раскрывает

---

[8] Кстати, не обязательно содержащих точку t_0.

[9] Это же название обычно распространяют и на множества $U_{\varepsilon,K} \subset G$ (67), т. е. на ε-трубки в *геометрическом*, а не в функциональном смысле.

[10] Поскольку любое множество, открытое в компактно-открытой топологии, — открыто и в равномерной, но не наоборот.

Лемма 98. *Для любых областей $X \subset \mathbf{R}^k$ и $Y \subset \mathbf{R}^m$ функция*

$$F: X \times Y \to \mathbf{R}^n$$

непрерывна[11] *тогда и только тогда, когда она непрерывна по x в каждой точке области $X \times Y$ и непрерывна по y в каждой точке области Y в смысле компактно-открытой на X топологии*[12].

$\lhd$ 1. Пусть функция F непрерывна по совокупности своих переменных. Тогда она тем более непрерывна по одной переменной x. Докажем, что для любого компакта $K \subset X$ функция $F(\cdot, y)$ — непрерывна по y равномерно по $x \in K$, т. е. по заданным $y_0 \in Y$ и $\varepsilon > 0$ укажем $\delta > 0$, для которого будет справедлива импликация

$$|y - y_0| < \delta \implies \|F(\cdot, y) - F(\cdot, y_0)\|_K < \varepsilon.$$

Действительно:

a) выберем такое $\delta > 0$, что точка y_0 лежит в области Y вместе с замыканием B некоторой ее δ-окрестности;

b) используя равномерную непрерывность функции F на компакте $K \times B$, уменьшим, если потребуется, число δ, обеспечив для всех $x_1, x_2 \in K$ и $y \in B$ справедливость импликации

$$|x_1 - x_2| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta \implies |F(x_1, y) - F(x_2, y_0)| < \varepsilon;$$

c) полученная импликация превращается в требуемую, если в ней положить $x_1 = x_2 = x$, взяв в последнем неравенстве максимум по $x \in K$.

2. Пусть теперь функция F непрерывна по x и непрерывна по y в компактно-открытой на X топологии. Докажем, что в любой точке $(x_0, y_0) \in X \times Y$ она непрерывна по совокупности своих переменных:

d) выберем такое $\delta > 0$, что точка x_0 лежит в области X вместе с замыканием K некоторой ее δ-окрестности;

e) по заданному $\varepsilon > 0$ уменьшим, если потребуется, число δ так, чтобы из условия $|y - y_0| < \delta$ вытекало неравенство

$$\|F(\cdot, y) - F(\cdot, y_0)\|_K < \varepsilon/2$$

---

[11] По совокупности переменных x, y.

[12] Иными словами, когда отображение, ставящее в соответствие каждому $y \in Y$ функцию $F(\cdot, y)$ из пространства $C(X)$, наделенного компактно-открытой топологией, — непрерывно.

(это возможно, поскольку функция F непрерывна по y равномерно на компакте $K \subset X$);

f) при необходимости, еще уменьшим число δ так, чтобы из условия $|x - x_0| < \delta$ (в силу непрерывности по x функции F в точке (x_0, y_0)) вытекало неравенство

$$|F(x, y_0) - F(x_0, y_0)| < \varepsilon/2;$$

g) при указанных условиях будет выполнена требуемая оценка

$$|F(x,y) - F(x_0,y_0)| \leqslant |F(x,y) - F(x,y_0)| + |F(x,y_0) - F(x_0,y_0)| < \varepsilon.$$

$\triangleright$

5.3. Непрерывность решений по параметру

μ, принимающему значения в области $\mathrm{M} \subset \mathbf{R}^m$ и задающему *семейство* задач Коши

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad x(t_0) = x_0(\mu), \quad (t, x) \in G \subset \mathbf{R}^{1+n}, \quad \mu \in \mathrm{M}, \quad (73)$$

понимается как малость изменения решения, обозначаемого здесь через $\mathsf{x}(t, \mu)$, при малых изменениях параметра μ, т. е. непрерывность отображения

$$\mathrm{M} \to S(G),$$

которое каждому значению $\mu \in \mathrm{M}$ ставит в соответствие непродолжаемое решение $\mathsf{x}(\cdot, \mu) \in S(G)$. Она имеет место уже при совершенно естественных предположениях, как показывает

Теорема 99. *Пусть* $f, f'_x \in \mathrm{C}(G \times \mathrm{M})$, $x_0 \in \mathrm{C}(\mathrm{M})$ *и* $\mu^* \in \mathrm{M}$. *Тогда для любого отрезка* $K \subset D\,(\mathsf{x}(\cdot, \mu^*))$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая окрестность* $U(\mu^*) \subset \mathrm{M}$, *что если*

$$\mu \in U(\mu^*),$$

то решение $\mathsf{x}(\cdot, \mu)$ *определено на отрезке* K *и удовлетворяет оценке*

$$\|\mathsf{x}(\cdot, \mu) - \mathsf{x}(\cdot, \mu^*)\|_K < \varepsilon.$$

◁ Утверждение данной теоремы следует из непрерывности композиции отображений

$$\mathrm{M} \to \mathrm{C}^{0,1}(G) \times G|_{t_0} \to S(G),$$

первое из которых по каждому $\mu \in \mathrm{M}$ определяет правые части $f(\cdot,\cdot,\mu) \in \mathrm{C}^{0,1}(G)$ и $x_0(\mu) \in G|_{t_0}$ задачи Коши, а второе — ставит им в соответствие непродолжаемое решение $\mathsf{x}(\cdot,\mu) \in S(G)$ этой задачи. Распишем доказательство более подробно:

1) в соответствии со следствием 97 для заданного решения $\mathsf{x}(\cdot,\mu^*) \in S(G)$, отрезка $K \subset D\,(\mathsf{x}(\cdot,\mu^*))$ и числа $\varepsilon > 0$ выберем компакт $C \subset G$ и число $\delta > 0$, обеспечивающие импликацию

$$\begin{cases} f(\cdot,\cdot,\mu) \in U_{\delta,C}(f(\cdot,\cdot,\mu^*)) \\ x_0(\mu) \in U_\delta(x_0(\mu^*)) \end{cases} \implies \mathsf{x}(\cdot,\mu) \in U_{\varepsilon,K}(\mathsf{x}(\cdot,\mu^*));$$

2) левая часть последней импликации имеет место для непрерывных функций

$$f\colon G \times \mathrm{M} \to \mathbf{R}^n, \quad x_0\colon \mathrm{M} \to G_{t_0}$$

(первая из которых, согласно лемме 98, еще и непрерывна по μ равномерно на компакте C), как только параметр μ принадлежит достаточно малой окрестности $U(\mu^*)$. ▷

Следствие 100. *Если* $f, f'_x \in \mathrm{C}(G \times \mathrm{M})$ *и* $x_0 \in \mathrm{C}(\mathrm{M})$, *то область определения* $D(\mathsf{x})$ *решения* x, *рассматриваемого как функция двух переменных* t *и* μ, *— есть область в* $\mathbf{R}^{1+m}$, *на которой функция* x *вместе с производной*[13] $\dot{\mathsf{x}}$ *непрерывна по совокупности своих переменных.*

◁ 1. Связность множества $D(\mathsf{x})$ вытекает из связности его сечения плоскостью $t = t_0$, в которой $\mu \in \mathrm{M}$, и сечения любой прямой вида $\mu = \mu^*$, вдоль которой координата t пробегает интервал $D(\mathsf{x}(\cdot,\mu^*)) \ni t_0$.

2. Если $(t^*,\mu^*) \in D(\mathsf{x})$, то решение $\mathsf{x}(\cdot,\mu^*)$ заведомо определено на замыкании некоторого интервала I, содержащего точку t^*, а по теореме 99 на этом же замыкании определены и все решения $\mathsf{x}(\cdot,\mu)$, для которых параметр μ принадлежит некоторой окрестности $U(\mu^*)$. Поэтому множество $D(\mathsf{x})$ содержит целую окрестность $I \times U(\mu^*)$ точки (t^*,μ^*).

[13] По t.

3. Непрерывность функции x в точке (t^*, μ^*) вытекает, согласно лемме 98, из непрерывности всех решений по $t \in I$ и их непрерывности по $\mu \in U(\mu^*)$ в смысле компактно-открытой на I топологии (теорема 99).

4. Если подставить непрерывную (по совокупности переменных t и μ) функцию x в уравнение (73)

$$\dot{\mathsf{x}}(t, \mu) = f(t, \mathsf{x}(t, \mu), \mu), \quad (t, \mu) \in D(\mathsf{x}), \tag{74}$$

то правая его часть также будет непрерывной, а значит, и левая часть, совпадающая с функцией $\dot{\mathsf{x}}$. ▷

5.4. Непрерывность по начальному значению

x_0 решений задачи Коши (64) при фиксированном начальном моменте t_0 означает непрерывность отображения

$$G_{t_0} \to S(G),$$

ставящего в соответствие каждому начальному значению x_0 из *области*[14)] G_{t_0} непродолжаемое решение, обозначаемое здесь через $\mathsf{x}(\cdot, x_0)$.

Теорема 101. *Пусть $f, f'_x \in \mathrm{C}(G)$ и $x_0^* \in G_{t_0}$. Тогда для любого отрезка $K \subset D\left(\mathsf{x}(\cdot, x_0^*)\right)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если*

$$|x_0 - x_0^*| < \delta,$$

то решение $\mathsf{x}(\cdot, x_0)$ определено на отрезке K и удовлетворяет оценке

$$\|\mathsf{x}(\cdot, x_0) - \mathsf{x}(\cdot, x_0^*)\|_K < \varepsilon.$$

Чтобы доказать это утверждение[15)], достаточно объявить параметром μ само начальное значение x_0 и применить теорему 99, положив в ней

$$\mathrm{M} \equiv G_{t_0}, \quad f(t, x, \mu) \equiv f(t, x), \quad x_0(\mu) \equiv \mu.$$

Если в этих же условиях применить следствие 100, то получится

[14)] Открытое сечение $G_{t_0} \subset \mathbf{R}^n$ области G плоскостью $t = t_0$ предполагается еще и *связным*.

[15)] Вытекающее, по большому счету, уже из теоремы 95, где взято $g = f$.

Следствие 102. *Если $f, f'_x \in \mathrm{C}(G)$, то область определения $D(\mathsf{x})$ решения x, рассматриваемого как функция двух переменных t и x_0, — есть область в $\mathbf{R}^{1+n}$, на которой функция x вместе с производной $\dot{\mathsf{x}}$ непрерывна по совокупности своих переменных.*

5.5. Лемма Адамара

выражает приращение функции

$$F(\cdot,\cdot)\colon U \to \mathbf{R}^n, \quad U \subset \mathbf{R}^{1+k},$$

от $t \in \mathbf{R}$ и $u \in \mathbf{R}^k$ через приращение переменной u, по которой область U предполагается *выпуклой* (при каждом фиксированном t), причем предлагаемое в лемме выражение (75) весьма напоминает линейное[16], и к тому же с непрерывными коэффициентами.

Лемма 103. *Если $F, F'_u \in \mathrm{C}(U)$, то существует непрерывная функция*

$$\Phi(\cdot,\cdot,\cdot)\colon V \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n), \quad V \subset \mathbf{R}^{1+2k},$$

определенная на множестве

$$V \equiv \{(t,u,v)|\ (t,u),(t,v) \in U\}$$

и удовлетворяющая равенству

$$F(t,v) - F(t,u) = \Phi(t,u,v)(v-u), \quad (t,u,v) \in V. \tag{75}$$

$\lhd$ Обозначив $v \equiv u+h$, в силу выпуклости по u области U имеем

$$F(t,v)-F(t,u) = F(t,u+\theta h)\Big|_0^1 = \int_0^1 \frac{dF(t,u+\theta h)}{d\theta}\,d\theta = \Phi(t,u,v)h,$$

где

$$\Phi(t,u,v) \equiv \int_0^1 F'_u\big(t,u+\theta(v-u)\big)\,d\theta$$

— непрерывная по совокупности своих переменных функция (как интеграл от функции, непрерывной по той же совокупности). $\rhd$

[16] Здесь не утверждается, что приращение функции $F(t,v) - F(t,u)$ — и вправду линейно по приращению аргумента $v-u$: ведь действующий на него оператор $\Phi(t,u,v)$ сам зависит от переменных u и v.

5.6. Дифференцируемость по параметру и по начальному значению

I. Решение x параметрического семейства (73) задач Коши, рассматриваемое как функция времени t и параметра μ, согласно следствию 100, определено и непрерывно в некоторой области $D(\mathsf{x})$.

Теорема 104. *Пусть* $f, f'_x, f'_\mu \in \mathrm{C}(G \times \mathrm{M})$ *и* $x_0 \in \mathrm{C}^1(\mathrm{M})$. *Тогда в области* $D(\mathsf{x})$ *существуют непрерывные производные* x'_μ *и* $\mathsf{x}''_{\mu t} = \mathsf{x}''_{t\mu}$.

$\lhd$ 1. Фиксируем точку $(t^*, \mu^*) \in D(\mathsf{x})$, интервал $I \ni t^*$, содержащийся со своим замыканием K в области определения решения $\mathsf{x}(\cdot, \mu^*)$, и такое число $\varepsilon > 0$, что выпуклая по x область

$$U_{\varepsilon,I} \equiv \{(t,x)|\ t \in I,\ |(t,x) - (t, \mathsf{x}(t,\mu^*)| < \varepsilon\}$$

содержится в области G.

2. С помощью теоремы 99 выберем такую выпуклую окрестность $U(\mu^*) \subset \mathrm{M}$, что при любом $\mu \in U(\mu^*)$ решение $\mathsf{x}(\cdot,\mu)$ принадлежит ε-трубке функции $\mathsf{x}(\cdot,\mu^*)$ на компакте[17] K.

3. Согласно лемме 103 (Адамара), для функции

$$F(t,u) \equiv f(t,x,\mu),$$

определенной на выпуклой по $u \equiv (x,\mu)$ области

$$U \equiv U_{\varepsilon,I} \times U(\mu^*) \subset \mathbf{R}^{1+k}, \quad k = n + m,$$

существует непрерывная функция $\Phi(t,u,v)$, удовлетворяющая равенству

$$\begin{aligned} f(t,\mathsf{x}(t,\nu),\nu) - f(t,\mathsf{x}(t,\mu),\mu) &= \Phi(t,u(t,\mu),u(t,\nu))\bigl(u(t,\nu) - u(t,\mu)\bigr) \\ &= g(t,\mu,\nu)\bigl(\mathsf{x}(t,\nu) - \mathsf{x}(t,\mu)\bigr) + h(t,\mu,\nu)(\nu - \mu), \end{aligned}$$

где $\mu,\nu \in U(\mu^*)$, функция $u(t,\mu) \equiv (\mathsf{x}(t,\mu),\mu)$ — непрерывна по совокупности своих переменных, поэтому оператор-функция

$$\phi(t,\mu,\nu) \equiv \Phi(t,u(t,\mu),u(t,\nu)) \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$$

[17] Поэтому оно определено на отрезке K, а график его сужения на I лежит в области $U_{\varepsilon,I}$.

и ее компоненты[18] $g(t,\mu,\nu)$ и $h(t,\mu,\nu)$, задаваемые равенствами

$$g \equiv \phi|_{\mathbf{R}^n\times\{0\}}, \quad h \equiv \phi|_{\{0\}\times\mathbf{R}^m},$$

— также непрерывны по совокупности переменных t,μ,ν.

4. Введя в пространстве $\mathbf{R}^m \supset \mathrm{M}$ координаты и обозначив для данных $\mu \in U(\mu^*)$ и $i \in \{1,\dots,m\}$

$$\mathsf{y}_i(t,\mu,\nu) \equiv \frac{\mathsf{x}(t,\nu)-\mathsf{x}(t,\mu)}{\nu_i-\mu_i},$$

где

$$\nu = \mu + (\nu_i-\mu_i)e_i \neq \mu, \tag{76}$$

а S_i — i-й вектор стандартного базиса в $\mathbf{R}^m$, имеем

$$\begin{aligned}\dot{\mathsf{y}}_i(t,\mu,\nu) &= \frac{\dot{\mathsf{x}}(t,\nu)-\dot{\mathsf{x}}(t,\mu)}{\nu_i-\mu_i} = \frac{f(t,\mathsf{x}(t,\nu),\nu)-f(t,\mathsf{x}(t,\mu),\mu)}{\nu_i-\mu_i}\\ &= g(t,\mu,\nu)\mathsf{y}_i(t,\mu,\nu)+h_i(t,\mu,\nu), \qquad h_i \equiv he_i,\end{aligned}$$

т. е. функция $\mathsf{y}_i(t,\mu,\nu)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\dot y = g(t,\mu,\nu)y + h_i(t,\mu,\nu), \quad y(t_0) = \frac{x_0(\nu)-x_0(\mu)}{\nu_i-\mu_i}.$$

5. Предельная, при $\nu \to \mu$, задача Коши[19]

$$\dot y = g(t,\mu,\mu)y + h_i(t,\mu,\mu), \quad y(t_0) = {x_0}'_{\mu_i}(\mu), \tag{77}$$

также имеет решение, обозначаемое через $\mathsf{y}_i(\cdot,\mu)$ и определенное на всем интервале I (так как уравнение в задаче — линейно, с непрерывными по $t\in I$ коэффициентами).

6. Согласно следствию 100, функция $\mathsf{y}_i(\cdot,\mu)$ удовлетворяет равенству

$$\mathsf{y}_i(t,\mu) = \lim_{\nu_i\to\mu_i}\mathsf{y}_i(t,\mu,\nu) = \lim_{\nu_i\to\mu_i}\frac{\mathsf{x}(t,\nu)-\mathsf{x}(t,\mu)}{\nu_i-\mu_i} = \mathsf{x}'_{\mu_i}(t,\mu), \quad t\in I,$$

в котором первый, а значит, и второй, из пределов, взятые при условии (76), существует.

[18] Определенные на линейных пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$, изоморфных подпространствам $\mathbf{R}^n\times\{0\}$ и $\{0\}\times\mathbf{R}^m$ соответственно.

[19] Начальное значение в ней определено по условию.

7. Каждая компонента y_i $(i=1,\dots,m)$ функции

$$\mathsf{y}(t,\mu)=\mathsf{x}'_\mu(t,\mu),\quad (t,\mu)\in I\times U(\mu^*),$$

и ее производная $\dot{\mathsf{y}}_i$ непрерывна по совокупности своих переменных (поскольку следствие 100 применимо к задаче Коши (77)). Этими же свойствами обладает и функция x'_μ.

8. Если в уравнение (73) подставить решение x, то получится равенство (74), правая часть которого имеет непрерывную по совокупности переменных t и μ частную производную по μ (так как ее имеет функция $\mathsf{x}(t,\mu)$), а значит, и левая часть, совпадающая с функцией $\dot{\mathsf{x}}$, — тоже.

9. Итак, функция x имеет в области $I\times U(\mu^*)$ непрерывные, и потому равные друг другу, смешанные производные

$$\dot{\mathsf{y}}(t,\mu)=\mathsf{x}''_{\mu t}(t,\mu)\quad\text{и}\quad \dot{\mathsf{x}}'_\mu(t,\mu)=\mathsf{x}''_{t\mu}(t,\mu).$$

$\triangleright$

II. Решение x семейства (64) задач Коши с фиксированным начальным моментом t_0, рассматриваемое как функция времени t и начального значения $x_0\equiv\mu$ и определенное в области $D(\mathsf{x})$ (следствие 102), подпадает под действие теоремы 104, частным случаем которой и является

Теорема 105. *Если $f,f'_x\in \mathrm{C}(G)$, то в области $D(\mathsf{x})$ существуют непрерывные производные x'_{x_0} и $\mathsf{x}''_{x_0 t}=\mathsf{x}''_{t x_0}$.*

5.7. Система в вариациях

I. Для того чтобы явно найти коэффициенты задачи Коши (77) для $(n\times m)$-матричной[20] функции

$$\mathsf{y}(\cdot,\mu^*)=\mathsf{x}'_\mu|_{\mu=\mu^*}=(\mathsf{x}'_{\mu_1},\dots,\mathsf{x}'_{\mu_m})|_{\mu=\mu^*}$$

можно, например, детально проанализировать доказательство теоремы 104. Однако лучше поступить по-другому, воспользовавшись лишь результатом этой теоремы, гарантирующей правомерность следующих выкладок: подставить $x=\mathsf{x}(t,\mu)$ в задаче Коши (73) и продифференцировать по μ все ее равенства

$$\begin{gathered}\left(\mathsf{x}'_\mu\right)^{\boldsymbol{\cdot}}(t,\mu)=\dot{\mathsf{x}}'_\mu(t,\mu)=f'_{\mathsf{x}}(t,\mathsf{x}(t,\mu),\mu)\mathsf{x}'_\mu(t,\mu)+f'_\mu(t,\mathsf{x}(t,\mu),\mu),\\ \mathsf{x}'_\mu(t_0,\mu)={x_0}'(\mu),\end{gathered}$$

[20] Предполагается, что в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ фиксированы базисы.

а затем положить всюду $\mu = \mu^*$.

Получаемая линейная неоднородная система называется *системой в вариациях по параметру* (*вдоль решения* $\mathsf{x}(\cdot, \mu^*)$) и записывается в виде

$$\dot{y} = A(t)y + F(t), \quad t \in D(\mathsf{x}(\cdot, \mu^*)),$$

где функция

$$A(t) \equiv f'_x(t, \mathsf{x}(t, \mu^*), \mu^*)$$

принимает $(n \times n)$-матричные значения, а неоднородность

$$F(t) \equiv f'_\mu(t, \mathsf{x}(t, \mu^*), \mu^*)$$

— $(n \times m)$-матричные, также как и искомая функция[21] y с начальным условием

$$y(t_0) = {x_0}'(\mu^*).$$

II. Если роль параметра μ в исходной задаче Коши (73) играет начальное значение x_0, то правая часть $f(t, x, x_0) \equiv f(t, x)$ уравнения этой задачи не зависит от своего третьего аргумента. Поэтому система в вариациях по такому параметру

$$\dot{y} = A(t)y, \quad A(t) \equiv f'_x(t, \mathsf{x}(t, x_0^*)), \tag{78}$$

— линейная однородная. Эта система называется *системой в вариациях по начальному значению* (*вдоль решения* $\mathsf{x}(\cdot, x_0^*)$) и оказывается одинаковой[22] как для искомой $(n \times n)$-матричной функции

$$\mathsf{y} = \mathsf{x}'_{x_0}(\cdot, x_0^*),$$

так и для каждого ее столбца, т. е. вектор-функции, равной производной решения x по соответствующей координате начального значения.

Правая же часть начального условия в исходной задаче Коши (73) равна просто x_0, так что начальное значение[23] $\mathsf{y}(t_0)$ в случае матричной функции совпадает с единичной матрицей

$$(x_0)'_{x_0}(x_0^*) = E,$$

[21] Эти функции приобретают привычный векторный вид, когда $m = 1$, т. е. когда параметр μ одномерен.

[22] Ее коэффициенты зависят лишь от того, вдоль какого решения берется производная.

[23] Не зависящее от значения x_0^*.

а в случае вектор-функции — с соответствующим ее столбцом. Поэтому в первом случае значение $\mathsf{y}(t)$ — есть матрица $X(t,t_0)$ оператора Коши системы (78), а во втором — ее столбец.

5.8. Зависимость решений уравнений произвольного порядка от параметра

I. Пусть задано семейство задач Коши для уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}, \mu), \qquad \begin{cases} y(t_0) = y_0(\mu) \\ \dot{y}(t_0) = y_1(\mu) \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}(\mu), \end{cases} \tag{79}$$

где $(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}) \in G \subset \mathbf{R}^{1+n}$, $\mu \in \mathrm{M} \subset \mathbf{R}^m$. Обозначим через $S^{n-1}(G)$ множество всех непродолжаемых решений задач этого семейства, а через $\overline{S}(G)$ — множество решений задач Коши

$$\dot{x} = \overline{f}(t, x, \mu) \equiv \begin{pmatrix} x_2 \\ \ldots \\ x_n \\ f(t, x_1, \ldots, x_n, \mu) \end{pmatrix}, \quad x(t_0) = \overline{y_0}(\mu) \equiv \begin{pmatrix} y_0(\mu) \\ y_1(\mu) \\ \ldots \\ y_{n-1}(\mu) \end{pmatrix},$$

в которые переходят задачи (79) под действием канонической замены (определение 11)

$$x = \psi y \equiv \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ldots \\ y^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Теорема 106. *Пусть*

$$f, f'_y, \ldots, f'_{y^{(n-1)}} \in \mathrm{C}(G \times \mathrm{M}), \quad y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathrm{C}(\mathrm{M}) \quad \text{и} \quad \mu^* \in \mathrm{M}.$$

Тогда для любого отрезка $K \subset D\,(\mathsf{y}(\cdot, \mu^*))$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U(\mu^*) \subset \mathrm{M}$, что если

$$\mu \in U(\mu^*),$$

то решение $\mathsf{y}(\cdot,\mu)$ *определено на отрезке* K *и удовлетворяет оценкам*

$$\|\mathsf{y}^{(i)}(\cdot,\mu)-\mathsf{y}^{(i)}(\cdot,\mu^*)\|_K<\varepsilon,\quad i=0,\ldots,n-1.$$

$\lhd$ 1. Отображение ψ^{-1}, осуществляющее изоморфизм множеств $\overline{S}(G)$ и $S^{n-1}(G)$ (лемма 27), переводит компактно-открытую топологию первого пространства[24] в компактно-открытую же, но *по норме* C^{n-1}, топологию второго пространства, задаваемую ε-трубками

$$U^{n-1}_{\varepsilon,K}(\mathsf{y})\equiv\{\mathsf{z}\in S^{n-1}(G)|\ D(\mathsf{z})\supset K,\ \max_{i=0,\ldots,n-1}\|\mathsf{z}^{(i)}-\mathsf{y}^{(i)}\|_K<\varepsilon\}$$

функций $\mathsf{y}(\cdot,\mu)\in S^{n-1}(G)$ на компактах $K\subset D(\mathsf{y}(\cdot,\mu))$.

2. Доказываемое утверждение теперь вытекает из непрерывности композиции отображений

$$\mathrm{M}\to\overline{S}(G)\overset{\psi^{-1}}{\to}S^{n-1}(G),$$

первое из которых, ставящее в соответствие каждому $\mu\in\mathrm{M}$ решение $\mathsf{x}(\cdot,\mu)\in\overline{S}(G)$, — непрерывно в силу теоремы 99, а второе — просто изоморфизм топологических пространств. $\rhd$

II. Непрерывность функции $\mathsf{x}\equiv\psi\mathsf{y}$ в какой-либо точке (t,μ) равносильна непрерывности в той же точке функции y вместе с ее производными $\dot{\mathsf{y}},\ldots,\mathsf{y}^{(n-1)}$ по t, которые, как утверждает следствие 100, все вместе[25] определены и непрерывны в некоторой области $D(\mathsf{y})\subset\mathbf{R}^{1+m}$.

Теорема 107. *Если*

$$f,f'_y,\ldots,f'_{y^{(n-1)}},f'_\mu\in\mathrm{C}(G\times\mathrm{M})\quad и\quad y_0,\ldots,y_{n-1}\in\mathrm{C}^1(\mathrm{M}),$$

то в области $D(\mathsf{y})$ *при каждом* $i=0,\ldots,n$ *существуют непрерывные производные*[26] $\left(\mathsf{y}'_\mu\right)^{(i)}=\left(\mathsf{y}^{(i)}\right)'_\mu$.

$\lhd$ Доказательство проведем индукцией по $i=0,\ldots,n$.

---

[24] Индуцированную топологией объемлющего пространства $S(G)$. Формально она зависит еще и от нормы в $\mathbf{R}^n$, но фактически не зависит.

[25] Еще и вместе с n-й производной.

[26] Здесь i-я производная берется по t.

1. При $i = 0$ доказываемое утверждение, означающее непрерывность функции

$$\mathsf{y}'_\mu = \left(\psi^{-1}\mathsf{x}\right)'_\mu = \psi^{-1}(\mathsf{x}'_\mu),$$

вытекает из теоремы 104.

2. Если утверждение уже доказано для $(i-1)$-й производной, то по теореме 104 получаем утверждение и для i-й производной

$$\left(\mathsf{y}'_\mu\right)^{(i)} = \left((\mathsf{y}^{(i-1)})'_\mu\right)^{\cdot} = \left((\mathsf{x}_i)'_\mu\right)^{\cdot} = (\dot{\mathsf{x}}_i)'_\mu = \left(\mathsf{y}^{(i)}\right)'_\mu.$$

$\triangleright$

III. Если семейство (79) задач Коши формально продифференцировать по μ, а затем положить всюду $\mu = \mu^*$ (благодаря теореме 107, эти выкладки оправданы), то для производной

$$z = y'_\mu|_{\mu=\mu^*}$$

получится снова задача Коши

$$z^{(n)} = a_0(t)z + \ldots + a_{n-1}(t)z^{(n-1)} + g(t), \qquad \begin{cases} z(t_0) = y'_0(\mu^*) \\ \dot{z}(t_0) = y'_1(\mu^*) \\ \ldots \\ z^{(n-1)}(t_0) = y'_{n-1}(\mu^*), \end{cases}$$

с линейным *уравнением в вариациях* (*вдоль решения* $\mathsf{y}(\cdot,\mu^*)$), где

$$a_i = f'_{y^{(i)}}|_{\mu=\mu^*}, \quad i = 0, \ldots, n-1, \qquad g = f'_\mu|_{\mu=\mu^*}.$$

5.9. Локальное выпрямление интегральных кривых

системы

$$\dot{x} = f(t,x), \quad (t,x) \in G \subset \mathbf{R}^{1+n},$$

в точке $(t_0, x_0) \in G$ происходит под действием *диффеоморфизма* (т. е. взаимно однозначного отображения, непрерывно дифференцируемого[27]) вместе со своим обратным)

$$\varphi\colon U(t_0,x_0) \to V$$

[27]) В определении диффеоморфизма возможны и другие варианты дифференцируемости: от простой до бесконечной.

некоторой окрестности $U(t_0, x_0) \subset G$ этой точки в некоторую область $V \subset \mathbf{R}^{1+n}$. При отображении φ график $\Gamma|_{\mathsf{x}} \subset U(t_0, x_0)$ любого решения $\mathsf{x}(\cdot)$, переходит в кривую с координатами

$$(s, y) = \varphi(t, \mathsf{x}(t)), \quad t \in D(\mathsf{x}),$$

которая также может служить графиком какой-либо функции $\mathsf{y}(s)$. Если же все интегральные кривые переходят в интегральные кривые системы

$$\dot{y} = 0, \quad (s, y) \in V,$$

то диффеоморфизм φ называется *выпрямляющим.*

Теорема 108. *Если $f, f'_x \in \mathrm{C}(G)$ и $(t_0, x_0) \in G$, то существует выпрямляющий диффеоморфизм, оставляющий точки вида (t_0, x) на месте и сохраняющий первые координаты всех точек.*

$\lhd$ 1. Для каждого $x \in G_{t_0}$ обозначим через $\mathsf{x}(\cdot, x)$ непродолжаемое решение, удовлетворяющее начальному условию

$$\mathsf{x}(t_0, x) = x.$$

Согласно следствию 102 (без ограничения общности считаем множество $G_{t_0} \subset \mathbf{R}^n$ областью[28]), функция $\mathsf{x}(\cdot, \cdot)$ определена в некоторой области $D(\mathsf{x}) \subset \mathbf{R}^{1+n}$.

2. Отображение

$$\chi\colon D(\mathsf{x}) \to G,$$

ставящее в соответствие каждой точке $(t, x) \in D(\mathsf{x})$ точку

$$\chi(t, x) \equiv (t, \mathsf{x}(t, x)) \tag{80}$$

области G, непрерывно дифференцируемо (следствие 102 и теорема 105), причем верны равенства

$$\chi(t_0, x) = (t_0, \mathsf{x}(t_0, x)) = (t_0, x), \quad x \in G_{t_0},$$
$$\mathsf{x}'_x(t_0, x_0) = (\mathsf{x}(t_0, x))'_x|_{x=x_0} = x'_x|_{x=x_0} = \mathsf{I} \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^n).$$

3. Производная

$$\chi'_{(t,x)}(t_0, x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dot{\mathsf{x}}(t_0, x_0) & \mathsf{I} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^{1+n})$$

[28] С этой целью, если нужно, область G можно и уменьшить.

— невырождена, а значит, отображение χ осуществляет диффеоморфизм достаточно малой окрестности точки (t_0, x_0), которую можно выбрать в виде произведения

$$V \equiv I \times V(x_0), \quad I \subset \mathbf{R}, \quad V(x_0) \subset G_{t_0},$$

в окрестность $U(t_0, x_0)$ той же точки. Следовательно, и обратное к нему отображение φ — также диффеоморфизм.

4. Наконец, для каждой точки $x \in V(x_0)$ отображение φ переводит график решения $\mathsf{x}(\cdot, x)$ в график решения $\mathsf{y}(\cdot) \equiv x$ новой системы, так как в соответствии с равенством (80) имеем

$$\varphi(t, \mathsf{x}(t, x)) = (t, x), \quad t \in I.$$

$\triangleright$

5.10. Задачи для самостоятельного решения

I. Останется ли справедливым утверждение теоремы 95, если в нем условия $f'_x, g'_y \in \mathrm{C}(G)$:

— заменить условиями $f \in \mathrm{Lip}_x(G)$ и $g \in \mathrm{Lip}_y(G)$;

— вообще убрать?

Аналогичный вопрос для теоремы 99 и следствий из нее.

II. Можно ли усилить теорему 95, утверждая, что при надлежащем выборе $\delta > 0$ оценка (66) будет выполнена не только для компакта $K \subset I \equiv D(\mathsf{x})$, но и сразу *для всего интервала* I, если обеспечены какие-либо из следующих условий:

a) $g = f$;

b) интервал I — ограничен на прямой $\mathbf{R}$;

c) все возмущенные решения y определены на интервале I;

d) исходное решение x доопределяется на замыкание $K = \overline{I}$?

III. Если X и Y — пространства функций с равномерной или компактно-открытой топологией каждое, то утверждение о непрерывности функции $f\colon X \to Y$ можно понимать, соответственно, в четырех разных смыслах. В каком смысле оно логически самое сильное, а в каком — самое слабое?

IV. Сформулировать и доказать следующие теоремы, аналогичные теоремам 101, 105 и 106 соответственно:

a) о *непрерывности по начальной точке* (t_0, x_0) решения $\mathsf{x}(t, t_0, x_0)$ семейства задач Коши (64);

b) о *дифференцируемости по начальному моменту* t_0 решения $\mathsf{x}(t, t_0)$ семейства задач Коши (64) с фиксированным начальным значением x_0. Требуется ли для нее существование производной f_t'? Записать систему в вариациях по начальному моменту и начальное условие для производной $\mathsf{y} = \mathsf{x}_{t_0}'$;

c) о *непрерывности по начальным значениям* $y_0, \ldots, y_{n-1}$ решения $\mathsf{y}(t, y_0, \ldots, y_{n-1})$ семейства задач Коши (33) для уравнения n-го порядка с фиксированным начальным моментом t_0.

V. При каждом $k \in \mathbf{N}$ доказать справедливость следующего утверждения для решения x

— задачи (64): если $f \in \mathrm{C}^k(G)$, то $\mathsf{x} \in \mathrm{C}^{k+1}(D(\mathsf{x}))$;

— задачи (73): если $f_{(x,\mu)}^{(k)} \in \mathrm{C}(G \times \mathrm{M})$, то $\mathsf{x}_\mu^{(k)} \in \mathrm{C}(D(\mathsf{x}))$.

VI. Найти систему в вариациях по начальному значению для решений системы

$$\dot{x} = A(t)x + F(t), \quad A, F \in \mathrm{C}(I).$$

VII. Для произвольного вектора $y_0 \in \mathbf{R}^n$ выяснить, что за производная $\mathsf{y} = \mathsf{x}'$ решения x семейства задач Коши (64) удовлетворяет начальному условию $y(t_0) = y_0$ и системе в вариациях (78) по начальному значению.

VIII. Доказать, что отображение χ (80), заданное на всей своей области определения $D(\mathsf{x})$, является диффеоморфизмом.

6. Устойчивость по Ляпунову

6.1. Определение устойчивости

Для заданной системы

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in G \subset \mathbf{R}^{1+n}, \tag{81}$$

с *начальным моментом* $t_0 \in \mathbf{R}$ назовем *исходным* одно из решений $\mathsf{x}_0(\cdot)$, область определения которого содержит луч

$$\mathbf{R}^+ \equiv [t_0; \infty).$$

Остальные решения этой системы, называемые *возмущенными*, будем предполагать непродолжаемыми и заведомо определенными в точке t_0.

Определение 19. Решение $\mathsf{x}_0\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^n$ называется:

— *устойчивым* (*по Ляпунову*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое[1] $\delta > 0$, что любое решение x удовлетворяет импликации

$$|\mathsf{x}(t_0) - \mathsf{x}_0(t_0)| < \delta \implies |\mathsf{x}(t) - \mathsf{x}_0(t)| < \varepsilon, \quad t \in \mathbf{R}^+ \subset D(\mathsf{x}); \quad (82)$$

— *асимптотически устойчивым*, если, *кроме того*, для некоторого $\delta_0 > 0$ любое решение x удовлетворяет импликации

$$|\mathsf{x}(t_0) - \mathsf{x}_0(t_0)| < \delta_0 \implies \lim_{t\to\infty} |\mathsf{x}(t) - \mathsf{x}_0(t)| = 0; \qquad (83)$$

— *неустойчивым*, если оно не является устойчивым по Ляпунову.

Заключительное неравенство импликации (82) означает, что возмущенное решение лежит в ε-трубке

$$U_{\varepsilon,\mathbf{R}^+}(\mathsf{x}_0) \equiv \{\mathsf{x}|\ D(\mathsf{x}) \supset \mathbf{R}^+,\ \|\mathsf{x}(\cdot) - \mathsf{x}_0(\cdot)\|_{\mathbf{R}^+} < \varepsilon\}$$

исходного решения, но не на компакте, как прежде, а на *целом луче*[2] $\mathbf{R}^+$. Таким образом, устойчивость по Ляпунову решения x_0 равносильна непрерывности в точке $x_0 \equiv \mathsf{x}_0(t_0)$ отображения

$$G_{t_0} \to S(G), \qquad (84)$$

которое каждому начальному значению $x \in G_{t_0}$ ставит в соответствие непродолжаемое решение $\mathsf{x}(\cdot, x) \in S(G)$ задачи Коши с начальным условием $\mathsf{x}(t_0, x) = x$, причем последнее множество наделено равномерной на луче $\mathbf{R}^+$ топологией[3].

6.2. Задача об исследовании на устойчивость

состоит в следующем: зная лишь правую часть дифференциальной системы (81) и ее исходное решение, выяснить, является ли оно *устойчивым по Ляпунову, асимптотически устойчивым* или *неустойчивым.* При этом более предпочтителен такой метод

[1] Число δ, естественно, не может превосходить ε.

[2] Это требование нарушается, в частности, если возмущенное решение определено не на всем луче.

[3] В компактно-открытой топологии эта непрерывность имеет место и так (см. теорему 101).

исследования, который не требует нахождения возмущенных решений.

Лемма 109. *Факт устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости решения* x_0 *не нарушится, если:*

1) *ограничить множество возмущенных решений лишь теми из них, которые начинаются в какой-нибудь наперед заданной окрестности* $U(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ *начального значения* $x_0 \equiv \mathsf{x}_0(t_0)$*;*

2) *изменить норму в* $\mathbf{R}^n$*, в частности, фиксировать какой-либо базис в* $\mathbf{R}^n$ *и выбрать норму, выражающуюся через координаты векторов в этом базисе;*

3) *изменить начальный момент* $t_0 \in D(\mathsf{x}_0)$ *при условии, что имеет место непрерывная зависимость решений от начального значения;*

4) *сдвинуть начало координат в* $\mathbf{R}^n$ *в какую-либо новую точку, возможно даже, зависящую*[4)] *от времени, например, пустить его вдоль исходного решения (которое, тем самым, превратится в нулевое).*

$\lhd$ 1. Определение 19 действительно не пострадает, если фигурирующие в нем числа $\delta, \delta_0 > 0$ считать меньшими наперед заданного положительного числа.

2. Топология в пространстве $\mathbf{R}^n$, как и равномерная на луче $\mathbf{R}^+$ топология в пространстве $S(G)$, не зависит от нормы в $\mathbf{R}^n$, поэтому от нее не зависит ни факт непрерывности отображения (84), ни равенство нулю предела (83).

3. Если $t_0', t_0 \subset D(\mathsf{x}_0)$ и $K \equiv [t_0'; t_0]$ или $K \equiv [t_0; t_0']$, а решение x_0 устойчиво (асимптотически) с начальным моментом t_0, то, в силу равномерной по $t \in \mathbf{R}^+$ непрерывности решения от значения в начальный момент t_0 и равномерной по $t \in K$ непрерывности решения от значения в начальный момент t_0', имеем: для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $\delta_1 > 0$ (и, соответственно, $\delta_1 < \delta_0$) и $\delta_2 > 0$, что верны импликации

$$|\mathsf{x}(t_0) - \mathsf{x}_0(t_0)| < \delta_1 \implies \|\mathsf{x}(t) - \mathsf{x}_0(t)\|_{\mathbf{R}^+} < \varepsilon,$$
$$|\mathsf{x}(t_0') - \mathsf{x}_0(t_0')| < \delta_2 \implies \|\mathsf{x}(t) - \mathsf{x}_0(t)\|_K < \delta_1 \leqslant \varepsilon,$$

откуда получаем требуемую для устойчивости с начальным моментом t_0' импликацию (82)

$$|\mathsf{x}(t_0') - \mathsf{x}_0(t_0')| < \delta_2 \implies \|\mathsf{x}(t) - \mathsf{x}_0(t)\|_{\mathbf{R}^+ \cup K} < \varepsilon$$

[4)] Непрерывно дифференцируемо.

(и, соответственно, заключение импликации (83) для асимптотической устойчивости).

4. В результате замены $y = x - a(t)$ получаем

$$\dot{x} = f(t,x) \iff \dot{y} = f(t, y + a(t)) - \dot{a}(t) \equiv g(t,y),$$

а факт устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости сохраняется и для нового решения $\mathsf{y}_0(\cdot) \equiv \mathsf{x}_0(\cdot) - a(\cdot)$ (а если $a = \mathsf{x}_0$, то даже $\mathsf{y}_0 = 0$), так как он полностью определяется неизменными при такой замене величинами

$$|\mathsf{y}(t) - \mathsf{y}_0(t)| = |\mathsf{x}(t) - \mathsf{x}_0(t)|, \quad t \in \mathbf{R}^+.$$

$\triangleright$

6.3. Устойчивость решений линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x + F(t), \quad A, F \in \mathrm{C}(I), \quad I \supset \mathbf{R}^+,$$

в том числе и асимптотическая, согласно п. 1 леммы 110 либо имеет место для всех решений сразу, либо не имеет места ни для одного из них. Поэтому саму линейную систему с устойчивыми (асимптотически) решениями, пользуясь вольностью речи, также называют *устойчивой* (*асимптотически*).

Лемма 110. *Линейные системы обладают следующими свойствами.*

1. *Устойчивость (асимптотическая) решения $\mathsf{x}_0 \in S_{A,F}$ неоднородной системы равносильна устойчивости (асимптотической) нулевого решения $0 \in S_A$ соответствующей однородной системы.*

2. *Следующие утверждения об однородной системе эквивалентны:*

a) *система устойчива (асимптотически);*

b) *все решения системы ограничены (стремятся к нулю при $t \to \infty$);*

c) *существует фундаментальная система ограниченных решений (стремящихся к нулю при $t \to \infty$).*

3. *Система с постоянным оператором $A \in \mathrm{End}\,\mathbf{R}^n$:*

— асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда действительные части всех его собственных значений отрицательны;

— устойчива тогда и только тогда, когда действительные части всех его собственных значений отрицательны или равны нулю, причем последним соответствуют жордановы клетки только первого порядка.

$\lhd$ 1. Если пустить начало координат вдоль решения $\mathsf{x}_0(t)$ (см. п. 4 леммы 109), то множество $S_{A,F}$ всех решений перейдет в множество

$$S_{A,F} - \mathsf{x}_0 = S_A,$$

а решение $\mathsf{x}_0 \in S_{A,F}$ перейдет в нулевое $0 \in S_A$, причем факт его устойчивости (асимптотической) не нарушится.

2. Из условия a) вытекает ограниченность (соответственно, со стремлением к нулю при $t \to \infty$) всех решений, начинающихся достаточно близко к нулю и заполняющих своими линейными комбинациями все линейное пространство S_A, поэтому

$$\text{a)} \implies \text{b)} \implies \text{c)}.$$

Докажем импликацию c) $\implies$ a). Пусть решения $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ — ограничены и образуют фундаментальную систему. Тогда набор их начальных значений $\mathsf{x}_1(t_0), \ldots, \mathsf{x}_n(t_0)$ — базис в $\mathbf{R}^n$, а сумма модулей координат векторов в этом базисе — норма в $\mathbf{R}^n$ (см. п. 2 леммы 109), причем

$$\max_{i=1,\ldots,n} \|\mathsf{x}_i(t)\|_{\mathbf{R}^+} \equiv M < \infty,$$

и для любого решения $\mathsf{x} = C_1\mathsf{x}_1 + \ldots + C_n\mathsf{x}_n$ имеем импликацию

$$\begin{gathered}\delta > |\mathsf{x}(t_0)| = |C_1\mathsf{x}_1(t_0) + \ldots + C_n\mathsf{x}_n(t_0)| = |C_1| + \ldots + |C_n| \\ \implies \|\mathsf{x}(t)\|_{\mathbf{R}^+} \leqslant |C_1|\,\|\mathsf{x}_1\|_{\mathbf{R}^+} + \ldots + |C_n|\,\|\mathsf{x}_n\|_{\mathbf{R}^+} \leqslant M\delta < \varepsilon\end{gathered}$$

при достаточно малом $\delta < \varepsilon/M$ (если, кроме того, все решения $\mathsf{x}_1(t), \ldots, \mathsf{x}_n(t)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$, то и любая их линейная комбинация — тоже). Таким образом, система устойчива (асимптотически).

3. Утверждение вытекает[5)] из свойств фундаментальной системы действительных решений, складываемой из подсистем, каждая из которых строится по своей жордановой клетке (порядка m) или по паре комплексно-сопряженных жордановых клеток оператора A в соответствии с теоремой 84:

[5)] С помощью утверждения 2 настоящей леммы.

— в случае $\lambda \in \mathbf{R}$ имеем подсистему из m решений

$$\mathsf{z}_j(t) = e^{\lambda t} \left(h_j + th_{j-1} + \ldots + \epsilon_j(t) h_1 \right), \quad j = 1, \ldots, m,$$

которые ограничены тогда и только тогда, когда либо $\operatorname{Re}\lambda < 0$ (и тогда они даже стремятся к нулю при $t \to \infty$), либо $\operatorname{Re}\lambda = 0$ и $m = 1$ (так как $\epsilon_j(t) = t^{j-1}/(j-1)!$);

— в случае $\lambda = \alpha \pm i\beta \notin \mathbf{R}$ имеем подсистему из $2m$ решений

$$\mathsf{x}_j = \operatorname{Re} \mathsf{z}_j, \quad \mathsf{y}_j = \operatorname{Im} \mathsf{z}_j, \quad j = 1, \ldots, m,$$

которые ограничены (стремятся к нулю при $t \to \infty$) тогда и только тогда, когда тем же свойством обладают m функций

$$\mathsf{z}_j(t) = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} \left(h_j + th_{j-1} + \ldots + \epsilon_j(t) h_1 \right), \quad j = 1, \ldots, m,$$

т. е. при тех же условиях, что и в предыдущем случае (поскольку $|e^{i\beta t}| = 1$). $\rhd$

6.4. Функция Ляпунова

$v\colon U(0) \to \mathbf{R}$ (где $U(0)$ — окрестность точки 0) для системы

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in G \supset \mathbf{R}^+ \times U(0), \tag{85}$$

с нулевым решением[6)], призванная подтвердить факт устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости этого решения, составляет основу *второго метода Ляпунова.*

Определение 20. Любая функция[7)] $v \in \mathrm{C}(U(0)) \cap \mathrm{C}^1(\dot{U}(0))$, удовлетворяющая условию

0) $v(0) = 0$

и условиям 1), 2) любой из трех нижеследующих теорем, называется *функцией Ляпунова* для системы (85). Левая часть $\dot{v}_t(x)$ неравенств, содержащихся в условиях 2) этих теорем, называется *производной*[8)] *функции v в силу системы* (85), которая равна

$$\dot{v}_t(x) \equiv v'(x) f(t, x) = v'_{x_1}(x) f_1(t, x) + \ldots + v'_{x_n}(x) f_n(t, x).$$

[6)] Имеющимся в случае равенства $f(t, 0) \equiv 0$.

[7)] Окрестность $\dot{U}(0)$ — *проколота*, т. е. не содержит точку 0.

[8)] По t. Однако индекс t у нее обозначает не переменную, по которой происходит дифференцирование, а параметр, от которого эта производная, вообще говоря, *зависит* (в автономном случае этот индекс можно и опустить).

I. Некоторый свет на понятие функции Ляпунова проливает

Следствие 111. *Если* $f \in \mathrm{C}(G)$, *то:*

a) *значение производной функции* v *в силу системы (85) в точке* $x \in U(0)$ *в момент* $t \in \mathbf{R}^+$ *представляет собой производную сложной функции*

$$\dot{v}_t(x) = \frac{dv(\mathsf{x}(\tau))}{d\tau}\Big|_{\tau=t},$$

где x *— любое*[9] *решение системы* (85), *удовлетворяющее начальному условию* $\mathsf{x}(t) = x$;

b) *для любого решения* x, *удовлетворяющего условию*

$$\mathsf{x}(t) \in V \subset U(0), \quad t \in K \equiv [\alpha; \beta],$$

справедливо равенство

$$v(\mathsf{x}(\beta)) - v(\mathsf{x}(\alpha)) = \int_\alpha^\beta \dot{v}_t(\mathsf{x}(t))\,dt,$$

а если при этом

$$\dot{v}_t(x) < 0 \quad (\dot{v}_t(x) \leqslant 0), \quad x \in V, \quad t \in K,$$

то функция $v_t(\mathsf{x}(t))$ *на отрезке* K *убывает* (*нестрого*).

$\lhd$ В условиях п. a) имеем равенство

$$\frac{dv(\mathsf{x}(\tau))}{d\tau}\Big|_{\tau=t} = v'_x(\mathsf{x}(t))\dot{\mathsf{x}}(t) = v'(x)f(t,x) = \dot{v}_t(x),$$

проинтегрировав которое по t от α до β, получаем утверждение из п. b). $\rhd$

II. В условиях 2) теорем 113 и 114 фигурирует непрерывная функция $w(x)$, осуществляющая равномерную по $t \in \mathbf{R}^+$ оценку производной

$$\dot{v}_t(x) \geqslant w(x) \quad (\dot{v}_t(x) \leqslant w(x)).$$

Если же система (85) — автономна и $f \in \mathrm{C}(U(0))$, то такую же оценку заведомо осуществляет и функция

$$w \equiv \dot{v} = v'f \in \mathrm{C}(U(0)),$$

что упрощает формулировки упомянутых теорем.

[9] Существующее, в силу теоремы Пеано.

6.5. Первая теорема Ляпунова (об устойчивости)

Теорема 112. *Пусть* $f, f'_x \in \mathrm{C}(G)$ *и для системы* (85) *существует функция* v *Ляпунова, удовлетворяющая при* $x \in \dot{U}(0)$ *и* $t \in \mathbf{R}^+$ *условиям:*

1) $v(x) > 0$*;*

2) $\dot{v}_t(x) \leqslant 0$.

Тогда нулевое решение этой системы устойчиво по Ляпунову.

$\lhd$ 1. Пусть задано число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее (без ограничения общности) условиям

$$\overline{U_\varepsilon}(0) \subset U(0), \qquad M \equiv \min_{|x|=\varepsilon} v(x) > 0.$$

2. Вследствие равенства $v(0) = 0$ для непрерывной в точке 0 функции v, существует такое $\delta > 0$, что выполнено неравенство[10)]

$$m \equiv \sup_{U_\delta(0)} v(x) < M.$$

3. Для любого решения x с начальным условием $\mathsf{x}(t_0) \in U_\delta(0)$, согласно следствию 111, имеем

$$v(\mathsf{x}(t)) \leqslant v(\mathsf{x}(t_0)) \leqslant m < M, \quad t \geqslant t_0, \quad t \in D(\mathsf{x}).$$

4. Следовательно, ни при каком $t \in \mathbf{R}^+$ не будет выполнено равенство $|\mathsf{x}(t)| = \varepsilon$ (а тем более неравенство $|\mathsf{x}(t)| > \varepsilon$), стало быть, по теореме 20 решение x неограниченно продолжается вправо и

$$\mathsf{x} \in U_{\varepsilon,\mathbf{R}^+}(0).$$

$\rhd$

6.6. Вторая теорема Ляпунова (об асимптотической устойчивости)

Теорема 113. *Пусть* $f, f'_x \in \mathrm{C}(G)$ *и для системы* (85) *существует функция* v *Ляпунова, удовлетворяющая при* $x \in \dot{U}(0)$ *и* $t \in \mathbf{R}^+$ *условиям:*

1) $v(x) > 0$*;*

[10)] Из которого, кстати, автоматически вытекает включение $U_\delta(0) \subset U_\varepsilon(0)$.

2) $\dot{v}_t(x) \leqslant w(x) < 0$ *для некоторой функции* $w \in \mathrm{C}(\dot{U}(0))$.
Тогда нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво.

$\lhd$ 1. В условиях 1) и 2) настоящей теоремы применима предыдущая теорема, гарантирующая устойчивость нулевого решения и существование таких чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta_0 > 0$, что любое возмущенное решение x с начальным условием $\mathsf{x}(t_0) \in U_{\delta_0}(0)$ определено на луче $\mathbf{R}^+$ и удовлетворяет условию

$$\mathsf{x}(t) \in \overline{U_\varepsilon}(0) \subset U(0), \quad t \in \mathbf{R}^+.$$

2. Пусть одно из указанных возмущенных решений x не удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to\infty} |\mathsf{x}(t)| = 0. \tag{86}$$

Тогда для него справедлива оценка

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |\mathsf{x}(t)| > \alpha > 0,$$

из которой[11], в силу убывания функции $v(\mathsf{x}(t))$ (следствие 111) и ее ограниченности снизу, при всех $t \in \mathbf{R}^+$ имеем

$$v(\mathsf{x}(t)) \geqslant \lim_{t\to\infty} v(\mathsf{x}(t)) = \overline{\lim_{t\to\infty}} v(\mathsf{x}(t)) \geqslant \min_{x\in\overline{U_\varepsilon}(0)\setminus U_\alpha(0)} v(x) \equiv \beta > 0.$$

3. Следовательно, при всех $t \in \mathbf{R}^+$ получаем

$$\mathsf{x}(t) \in \overline{U_\varepsilon}(0) \setminus V^\beta(0), \quad \text{где} \quad 0 \in V^\beta(0) \equiv \{x \in U(0)|\ v(x) < \beta\}$$

(последнее множество — открыто, так как функция v непрерывна) и

$$\dot{v}_t(\mathsf{x}(t)) \leqslant \max_{x\in\overline{U_\varepsilon}(0)\setminus V^\beta(0)} w(x) \equiv -\gamma < 0.$$

4. Но тогда при достаточно большом t имеем (следствие 111)

$$v(\mathsf{x}(t)) \leqslant v(\mathsf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t} w(\mathsf{x}(\tau))\,d\tau \leqslant v(\mathsf{x}(t_0)) - \gamma(t - t_0) < 0,$$

что невозможно, а значит, сделанное выше предположение о невыполнении условия (86) не подтвердилось. $\rhd$

[11] Кстати, $\alpha < \varepsilon$.

6.7. Теорема Четаева

представляет собой существенное обобщение третьей теоремы Ляпунова (о неустойчивости, см. задачу IV в конце главы).

Теорема 114. *Пусть* $f, f'_x \in \mathrm{C}(G)$ *и для системы* (85) *существует функция* v *Ляпунова — Четаева, удовлетворяющая условию*[12)]

0) *существует область* $V \subset U(0)$, *для которой*

$$0 \in \partial V, \qquad v(x)|_{x \in \partial V \cap U(0)} = 0,$$

а при $x \in V$ *и* $t \in \mathbf{R}^+$ *— условиям:*

1) $v(x) > 0$;

2) $\dot{v}_t(x) \geqslant w(x) > 0$ *для некоторой функции* $w \in \mathrm{C}(V)$.

Тогда нулевое решение этой системы неустойчиво.

$\lhd$ 1. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что

$$\overline{U_\varepsilon}(0) \subset U(0), \qquad V_\varepsilon \equiv V \cap U_\varepsilon(0).$$

2. Пусть некоторое решение x с начальным условием $\mathsf{x}(t_0) \in V_\varepsilon$ удовлетворяет условию

$$\mathsf{x}(t) \in U_\varepsilon(0), \quad t \in \mathbf{R}^+. \tag{87}$$

3. Для числа $\beta \equiv v(\mathsf{x}(t_0)) > 0$ определим множество

$$V_\varepsilon^\beta \equiv V_\varepsilon \setminus V^\beta, \quad \text{где} \quad V^\beta \equiv \{x \in U(0)|\ v(x) < \beta\}.$$

Его граница содержится в объединении множеств $\partial V^\beta \cap U_\varepsilon(0)$ и $\partial U_\varepsilon(0)$, так как точки $x \in \partial V \cap U(0)$ — внутренние для множества V^β. Более того, по той же причине замкнутое и ограниченное (т. е. компактное) множество $\overline{V_\varepsilon^\beta}$ содержится в множестве V.

4. Решение x удовлетворяет условию

$$\mathsf{x}(t) \in V_\varepsilon^\beta, \quad t \in \mathbf{R}^+,$$

так как $\mathsf{x}(t_0) \in V_\varepsilon^\beta$ и ни при каком $t \geqslant t_0$ вектор $\mathsf{x}(t)$ не может попасть на границу множества[13)] V_ε^β: в точках $x \in \partial V \cap U_\varepsilon(0)$ имеет место оценка

$$v(x) = 0 < \beta = v(\mathsf{x}(t_0)) < v(\mathsf{x}(t))$$

[12)] Которое не противоречит условию 0) определения 20.

[13)] Чтобы покинуть его.

(по следствию 111 функция $v(\mathsf{x}(t))$ возрастает, пока $\mathsf{x}(t) \in V$), а точки $x \in \partial U_\varepsilon(0)$ — недоступны в силу условия (87).

5. Обозначив

$$\inf_{x \in \overline{V_\varepsilon^\beta}} w(x) \equiv \gamma > 0,$$

имеем

$$v(\mathsf{x}(t)) \geqslant v(\mathsf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t} w(\mathsf{x}(\tau))\, d\tau \geqslant \beta + \gamma(t - t_0), \quad t \in \mathbf{R}^+,$$

а значит, непрерывная на компакте $\overline{V_\varepsilon^\beta}$ функция v — неограничена, что неверно, как, впрочем, и предположение (87). Следовательно, любое непродолжаемое[14] решение с начальным условием $\mathsf{x}(t_0) \in V_\varepsilon$ либо не определено на всем луче $\mathbf{R}^+$, либо определено, но не удовлетворяет на нем условию (87), т. е. нулевое решение неустойчиво. ▷

6.8. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению

относится к системе

$$\dot{x} = Ax + F(t, x), \quad F, F'_x \in \mathrm{C}(G), \quad G \supset \mathbf{R}^+ \times U(0), \tag{88}$$

удовлетворяющей условию[15]

$$\|F(\cdot, x)\|_{\mathbf{R}^+} = o(x) \text{ (обозначение } F(t,x) = o(x)), \quad x \to 0. \tag{89}$$

В качестве оператора $A \in \operatorname{End} \mathbf{R}^n$, задающего соответствующую *линеаризованную* систему (*первого приближения*)

$$\dot{x} = Ax, \quad t \in \mathbf{R}^+,$$

годится, например, производная $f'_x(t, 0)$ правой части системы (85), если она[16] не зависит от времени.

[14] См. лемму 19.

[15] Обеспечивающему наличие нулевого решения.

[16] Производная, а еще лучше — сама правая часть.

Следующие две теоремы кладут начало *первому методу Ляпунова*, который позволяет делать заключение об асимптотической устойчивости или неустойчивости нулевого решения системы по наличию того же свойства у соответствующей ей линеаризованной системы.

Теорема 115. *Если действительные части всех собственных значений оператора* A *отрицательны, то нулевое решение системы* (88) *с условием* (89) *асимптотически устойчиво.*

$\triangleleft$ 1. *Комплексифицируем* систему (88), перейдя к системе

$$\dot{z} = \mathcal{A}z + \mathcal{F}(t, z),$$

где $\mathcal{A} \in \operatorname{End}\mathbf{C}^n$ — комплексификация оператора $A \in \operatorname{End}\mathbf{R}^n$ (см. определение 17), а функция

$$\mathcal{F}(t, z) \equiv F(t, \operatorname{Re} z) = o(\operatorname{Re} z) = o(z), \quad z \to 0, \tag{90}$$

— определена в области

$$\mathcal{G} \equiv \{(t, x + iy)|\ (t, x) \in G,\ y \in \mathbf{R}^n\} \supset \mathbf{R}^+ \times \mathcal{U}(0),$$
$$\mathcal{U}(0) \equiv U(0) + i\mathbf{R}^n,$$

причем ее сужение на область G совпадает с функцией F.

2. Для собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ оператора $\mathcal{A}$ обозначим

$$\alpha \equiv \min_{i=1,\ldots,n} |\operatorname{Re}\lambda_i| > 0, \quad \delta \equiv \alpha/4.$$

3. Выберем такой базис в $\mathbf{C}^n$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \delta_n \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \delta_2, \ldots, \delta_n \in \{0, \delta\}.$$

Этот базис:

а) получается из жорданова базиса $h_1, \ldots, h_n$ для оператора $\mathcal{A}$ с помощью *специального* преобразования, которое производится по формулам

$$h_1' = h_1,\ h_2' = \delta h_2, \ldots,\ h_n' = \delta^{n-1} h_n, \tag{91}$$

действительно: если в жордановой форме матрицы оператора $\mathcal{A}$ над главной диагональю первоначально стояли некоторые числа $\delta_2, \ldots, \delta_n \in \{0, 1\}$, то в новом базисе они умножатся на δ

$$\begin{gathered}\mathcal{A}h'_1 = \mathcal{A}h_1 = h_1 = h'_1,\\ \mathcal{A}h'_i = \delta^{i-1}\mathcal{A}h_i = \delta^{i-1}(h_i + \delta_i h_{i-1}) = h'_i + \delta(\delta_i h'_{i-1}), \quad i = 2, \ldots, n,\end{gathered}$$

и больше в матрице ничего не изменится;

b) можно объявить ортонормированным, задав тем самым в $\mathbf{C}^n$ новое скалярное произведение и новую *норму*

$$(z, u) = u^* z, \quad u, z \in \mathbf{C}^n, \qquad |z| = \sqrt{(z, z)}, \quad z \equiv \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

от чего условие (90) не пострадает.

4. Для матриц

$$\Lambda \equiv \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\operatorname{Re}\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2\operatorname{Re}\lambda_n \end{pmatrix}, \quad \Delta \equiv \begin{pmatrix} 0 & \delta_2 & \cdots & 0 \\ \delta_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \delta_n \\ 0 & \cdots & \delta_n & 0 \end{pmatrix}$$

справедливы соотношения

$$\mathcal{A} + \mathcal{A}^* = \Lambda + \Delta, \qquad |\Delta z| \leqslant \left| \begin{matrix} \delta_2 z_2 \\ \vdots \\ \delta_n z_n \\ 0 \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} 0 \\ \delta_2 z_2 \\ \vdots \\ \delta_n z_n \end{matrix} \right| \leqslant 2\delta |z|.$$

5. Возьмем функцию

$$v(z) \equiv z^2 = z^* z, \quad z \in \mathcal{U}(0),$$

тогда при $(t, z) \in \mathcal{G}$ имеем

$$\begin{gathered}\dot{v}_t(z) = (z^* z)^{\cdot}_t = z^*\big(\mathcal{A}z + \mathcal{F}(t, z)\big) + \big(\mathcal{A}z + \mathcal{F}(t, z)\big)^* z\\ = z^*(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)z + z^*\mathcal{F}(t, z) + \mathcal{F}^*(t, z)z \leqslant z^*(\Lambda + \Delta)z + 2|\mathcal{F}(t, z)||z|\\ \leqslant \sum_{i=1}^{n} 2\operatorname{Re}\lambda_i |z_i|^2 + |z^*\Delta z| + o(z^2) \leqslant \big(-2\alpha + 2\delta + o(1)\big)z^2 \leqslant -\alpha z^2,\end{gathered}$$

как только $o(1) < \alpha/2$, что достигается малостью величины $|z|$, т. е. уменьшением области $\mathcal{U}(0)$.

6. К исходной системе (88) с функцией Ляпунова, равной сужению функции v на область $U(0)$, применим теорему 113, согласно которой нулевое решение асимптотически устойчиво. $\rhd$

6.9. Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению

Теорема 116. *Если действительная часть хотя бы одного из собственных значений оператора A положительна, то нулевое решение системы* (88) *с условием* (89) *неустойчиво.*

$\lhd$ 1. Комплексифицируем систему (88) в соответствии с первым пунктом доказательства теоремы 115.

2. Для собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ оператора $\mathcal{A}$ без ограничения общности считаем, что

$$\operatorname{Re}\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{Re}\lambda_m \equiv 2\alpha > 0 \geqslant \operatorname{Re}\lambda_{m+1} \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{Re}\lambda_n, \quad \delta \equiv \alpha/4.$$

3. Выберем базис $h'_1, \ldots, h'_n$ и норму в $\mathbf{C}^n$ в соответствии с п. 3 доказательства теоремы 115.

4. К матрицам Λ и Δ, введенным в п. 4 доказательства теоремы 115, добавим матрицы E' и Δ', для которых

$$E' = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^* E' + E' \mathcal{A} = |\Lambda| + \Delta', \quad \|\Delta'\| = \|\Delta\| = \delta,$$

где E_m — единичная матрица порядка m, а $|\Lambda|$ — матрица, составленная из модулей элементов матрицы Λ.

5. Возьмем функцию

$$v(z) \equiv \sum_{i=1}^{m} |z_i|^2 - \sum_{i=m+1}^{n} |z_i|^2 = z^* E' z, \quad \mathcal{V} = \{z \in \mathcal{U}(0) |\ v(z) > 0\},$$

тогда

$$2\sum_{i=1}^{m} |z_i|^2 > \sum_{i=1}^{m} |z_i|^2 + \sum_{i=m+1}^{n} |z_i|^2 = z^2, \quad z \in \mathcal{V},$$

поэтому при $(t,z) \in \mathbf{R}^+ \times \mathcal{V}$ имеем

$$
\begin{gathered}
\dot{v}_t(z) = (z^* E' z)^{\cdot}_t = z^* E'\big(\mathcal{A}z + \mathcal{F}(t,z)\big) + \big(\mathcal{A}z + \mathcal{F}(t,z)\big)^* E' z \\
= z^*(E'\mathcal{A} + \mathcal{A}^* E')z + z^* E' \mathcal{F}(t,z) + \mathcal{F}^*(t,z) E' z \geqslant z^*(|\Lambda| + \Delta')z \\
-2|\mathcal{F}(t,z)|\,\|E'\|\,|z| \geqslant \sum_{i=1}^{n} 2|\operatorname{Re}\lambda_i|\,|z_i|^2 - |z^*\Delta' z| - o(z^2) \\
\geqslant 4\alpha \sum_{i=1}^{m} |z_i|^2 - \delta z^2 - o(z^2) \geqslant \big(2\alpha - \alpha/2 - o(1)\big) z^2 > \alpha z^2,
\end{gathered}
$$

как только $o(1) < \alpha/2$, что достигается малостью величины $|z|$, т. е. уменьшением области $\mathcal{U}(0)$.

6. Сечение области $\mathcal{V}$ исходным действительным пространством $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n$ — не пусто, так как эта область содержит $\mathbf{C}$-линейную оболочку[17)] векторов $h'_1, \ldots, h'_m$, которая, в свою очередь, заведомо содержит $\mathbf{R}$-линейную оболочку действительных векторов $h'_i \pm \overline{h'}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Компоненту связности этого сечения, имеющую точку 0 на границе, объявим областью V, а сужение функции v на область V объявим функцией Ляпунова — Четаева, после чего применим к исходной системе (88) теорему 114, согласно которой нулевое решение неустойчиво. $\rhd$

6.10. Задачи для самостоятельного решения

I. Доказать, что если $G \supset \mathbf{R}^+ \times U(0)$ и $f, f'_x \in \mathrm{C}(G)$, то в определении 19 устойчивости по Ляпунову решения системы (81) можно опустить требование продолжаемости возмущенного решения на весь луч $\mathbf{R}^+$, заменив условие $t \in \mathbf{R}^+ \subset D(\mathsf{x})$ в импликации (82) более слабым условием $t \in \mathbf{R}^+ \cap D(\mathsf{x})$.

II. Может ли случиться, что разные решения одной и той же системы (81) ведут себя при $t \to \infty$ по-разному: одни — устойчивы (не асимптотически) по Ляпунову, другие — асимптотически устойчивы, а третьи — неустойчивы?

III. Верно ли, что если все решения системы (81), с нулевым решением и с правой частью $f \in \mathrm{C}^1(G)$, стремятся к нулю при $t \to \infty$, то:

— все решения этой системы ограничены при $t \in \mathbf{R}^+$;

— нулевое решение устойчиво по Ляпунову;

[17)] Точнее, ее часть, попадающую в окрестность $\mathcal{U}(0)$ начала координат.

— нулевое решение асимптотически устойчиво?
Те же вопросы для случая $n = 1$.

IV. Доказать *третью теорему Ляпунова* (*о неустойчивости*): пусть $f, f'_x \in \mathrm{C}(G)$ и для системы (85) существует функция v Ляпунова, удовлетворяющая при $x \in \dot{U}(0)$ и $t \in \mathbf{R}^+$ условиям:

1) $v(x_j) > 0$ для некоторой последовательности $x_j \to 0$, стремящейся к нулю при $j \to \infty$;

2) $\dot{v}_t(x) \geqslant w(x) > 0$ для некоторой функции $w \in \mathrm{C}(\dot{U}(0))$.

Тогда нулевое решение этой системы неустойчиво по Ляпунову.

V. Останется ли справедливым утверждение теоремы 113 или, соответственно, 114, если в ней условие 2) заменить более простым (не содержащим функции w) условием $\dot{v}_t(x) < 0$ или, соответственно, $\dot{v}_t(x) > 0$ в случае, когда система (85):

— автономна;

— неавтономна?

VI. Доказать, что если все диагонали (параллельные главной) матрицы некоторого оператора в некотором базисе $h_1, \ldots, h_n$ занумерованы подряд снизу вверх целыми числами $i = -n, \ldots, n$ (например, главная диагональ имеет номер 0), то при переходе к новому базису $h'_1, \ldots, h'_n$ (91) каждый элемент i-й диагонали этой матрицы умножается на δ^i.

VII. Доказать, что факт устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости нулевого решения не нарушится, если перейти к новому базису в $\mathbf{R}^n$, непрерывно дифференцируемо зависящему от времени, т. е. совершить *ляпуновское преобразование* координат

$$y = L(t)x, \quad \|L\|_{\mathbf{R}^+} + \|L^{-1}\|_{\mathbf{R}^+} < \infty, \quad L \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^+).$$

VIII. Доказать, что периодичная линейная однородная система (см. задачу V из п. 3.17):

— асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда модули всех ее мультипликаторов меньше 1;

— устойчива тогда и только тогда, когда модули всех ее мультипликаторов меньше или равны 1, причем последним соответствуют жордановы клетки оператора монодромии, имеющие только первый порядок.

7. Автономные системы

7.1. Фазовое пространство

автономной[1] системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in G \subset \mathbf{R}^n, \tag{92}$$

— это область G, а *фазовая траектория* решения x — это параметрически заданное множество[2]

$$E(\mathsf{x}) \equiv \{\mathsf{x}(t) |\ t \in D(\mathsf{x})\} \subset G.$$

Собственно множество $E(\mathsf{x})$, временна́я параметризация которого забыта, называется *фазовой кривой*, или *орбитой*, решения x, а множество всех фазовых траекторий (кривых) системы — ее *фазовым портретом*. Множество всех непродолжаемых[3] решений системы (92) обозначим через $S_f(G)$.

Любую систему без ограничения общности можно считать автономной, добавив, в случае необходимости, дополнительную фазовую переменную:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x_{n+1} = t \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = f(x, x_{n+1}) \\ \dot{x}_{n+1} = 1, \end{cases} \qquad \text{где } x_{n+1}(0) = 0$$

(если последнее ограничение снять, то добавятся лишние решения, которые получаются сдвигами переменной $x_{n+1} = t + C$, $C \in \mathbf{R}$, игравшей прежде роль времени).

7.2. Сдвиг по времени решений автономной системы

I. Задать автономную систему (92) — это то же самое, что задать на ее фазовом пространстве *векторное поле*, т. е. каждой точке $x \in G$ поставить в соответствие вектор

$$f(x) = f(\mathsf{x}(t)) = \dot{\mathsf{x}}(t) \equiv \frac{d\mathsf{x}(\tau)}{d\tau}\Big|_{\tau=t},$$

[1] Т. е. с правой частью, *не зависящей от времени.*

[2] Которое, пользуясь вольностью речи, можно отождествлять с самим решением.

[3] В настоящей главе все эти непродолжаемые решения молчаливо предполагаются определенными на всей числовой прямой $\mathbf{R}$.

геометрический смысл которого, по определению решения, есть *фазовая скорость* $\dot{\mathsf{x}}(t)$ какого-либо решения $\mathsf{x}(\cdot)$, взятая в тот момент t, когда $\mathsf{x}(t) = x$.

Возможен вариант[4)] изображения зависимости переменной x от параметра t на фазовой траектории в виде *стрелки* на ней, показывающей направление движения с ростом времени.

II. Фазовая скорость автономной системы зависит только от точки x (но не от момента t прохождения через нее решения x), поэтому временна́я параметризация фазовой траектории задается, по меньшей мере, с точностью до аддитивной постоянной, что и утверждает

Лемма 117. *Если* x *— решение системы* (92)*, то для любой константы* $C \in \mathbf{R}$ *функция*

$$\mathsf{y}(t) \equiv \mathsf{x}(t + C), \quad t \in \mathbf{R},$$

— также ее решение.

$\lhd$ Если $\dot{\mathsf{x}}(t) = f(\mathsf{x}(t))$, то $\dot{\mathsf{y}}(t) = \dot{\mathsf{x}}(t + C) = f(\mathsf{x}(t + C)) = f(\mathsf{y}(t))$. $\rhd$

III. При непрерывности правой части автономной системы через каждую точку ее фазового пространства проходит хотя бы одна фазовая кривая (теорема Пеано), а при непрерывной дифференцируемости — не более одной, как показывает следующая

Лемма 118. *Если* $f \in \mathrm{C}^1(G)$ *и фазовые траектории решений* $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2 \in S_f(G)$ *имеют общую точку*

$$\mathsf{x}_1(t_1) = \mathsf{x}_2(t_2), \tag{93}$$

то при соответствующих сдвигах времени они совпадают:

$$\mathsf{x}_2(t + t_2) = \mathsf{x}_1(t + t_1), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{94}$$

$\lhd$ Если $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2$ — решения, то по лемме 117 функции $\mathsf{x}_1(t + t_1)$ и $\mathsf{x}_2(t + t_2)$ — тоже решения, а из совпадения (93) их начальных значений в момент $t = 0$ следует, в силу теоремы 18, их полное совпадение (94). $\rhd$

[4)] Менее информативный, чем вектор фазовой скорости.

7.3. Три типа фазовых траекторий

Определение 21. Фазовую траекторию (кривую) решения $\mathsf{x} \in S_f(G)$ системы (92) назовем:
— *незамкнутой*, если

$$\mathsf{x}(t+s) \neq \mathsf{x}(t), \quad s > 0,\ t \in \mathbf{R};$$

— *замкнутой* (или *циклом*), если существует такое $T > 0$, что при каждом $t \in \mathbf{R}$ выполнено условие

$$\mathsf{x}(t+s) \begin{cases} = \mathsf{x}(t), & s = T, \\ \neq \mathsf{x}(t), & 0 < s < T; \end{cases}$$

— *неподвижной точкой* (или *точкой покоя*, или *положением равновесия*), если

$$\mathsf{x}(t) = x_0, \quad t \in \mathbf{R}.$$

I. Точка $x_0 \in G$ называется *особой точкой векторного поля* f, если $f(x_0) = 0$. Она называется *устойчивой* (*асимптотически*), если устойчиво (асимптотически) решение $\mathsf{x}(\cdot) = x_0$.

Точка покоя заведомо является особой точкой векторного поля, а в силу леммы 118 справедливо

Следствие 119. *Через особую точку $x_0 \in G$ векторного поля $f \in \mathrm{C}^1(G)$ проходит ровно одна фазовая кривая — точка покоя.*

II. В определении 21 понятие незамкнутости фазовой траектории, отличной от точки покоя, не совпадает с формальным отрицанием понятия ее замкнутости, хотя это и подразумевается, как показывает

Теорема 120. *Если $f \in \mathrm{C}^1(G)$, то фазовая траектория любого решения $\mathsf{x} \in S_f(G)$ может быть только одного из трех типов, перечисленных в определении* 21.

$\lhd$ 1. Пусть фазовая траектория $E(\mathsf{x})$ не является незамкнутой. Тогда множество $\mathcal{S}$ таких чисел $s > 0$, каждое из которых для некоторого $t_0 \in \mathbf{R}$ удовлетворяет равенству $\mathsf{x}(t_0 + s) = \mathsf{x}(t_0)$, — не пусто.

2. Обозначим через $\mathcal{T}$ множество всех периодов (включая отрицательные и нулевой) функции x и заметим, что:

a) $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, так как если $T \in \mathcal{S}$, то для некоторого $t_0 \in \mathbf{R}$ выполнено условие $\mathsf{x}(t_0 + T) = \mathsf{x}(t_0)$, откуда по лемме 118 имеем

$$\mathsf{x}(t + t_0 + T) = \mathsf{x}(t + t_0), \quad t \in \mathbf{R};$$

b) для любого $m \in \mathbf{Z}$ справедливо включение

$$m\mathcal{S} \equiv \{ms \mid s \in \mathcal{S}\} \subset \mathcal{T};$$

c) $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}$, т. е. если множество $\mathcal{T}$ содержит последовательность $T_k \to T$ $(k \to \infty)$, то $T \in \mathcal{T}$, так как

$$\mathsf{x}(T) = \lim_{k\to\infty} \mathsf{x}(T_k) = \lim_{k\to\infty} \mathsf{x}(0) = \mathsf{x}(0),$$

а значит, либо $T = 0 \in \mathcal{T}$, либо $|T| \in \mathcal{S}$ и $T \in \pm\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$.

3. Возможны два варианта:

— либо

$$\inf \mathcal{S} = T > 0,$$

тогда траектория $E(\mathsf{x})$ — замкнута, поскольку $T \in \mathcal{T}$ и для любого $s \in (0; T)$ имеет место условие $s \notin \mathcal{S}$;

— либо, наоборот, $\inf \mathcal{S} = 0$, тогда множество

$$\mathcal{T} \supset \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} m\mathcal{S}$$

— всюду плотно на прямой $\mathbf{R}$ (так как для любого $\varepsilon > 0$ оно содержит некоторое число $s \in (0; \varepsilon)$, а значит, и порожденную им ε-сеть $\{ms \mid m \in \mathbf{Z}\}$), поэтому $\mathcal{T} = \overline{\mathcal{T}} = \mathbf{R}$ и для каждого $t \in \mathbf{R}$ имеем $\mathsf{x}(t) = \mathsf{x}(0)$, следовательно, траектория $E(\mathsf{x})$ — неподвижная точка. $\triangleright$

7.4. Фазовый поток

Определение 22. Скажем, что на топологическом пространстве G задана *динамическая система*, или *действие однопараметрической группы преобразований*, если задано семейство отображений

$$g^t \colon G \to G, \quad t \in \mathbf{R},$$

удовлетворяющее условиям:

1) $g^0 = \mathsf{I}$ — тождественный оператор пространства G;

2) $g^{t+s} = g^t \circ g^s, \quad t, s \in \mathbf{R}$;

3) функция $g^t(x)$ непрерывна по паре $(t, x) \in \mathbf{R} \times G$.

Если $G \subset \mathbf{R}^n$ и функция $g^t(x)$ — непрерывно дифференцируема по паре (t, x), то динамическую систему назовем *фазовым потоком.*

Лемма 121. *Если $f \in \mathrm{C}^1(G)$, то система* (92) *задает на множестве G фазовый поток, определяемый при каждом $t \in \mathbf{R}$ формулой*

$$g^t(\mathsf{x}(0)) = \mathsf{x}(t), \quad \mathsf{x} \in S_f(G). \tag{95}$$

$\lhd$ Формула (95) действительно определяет отображение $G \to G$, так как через каждую точку $x \in G$ в момент $t_0 = 0$ проходит ровно одно решение x (теорема 14).

1. Для каждого решения x имеем $g^0(\mathsf{x}(0)) = \mathsf{x}(0)$.

2. Если $t, s \in \mathbf{R}$, а x, y — решения и $\mathsf{y}(0) = \mathsf{x}(s)$, то $\mathsf{y}(t) = \mathsf{x}(t+s)$ (в силу леммы 118), поэтому

$$\begin{aligned} g^{t+s}(\mathsf{x}(0)) = \mathsf{x}(t+s) = \mathsf{y}(t) = g^t(\mathsf{y}(0)) = g^t(\mathsf{x}(s)) \\ = g^t(g^s(\mathsf{x}(0))) = (g^t \circ g^s)(\mathsf{x}(0)). \end{aligned}$$

3. Отображение $g^t(x)$ — непрерывно дифференцируемо по паре (t, x) (следствие 102 и теорема 105), причем обратимо, так как $g^t \circ g^{-t} = g^{t-t} = \mathsf{I}$. $\rhd$

Иногда фазовый поток отождествляют с задающей его автономной системой[5)], тем более, что она однозначно восстанавливается по фазовому потоку, например, как указывает

Следствие 122. *В условиях леммы* (121) *справедливо равенство*

$$\left(g^t\right)^{\cdot}\big|_{t=0} = f.$$

$\lhd$ Левая часть равенства, примененная к точке $x \in G$, равна

$$\frac{dg^t}{dt}\Big|_{t=0}(x) = \frac{dg^t(x)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d\mathsf{x}(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \dot{\mathsf{x}}(0) = f(\mathsf{x}(0)) = f(x),$$

где $\mathsf{x}(0) = x$. $\rhd$

[5)] Не беспокоясь о существовании последней.

7.5. Локальное выпрямление фазовых траекторий

системы (92) в *неособой точке* $x_0 \in G \subset \mathbf{R}^n$ векторного поля f происходит под действием диффеоморфизма

$$\varphi: U(x_0) \to V$$

переводящего некоторую окрестность $U(x_0) \subset G$ этой точки в некоторую область $V \subset \mathbf{R}^n$. При отображении φ фазовая траектория $E(\mathsf{x}) \subset U(x_0)$ любого решения x переходит в траекторию

$$y = \varphi(\mathsf{x}(t)), \quad t \in D(\mathsf{x}),$$

а если все фазовые траектории переходят в фазовые траектории системы

$$\dot{y} = e_n \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{96}$$

то диффеоморфизм φ называется *выпрямляющим*.

Все векторные поля в окрестности своих неособых точек (равно как и соответствующие им фазовые портреты) выглядят, с точностью до диффеоморфизма, одинаково, как показывает следующая, подобная теореме 108,

Теорема 123. *Если $x_0 \in G$ — неособая точка векторного поля $f \in \mathrm{C}^1(G)$, то существует выпрямляющий диффеоморфизм, оставляющий на месте эту точку, а при условии $f_n(x_0) \neq 0$ — еще и все точки гиперплоскости $S \subset U(x_0)$, задаваемой условием $x_n = x_{n,0}$.*

$\lhd$ 1. Так как вектор $f(x_0)$ отличен от нуля, то без ограничения общности (за счет перенумерации координат) можно считать, что отлична от нуля именно последняя, n-я, его координата $f_n(x_0)$.

2. Положим $y_0 = x_0$ и рассмотрим отображение

$$\chi: y \equiv (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) \mapsto \chi(y) \equiv g^{y_n - y_{n,0}}(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_{n,0}),$$

определенное для всех точек $y \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяющих условию $(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_{n,0}) \in G$.

3. Отображение χ оставляет все точки y (и точку y_0, в частности), удовлетворяющие условию $y_n = y_{n,0}$, на месте

$$\chi(y) = g^{y_{n,0}-y_{n,0}}(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_{n,0}) = y.$$

4. Отображение χ непрерывно дифференцируемо (см. лемму 121), причем производная $\chi'(y_0)$ имеет компоненты

$$\chi'_{y_i}(y_0) = \begin{cases} \left(g^0\right)'_{y_i}(y_{1,0}, \ldots, y_i, \ldots, y_{n,0})\big|_{y_i=y_{i,0}} = e_i, & i \neq n, \\ \left(g^{y_n-y_{n,0}}(y_0)\right)'_{y_n}\big|_{y_n=y_{n,0}} = f(y_0), & i = n, \end{cases}$$

поэтому она невырождена, а значит, функция χ осуществляет диффеоморфизм достаточно малой окрестности точки y_0, имеющей вид

$$V \equiv \bigcup_{t \in I(0)} (S(y_0) + te_n), \quad S(y_0) \subset S, \tag{97}$$

и ее образа $U(x_0) \equiv \chi(V)$.

5. Обратная функция $\varphi = \chi^{-1}$ для каждой точки $x \in S(x_0)$ переводит фазовую траекторию решения

$$\mathsf{x}(t) = g^t(x), \quad t \in I(0),$$

исходной системы в фазовую траекторию решения

$$\mathsf{y}(t) = \chi^{-1}\left(g^t(x)\right) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n,0} + t) = x + te_n, \quad t \in I(0),$$

системы (96). $\triangleright$

7.6. Первый интеграл автономной системы

(92) — это такая скалярная функция $\varphi \in \mathrm{C}^1(G)$, что ее сужение на любую фазовую кривую этой системы есть константа[6], т. е. для любого решения $\mathsf{x} \in S_f(G)$ выполнено равенство

$$\varphi\big(\mathsf{x}(t)\big) = \mathrm{const}, \quad t \in D(\mathsf{x}).$$

I. Для выяснения[7] вопроса о том, является ли данная функция первым интегралом данной системы, вовсе не требуется решать последнюю.

[6] Возможно, для каждой кривой — своя.

[7] Как и для вычисления производной в силу системы (см. определение 20).

Лемма 124. *Если $f \in \mathrm{C}^1(G)$, то функция $\varphi \in \mathrm{C}^1(G)$ является первым интегралом системы* (92) *тогда и только тогда, когда*

$$\dot{\varphi}(x) \equiv \varphi'(x)f(x) = 0, \quad x \in G.$$

$\lhd$ 1. Если $\varphi \in \mathrm{C}^1(G)$ — первый интеграл системы (92), то для любой точки $x_0 \in G$ существует решение $\mathsf{x} \in S_f(G)$, удовлетворяющее начальному условию $\mathsf{x}(0) = x_0$ (теорема 14), и потому

$$0 = \frac{d\varphi(\mathsf{x}(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \varphi'(\mathsf{x}(0))\dot{\mathsf{x}}(0) = \varphi'(x_0)f(x_0) = \dot{\varphi}(x_0).$$

2. Обратно: если выполнено условие

$$\dot{\varphi}(x) = 0, \quad x \in G,$$

то для любого решения $\mathsf{x} \in S_f(G)$ имеем

$$\frac{d\varphi(\mathsf{x}(t))}{dt} = \varphi'(\mathsf{x}(t))\dot{\mathsf{x}}(t) = \varphi'(\mathsf{x}(t))f(\mathsf{x}(t)) = \dot{\varphi}(\mathsf{x}(t)) = 0, \quad t \in D(\mathsf{x}),$$

поэтому функция $\varphi(\mathsf{x}(\cdot))$ — константа. $\rhd$

II. Функцию φ будем называть первым интегралом также и тогда, когда она определена лишь в некоторой *подобласти* $G' \subset G$ и является первым интегралом системы, суженной на эту подобласть.

Определение 23. Множество $P \subset G'$ назовем *инвариантным* (для системы (92) в подобласти $G' \subset G$), если с каждой точкой $x \in P$ оно содержит всю фазовую кривую $E(\mathsf{x}) \ni x$, $\mathsf{x} \in S_f(G')$.

Лемма 125. *Поверхности уровня любого первого интеграла $\varphi \in \mathrm{C}^1(G')$ системы* (92) *в подобласти $G' \subset G$ — инвариантны.*

$\lhd$ Действительно, если для заданного $C \in \mathbf{R}$

$$x_0 \in P \equiv \{x \in G' | \; \varphi(x) = C\}$$

и $x_0 \in E(\mathsf{x})$, $\mathsf{x} \in S_f(G')$, то $E(\mathsf{x}) \subset P$, так как

$$\varphi(\mathsf{x}(t)) = \varphi(x) = C, \quad t \in D(\mathsf{x}).$$

$\rhd$

7.7. Независимые первые интегралы

I. Речь пойдет о *функциональной*[8] зависимости первых интегралов.

Определение 24. Первые интегралы $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ системы (92), определенные в некоторой окрестности $G' \subset G$ точки x_0, назовем *независимыми в точке* x_0, если векторы[9]

$$\varphi_1'(x_0), \ldots, \varphi_k'(x_0)$$

— линейно независимы. Скажем, что скалярная функция ψ *зависит в области* G' от первых интегралов $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, если существует непрерывно дифференцируемая скалярная функция[10] F, удовлетворяющая равенству

$$\psi(x) = F(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)), \quad x \in G'. \tag{98}$$

Лемма 126. *Любая функция, зависящая в некоторой области от первых интегралов системы* (92)*, — есть первый интеграл этой системы.*

$\triangleleft$ При подстановке $x = \mathsf{x}(\cdot)$ любого решения системы (92) в функцию (98) получается константа. $\triangleright$

II. Локально, в неособой точке векторного поля, в множестве первых интегралов автономной системы выбирается базис, в функциональном смысле, состоящий из $n-1$ функций.

Теорема 127. *Если $x_0 \in G$ — неособая точка векторного поля $f \in \mathrm{C}^1(G)$, то в некоторой области $G' \subset G$ существуют независимые в точке x_0 первые интегралы $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ системы* (92)*, от которых в области G' зависит любой первый интеграл ψ этой системы.*

$\triangleleft$ 1. Пусть функция

$$\varphi\colon G' \to V, \quad G' \equiv U(x_0),$$

— выпрямляющий диффеоморфизм, существование которого утверждается в теореме 123. Тогда координаты $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ вектор-функции $\varphi \in \mathrm{C}^1(G')$ являются первыми интегралами системы

[8] А не линейной!

[9] Стрóки.

[10] Определенная в некоторой области пространства $\mathbf{R}^k$.

(92), так как для любого решения $\mathsf{x} \in S_f(G')$ функции

$$\mathsf{y}_i(\cdot) = \varphi_i(\mathsf{x}(\cdot)), \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

— константы.

2. Эти первые интегралы независимы в точке x_0, поскольку векторы

$$\varphi_1'(x_0), \ldots, \varphi_{n-1}'(x_0)$$

служат строками невырожденной матрицы $\varphi'(x_0)$.

3. Если $\psi \in \mathrm{C}^1(G')$ — первый интеграл системы (92), то функция $\psi \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{C}^1(V)$ — первый интеграл системы[11)] (96), так как для любого решения y последней системы имеем

$$\psi\left(\varphi^{-1}(\mathsf{y}(t))\right) = \psi(\mathsf{x}(t)) = \mathrm{const}, \quad t \in D(\mathsf{y}).$$

4. Таким образом, функция

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi\left(\varphi^{-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)\right) = \psi\left(\varphi^{-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_{n,0})\right) \\ &= \psi\left(\varphi^{-1}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x), x_{n,0})\right), \quad x \in G',\end{aligned}$$

представляется в виде (98), где

$$F(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \equiv \psi\left(\varphi^{-1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, x_{n,0})\right).$$

$\triangleright$

7.8. Фазовая прямая

представляет собой одномерное фазовое пространство автономного уравнения

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in G \subset \mathbf{R}.$$

Пусть все особые точки векторного поля f изолированы. Тогда непрерывная функция f имеет фиксированный знак на каждом из интервалов, на которые особые точки разбивают область G.

Лемма 128. *Пусть $f \in C^1(G)$, тогда:*

1) *любой интервал $I \subset G$, не содержащий особых точек векторного поля f, есть фазовая кривая, отличная от точки покоя*[12)]*, и наоборот;*

[11)] С выпрямленными координатными линиями по переменной y_n.

[12)] И даже незамкнутая.

2) *если a — единственная особая точка векторного поля f в области $G' \subset G$, то следующие утверждения эквивалентны:*

a) *точка a устойчива по Ляпунову;*

b) *точка a асимптотически устойчива;*

c) $f(x) \begin{cases} > 0, & a > x \in G', \\ < 0, & a < x \in G'. \end{cases}$

$\lhd$ 1. Во-первых, если $f(x) \neq 0$ при $x \in I$, то фазовая кривая любого решения $\mathsf{x} \in S_f(I)$ совпадает с интервалом I. Для доказательства этого факта достаточно проверить справедливость импликации

$$x_0 \equiv \mathsf{x}(t_0), \quad x_0 \in [\alpha;\beta] \subset I \implies [\alpha;\beta] \subset E(\mathsf{x}).$$

Действительно, предположив, что ее предпосылка выполнена, но, например, $\beta \notin E(\mathsf{x})$ и, скажем, $f(x_0) > 0$, получаем противоречие:

$$\inf_{t \geqslant t_0} \dot{\mathsf{x}}(t) \geqslant \inf_{x \in [x_0;\beta]} f(x) = v > 0 \implies \mathsf{x}(t) \geqslant \mathsf{x}(t_0) + v(t - t_0) > \beta$$

при достаточно большом значении t. Случаи, когда $f(x_0) < 0$ или $\alpha \notin E(\mathsf{x})$, рассматриваются аналогично.

Во-вторых, любая фазовая кривая $E(\mathsf{x})$, отличная от точки покоя, — связное множество (из-за непрерывности функции x), не содержащее особых точек векторного поля (следствие 119). Поэтому на ней функция f имеет постоянный знак, следовательно, функция x, определенная на интервале $D(\mathsf{x})$, — строго монотонна, а значит, $E(\mathsf{x})$ — интервал.

2. Согласно предыдущему пункту, фазовая траектория любого решения $\mathsf{x} \in S_f(G')$ есть либо неподвижная точка a, либо один из интервалов $G' \cap \{x|\ x > a\}$ или $G' \cap \{x|\ x < a\}$. Поэтому если условие c) выполнено, то точки движутся по этим интервалам монотонно, стремясь при $t \to \infty$ к точке a (т. е. точка a асимптотически устойчива), а если не выполнено — то хотя бы с одной стороны от точки a монотонно удаляются от нее на почтительное расстояние (т. е. точка a неустойчива). $\rhd$

7.9. Фазовая плоскость

— это двумерное фазовое пространство автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y), \end{cases} \quad (x,y) \in G \subset \mathbf{R}^2, \tag{99}$$

которая тесно связана с уравнением в дифференциалах (см. определение 8)

$$g(x,y)\,dx = f(x,y)\,dy, \quad (x,y) \in G' \subset G, \tag{100}$$

задающим поле направлений в области

$$G' \equiv G \setminus \{(x,y)|\ (f(x,y), g(x,y)) \neq (0,0)\}.$$

Лемма 129. *Если $f, g \in \mathrm{C}^1(G)$, то всякая отличная от точки покоя фазовая кривая системы* (99) *является интегральной кривой уравнения* (100)*, и наоборот.*

$\lhd$ 1. Если отличная от точки покоя[13] фазовая траектория решения

$$\begin{cases} x = \mathsf{x}(t) \\ y = \mathsf{y}(t), \end{cases} \quad t \in D(\mathsf{x}, \mathsf{y}), \tag{101}$$

системы (99) проходит в какой-либо момент t_0 через какую-либо точку $(x_0, y_0) \in G$ и, например, $f(x_0, y_0) \neq 0$, то система (101) параметрически задает функцию $Y(x) \equiv \mathsf{y}(t(x))$, определенную в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющую равенству

$$\frac{dY}{dx}(x_0) = \frac{\dot{\mathsf{y}}(t_0)}{\dot{\mathsf{x}}(t_0)} = \frac{g(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)}.$$

Таким образом, фазовая траектория (101) касается в любой своей точке (x_0, y_0) поля направлений уравнения (100) и потому является интегральной кривой для этого уравнения.

2. С другой стороны, любая интегральная кривая Γ уравнения (100), проходящая через какую-либо точку $(x_0, y_0) \in G$, локально совпадает (теорема 14) с той интегральной кривой, которая получается путем исключения параметра t из проходящей через ту же точку фазовой траектории решения $(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \in S_{(f,g)}(G)$, а значит, она локально совпадает и с фазовой кривой $E(\mathsf{x}, \mathsf{y})$.

Из доказанного локального совпадения следует и включение[14] $\Gamma \subset E(\mathsf{x}, \mathsf{y})$. Действительно, любая замкнутая дуга кривой Γ с концами (x_0, y_0) и (x_1, y_1) локально в каждой своей точке совпадает с какой-либо фазовой кривой системы, поэтому найдется

[13] А значит, не проходящая через особые точки векторного поля.

[14] Означающее, что интегральная кривая Γ уравнения (100) есть фазовая кривая системы (99).

конечная цепочка (лемма Гейне — Бореля) фазовых кривых, совпадающих с интегральной кривой на последовательно пересекающихся друг с другом открытых дужках и потому совпадающих как друг с другом (лемма 118), так и с кривой $E(\mathsf{x},\mathsf{y})$. $\triangleright$

7.10. Особые точки линейных автономных систем на плоскости

Фазовый портрет автономной системы в окрестности особой точки векторного поля, в отличие от неособой, — индивидуален. *Классификация Пуанкаре* особых точек на плоскости относится к линейной системе

$$\dot z = Az, \quad z \in \mathbf{R}^2, \tag{102}$$

с *изолированной* нулевой особой точкой:

$$Az \neq 0, \quad z \neq 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \det A \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$$

где $\lambda_{1,2}$ — собственные значения оператора A.

Для жордановой формы матрицы A могут представиться три возможности: либо она диагональна и действительна, либо не диагональна, либо не действительна[15]. Рассмотрим их последовательно, решая каждый раз эту систему в специальном базисе, в котором $z \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

I. Пусть матрица оператора A в некотором базисе в $\mathbf{R}^2$ имеет диагональный вид с числами $\lambda_{1,2} \in \mathbf{R}$ на диагонали:

$$\begin{cases} \dot x = \lambda_1 x \\ \dot y = \lambda_2 y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y = C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

— это общее решение системы, а при $(x, y) \neq (0, 0)$ ее *нетривиальные* (т. е. отличные от собственных лучей и неподвижной точки) фазовые кривые находятся из уравнения

$$\lambda_2 y\, dx = \lambda_1 x\, dy \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \mu \frac{y}{x}, \\ x = 0 \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y = C|x|^{\mu} \\ x = 0, \quad C \in \mathbf{R}. \end{array} \right.$$

где $\mu \equiv \lambda_2/\lambda_1$.

[15] Случай, когда она ни диагональна, ни действительна, отпадает из-за малости порядка матрицы.

1. Если $\mu < 0$, то нетривиальные фазовые кривые напоминают ветви гиперболы, а особая точка называется *седлом*. Эта точка всегда неустойчива по Ляпунову, так как собственные значения имеют разные знаки и одно из них — положительно.

2. Если $\mu > 0$, то особая точка называется *узлом*. Ее асимптотическая устойчивость означает отрицательность собственных значений (имеющих один знак), а неустойчивость — положительность. При этом возможны варианты:

a) $\mu > 1$ (или $\mu < 1$, что означает перестановку переменных x и y местами) — *обыкновенный* узел, его нетривиальные фазовые траектории при $t \to \infty$ или $t \to -\infty$ стремятся к началу координат, касаясь оси абсцисс, и похожи на ветви параболы;

b) $\mu = 1$ — *дикритический* узел, все его фазовые кривые, кроме неподвижной точки, — собственные лучи.

II. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda \in \mathbf{R}$ и матрица оператора A в некотором базисе, получающемся из жорданова с помощью специального преобразования из п. 3 доказательства теоремы 115, имеет недиагональный вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \lambda x + \lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} x = C_1 e^{\lambda t} \\ y = C_1 t e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

— это общее решение системы, а при $(x, y) \neq (0, 0)$ ее фазовые кривые находятся из уравнения

$$\lambda(y+x)\,dx = \lambda x\,dy \iff \left[\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{x} \\ x = 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} y = (C + \ln|x|)x \\ x = 0, \quad C \in \mathbf{R}. \end{array}\right.$$

3. Эта точка — *вырожденный узел*[16], ее нетривиальные фазовые кривые при $t \to \infty$ или $t \to -\infty$ стремятся к началу координат, касаясь собственных лучей, и имеют специальный вид, а устойчивость (сразу асимптотическая) имеет место при $\lambda < 0$.

III. Пусть оператор A имеет комплексные собственные значения $\lambda \equiv \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ и $\overline{\lambda}$, тогда матрица комплексификации оператора $\mathcal{A}$ в некотором комплексном базисе $h \equiv h_1 + ih_2$ и $\overline{h}$ диагональна (h_1, h_2 — линейно независимы, как и $h, \overline{h}$), а общее действительное решение содержит множество функций:

$$z(t) = Ce^{\lambda t}h + \overline{C}e^{\overline{\lambda}t}\overline{h} = 2\,\mathrm{Re}\big(w(t)h\big) = 2\,\mathrm{Re}\big((u(t)+iv(t))(h_1+ih_2)\big)$$
$$= u(t)(2h_1) + v(t)(-2h_2), \quad C \in \mathbf{C},$$

[16] Тоже узел, поскольку собственные значения одного знака.

где $w(t) \equiv Ce^{\lambda t}$ и $u \equiv \operatorname{Re} w$, $v \equiv \operatorname{Im} w$.

Если принять координаты x и y вектора z в базисе $2h_1, -2h_2$ за действительную и мнимую части комплексного числа z соответственно, то все найденные действительные фазовые траектории $z(t)$ запишутся на комплексной плоскости уравнением

$$z(t) = u(t) + iv(t) \equiv Ce^{\lambda t} = Ce^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t), \quad C \in \mathbf{C},$$

причем эти кривые заполнят всю комплексную плоскость, поэтому других фазовых кривых на действительной фазовой плоскости нет.

4. Если $\alpha = 0$, то фазовые траектории замкнуты, а особая точка называется *центром*, который устойчив по Ляпунову, но не асимптотически.

5. Если $\alpha < 0$ или $\alpha > 0$, то фазовые траектории закручиваются или, соответственно, раскручиваются по спирали и при $t \to \infty$ или, соответственно, при $t \to -\infty$ стремятся к началу координат, а особая точка называется *фокусом*, который асимптотически устойчив или, соответственно, неустойчив.

7.11. Задачи для самостоятельного решения

I. Могут ли, при условии $f \in \mathrm{C}(G) \setminus \mathrm{C}^1(G)$, две фазовые кривые системы (92), проходящие через точку $x_0 \in G$, локально в этой точке различаться:

— включая одна другую;

— касаясь одна другой;

— пересекаясь одна с другой?

II. Чем отличается понятие замкнутости фазовой траектории $E(\mathsf{x})$ от понятия периодичности функции x? Является ли понятие незамкнутости траектории формальным отрицанием понятия замкнутости?

III. Можно ли утверждать, что отображение χ в доказательстве теоремы 123 осуществляет диффеоморфизм области V (97) для интервала $I(0) \equiv \mathbf{R}$?

IV. Если первые интегралы $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ системы (92) — независимы в точке x_0, то любой первый интеграл этой системы зависит от них в некоторой окрестности точки x_0.

V. Доказать, что первым интегралом *уравнения*[17)] *Ньютона*

$$\ddot{x} = f(x), \quad f \in \mathrm{C}^1(I), \quad I \subset \mathbf{R},$$

является *интеграл энергии*

$$E(x, \dot{x}) \equiv \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi.$$

Какие еще первые интегралы имеет это уравнение?

VI. Доказать, что одним из первых интегралов *гамильтоновой системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = H'_y(x, y) \\ \dot{y} = -H'_x(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in G \subset \mathbf{R}^{n+n},$$

является скалярная функция $H \in \mathrm{C}^2(G)$.

VII. Как связаны между собой поле направлений уравнения (100) и векторное поле системы (99)?

VIII. Доказать, что если кривая инвариантна для системы (92) в смысле определения 23 и не содержит особых точек ее векторного поля, то она — фазовая кривая этой системы.

IX. Для каждой тройки $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ определить тип особой точки системы

$$a) \begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = \qquad cy, \end{cases} \quad a, c \neq 0; \qquad b) \begin{cases} \dot{x} = ax - by \\ \dot{y} = bx + cy, \end{cases} \quad ac + b^2 \neq 0.$$

X. Какие типы особых точек на фазовой плоскости для системы (102):

— допускают первый интеграл, отличный от константы, когда оператор A — невырожден;

— и с какими фазовыми портретами могут получиться, когда оператор A — вырожден?

XI. Две автономные системы, заданные в области $G \equiv \mathbf{R}^n$, назовем *топологически эквивалентными*, если существует *гомеоморфизм* (т. е. взаимно однозначное отображение, непрерывное

[17)] Или, что по определению то же, нормальной автономной системы, получающейся из этого уравнения при канонической замене, т. е. при добавлении переменной $y \equiv \dot{x}$.

вместе со своим обратным) $\varphi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, переводящий все фазовые траектории одной системы в фазовые траектории другой. Доказать, что все линейные автономные системы на плоскости с особой точкой какого-либо одного из трех типов:

a) седло;

b) центр;

c) устойчивый фокус или узел (обыкновенный, дикритический или вырожденный)

— топологически эквивалентны, а разного — топологически не эквивалентны.

XII. Любой частичный предел $x_0 \in G$ решения $\mathsf{x} \in S_f(G)$ системы (92) при $t \to \infty$ (при $t \to -\infty$) назовем *ω-предельной* (*α-предельной*) точкой фазовой траектории $E(\mathsf{x})$. Доказать, что множество всех ω-предельных точек любой фазовой траектории $E(\mathsf{x})$:

— замкнуто в G;

— инвариантно для системы (92) в смысле определения 23;

— пусто или, соответственно, состоит ровно из одной точки x_0 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to\infty} \rho(\mathsf{x}(t), \partial G) = 0 \quad \text{или, соответственно,} \quad \lim_{t\to\infty} \mathsf{x}(t) = x_0 \in G.$$

XIII. Замкнутую фазовую кривую системы (99) назовем *предельным циклом*, если ни через какую точку некоторой окрестности этой кривой не проходит ни одна замкнутая фазовая кривая. Доказать теорему *Пуанкаре*: в некоторой окрестности любого предельного цикла для всех одновременно внутренних[18)] (а также внешних) фазовых траекторий предельный цикл является множеством ω-предельных или α-предельных точек. В каком случае предельный цикл служит фазовой кривой устойчивого или асимптотически устойчивого решения?

[18)] Т. е. начинающихся в этой окрестности, но внутри области, ограниченной предельным циклом.

8. Уравнения в частных производных первого порядка

8.1. Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка

имеет вид [1)]

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)u'_{x_i} = 0, \quad f(x) \equiv \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \neq 0, \quad x \in G \subset \mathbf{R}^n. \quad (103)$$

I. *Решением* уравнения (103) называется такая скалярная функция φ, определенная в области $G' \subset G$, что подстановка $u = \varphi(x)$ превращает это уравнение в тождество

$$\varphi'(x)f_i(x) = 0, \quad x \in G'.$$

Фазовые кривые системы (92) называются *характеристиками* линейного уравнения (103).

Так как левая часть последнего тождества совпадает с производной $\dot{\varphi}(x)$ в силу системы (92), то из определения первого интеграла с помощью леммы 124 выводится

Следствие 130. *Если* $f \in \mathrm{C}^1(G)$ *и* $\varphi \in \mathrm{C}^1(G')$, *то следующие утверждения эквивалентны:*

a) *функция* φ *— решение уравнения* (103)*;*

b) *функция* φ *— первый интеграл системы* (92)*;*

c) *сужение функции* φ *на любую характеристику уравнения* (103) *— есть константа.*

II. Общее решение уравнения (103), благодаря теореме 127, полностью описывает

Следствие 131. *Если* $f \in \mathrm{C}^1(G)$, *то для любой точки* $x_0 \in G$ *в некоторой ее окрестности* $G' \subset G$ *существуют такие* $n-1$ *решений уравнения* (103), *что любая функция* $\varphi \in \mathrm{C}^1(G')$, *зависящая*[2)] *от них в области* G', *— есть решение этого уравнения, и наоборот.*

[1)] Если вместо нуля в правой части уравнения (103) поставить функцию $g(x)$ или даже $g(x,u)$, то уравнение будет называться *линейным неоднородным* или, соответственно, *полулинейным.*

[2)] Функционально.

8.2. Задача Коши для уравнения в частных производных первого порядка

состоит в нахождении решения уравнения (103), удовлетворяющего *начальному условию*

$$u(x) = \varphi_0(x), \quad x \in S, \tag{104}$$

где S — некоторая *гиперповерхность*[3)] в G, а

$$\varphi_0 \colon S \to \mathbf{R}$$

— заданная *начальная функция*. Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет этому условию, если подстановка $u = \varphi(x)$ превращает его в тождество.

I. Пусть поверхность $S \subset \mathbf{R}^n$ является образом некоторой области $D \subset \mathbf{R}^{n-1}$ при диффеоморфизме $\sigma \colon D \to S$, задающем на S *координаты*

$$y \equiv (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in D.$$

Тогда требование $\varphi_0 \in \mathrm{C}^1(S)$ равносильно, по определению, требованию $(\varphi_0 \circ \sigma) \in \mathrm{C}^1(D)$. Справедлива следующая *локальная теорема существования и единственности* решения задачи Коши.

Теорема 132. *Если $f \in \mathrm{C}^1(G)$, $\varphi_0 \in \mathrm{C}^1(S)$, $x_0 \equiv \sigma(y_0) \in S$ и векторы*

$$\sigma'_{y_1}(y_0), \ldots, \sigma'_{y_{n-1}}(y_0), f(x_0)$$

— линейно независимы[4)]*, то в некоторой окрестности $G' \subset G$ точки x_0 существует единственное решение задачи Коши* (103) — (104).

◁ 1. Отображение $\chi \colon D \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, задаваемое формулой

$$x = \chi(\overline{y}) \equiv \sigma(y_1, \ldots, y_{n-1}) + y_n f(x_0), \quad \overline{y} \equiv (y, y_n),$$

обладает свойствами

$$\{\chi(y, 0) |\ y \in D\} = S, \qquad \chi(\overline{y}_0) = x_0, \quad \overline{y}_0 \equiv (y_0, 0).$$

[3)] Размерности, на единицу меньшей, чем объемлющее пространство.

[4)] Это означает, что поверхность S в точке x_0 не касается вектора $f(x_0)$, иными словами, *трансверсальна* к характеристикам уравнения (103) в точке x_0 (а значит, и в целой ее окрестности).

2. Функция χ — непрерывно дифференцируема, а ее производная

$$\chi'(\overline{y}_0) = \Big(\sigma'_{y_1}(y_0), \ldots, \sigma'_{y_{n-1}}(y_0), f(x_0)\Big)$$

— невырождена, поэтому отображение χ осуществляет диффеоморфизм некоторой окрестности $U(\overline{y}_0)$, а обратное к нему переводит соответствующую часть поверхности S в поверхность

$$\overline{S} \equiv \{\overline{y} \in U(\overline{y}_0) |\; y_n = 0\} \subset \chi^{-1}(S).$$

3. При диффеоморфизме χ^{-1} векторное поле f переходит в некоторое векторное поле $g \in \mathrm{C}^1(U(\overline{y}_0))$: если x и $\overline{\mathsf{y}}$ — решения соответствующих автономных систем, удовлетворяющие условиям $\mathsf{x}(0) = x \equiv \chi(\overline{y})$ и $\overline{\mathsf{y}}(0) = \overline{y}$, то

$$f(x) = \dot{\mathsf{x}}(0) = (\chi(\overline{\mathsf{y}}(t)))^{\cdot}\,|_{t=0} = \chi'(\overline{y}(0))\dot{\overline{y}}(0) = \chi'(\overline{y})g(\overline{y}).$$

Оператор $\chi'(\overline{y}_0) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{R}^n)$ переводит векторы e_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ и некоторый, непременно линейно независимый с ними, вектор $g(\overline{y}_0)$ в векторы $\chi'_{y_i}(\overline{y}_0) = \sigma'_{y_i}(y_0)$ и, соответственно, линейно независимый с ними вектор $f(x_0)$, поэтому

$$g_n(\overline{y}_0) \neq 0.$$

4. Согласно теореме 123, существует выпрямляющий диффеоморфизм $z = \varphi(\overline{y})$ некоторой окрестности $V(\overline{y}_0) \subset U(\overline{y}_0)$, оставляющий на месте все точки гиперплоскости $\overline{S} \cap V(\overline{y}_0)$

$$\varphi(y, 0) = (y, 0), \quad y \in D' \subset D,$$

и переводящий векторное поле g в векторное поле e_n. Более того, без ограничения общности можно считать (для чего, если потребуется, можно уменьшить подобласть $D' \subset D$), что

$$\varphi(V(\overline{y}_0)) = D' \times I(0).$$

5. В новых координатах решением $v(z)$ задачи Коши, или, что то же, первым интегралом соответствующей системы (что значит, не зависящим от переменной z_n), удовлетворяющим начальному условию

$$v(\varphi(y, 0)) = u(\chi(y, 0)) = \varphi_0(\sigma(y)), \quad y \in D',$$

будет однозначно определенная непрерывно дифференцируемая функция

$$v(z) = v(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0) = \varphi_0(\sigma(z_1, \ldots, z_{n-1})), \quad z \in \varphi(V(\overline{y}_0)),$$

каковой будет и искомая функция

$$u(x) = v(\varphi\chi^{-1}(x)), \quad x \in G' \equiv \chi\left(V(\overline{y}_0)\right),$$

записанная в исходных координатах. $\triangleright$

II. *Следом* множества $P \subset G'$ на поверхности S назовем множество $p \equiv P \cap S$.

Следствие 133. *В условиях теоремы* 132 *любое инвариантное*[5] *для системы* (92) *в области* G' *множество* $P \subset G'$ *однозначно задается своим следом на гиперповерхности* S.

$\triangleleft$ В доказательстве теоремы 132 область G' выбрана так, что каждая характеристика $E(\mathsf{x})$, $\mathsf{x} \in S_f(G')$ пересекает гиперповерхность S, поэтому вся она либо содержится в инвариантном множестве P, либо не содержится, в зависимости от того, имеет или не имеет она общую точку с множеством p, а значит, множество P полностью определяется множеством p. $\triangleright$

8.3. Квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка

имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x,u)u'_{x_i} = g(x,u), \quad f(x,u) \neq 0, \quad (x,u) \in H \subset \mathbf{R}^{n+1}. \quad (105)$$

I. *Решением* уравнения (105) называется такая скалярная функция φ, определенная в области[6] $G \subset \mathbf{R}^n$, что подстановка $u = \varphi(x)$ превращает это уравнение в тождество

$$\varphi'(x) f_i(x, \varphi(x)) = g(x, \varphi(x)), \quad x \in G.$$

[5] См. определение 23

[6] График этой функции должен лежать в области H.

Характеристиками квазилинейного уравнения (105) называются фазовые кривые системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ \dot{u} = g(x, u), \end{cases} \quad (x, u) \in H. \tag{106}$$

Лемма 134. *Если $f, g \in \mathrm{C}^1(H)$, а функция $\Phi \in \mathrm{C}^1(H)$ — первый интеграл системы* (106), *удовлетворяющий условию*

$$\Phi'_u(x, u) \neq 0, \quad (x, u) \in H, \tag{107}$$

то равенство

$$\Phi(x, u) = 0 \tag{108}$$

задает неявно, как функцию u от переменной x, решение уравнения (105).

$\lhd$ 1. По теореме о неявной функции, в силу неравенства (107), равенство (108) неявно задает непрерывно дифференцируемую функцию

$$u = \varphi(x), \quad x \in G.$$

2. Если Φ — первый интеграл системы (106) и

$$\Phi(x, \varphi(x)) = 0, \quad x \in G,$$

то при $x \in G$ имеем

$$\begin{gathered} 0 = \dot{\Phi}(x, u) = \Phi'_x(x, u)\, f(x, u) + \Phi'_u(x, u)\, g(x, u), \quad u = \varphi(x), \\ 0 = \tfrac{d}{dx}\Phi(x, \varphi(x)) = \Phi'_x(x, \varphi(x)) + \Phi'_u(x, \varphi(x))\, \varphi'(x), \end{gathered}$$

откуда

$$\Phi'_u(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) f(x, \varphi(x)) = \Phi'_u(x, \varphi(x))\, g(x, \varphi(x)).$$

3. С учетом неравенства (107), получаем

$$\varphi'(x) f(x, \varphi(x)) = g(x, \varphi(x)), \quad x \in G,$$

следовательно, φ — решение уравнения (105). $\rhd$

II. Утверждение леммы 134 обратимо в следующем смысле.

Лемма 135. *Если $f, g \in \mathrm{C}^1(H)$, а функция $\varphi \in \mathrm{C}^1(G)$ — решение уравнения* (105), *то поверхность $u = \varphi(x)$ инвариантна для системы* (106).

$\lhd$ Действительно, если $u_0 = \varphi(x_0)$, то на поверхности $u = \varphi(x)$ лежит обязательно целиком любая кривая $(\mathsf{x}, \mathsf{u}) \in S(H)$, удовлетворяющая при $t \in D(\mathsf{x}, \mathsf{u})$ условиям

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = f(\mathsf{x}(t), \varphi(\mathsf{x}(t))), \quad \mathsf{x}(t_0) = x_0,$$
$$\mathsf{u}(t) = \varphi(\mathsf{x}(t)),$$

а значит, и условиям

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = f(\mathsf{x}(t), \mathsf{u}(t)), \quad \mathsf{x}(t_0) = x_0,$$
$$\dot{\mathsf{u}}(t) = \varphi'(\mathsf{x}(t))\, f(\mathsf{x}(t), \mathsf{u}(t)) = g(\mathsf{x}(t), \mathsf{u}(t)), \quad \mathsf{u}(t_0) = \varphi(\mathsf{x}(t_0)) = u_0,$$

и, стало быть, являющаяся характеристикой, проходящей через точку (x_0, u_0). $\rhd$

8.4. Решение задачи Коши

ищется для квазилинейного уравнения (105) только тогда, когда график начальной функции φ_0 (из начального условия (104)) лежит в области H, что и предполагается, как и то, что поверхность $S = \sigma(D)$ задана координатами $y \in D \subset \mathbf{R}^{n-1}$. Справедлива следующая *локальная теорема существования и единственности* решения этой задачи.

Теорема 136. *Если* $f, g \in \mathrm{C}^1(H)$, $\varphi_0 \in \mathrm{C}^1(S)$, $x_0 \equiv \sigma(y_0) \in S$, $u_0 = \varphi_0(x_0)$ *и векторы*

$$\sigma'_{y_1}(y_0), \ldots, \sigma'_{y_{n-1}}(y_0), f(x_0, u_0)$$

— линейно независимы, то в некоторой окрестности G *точки* x_0 *существует единственное решение задачи Коши* (105) — (104).

$\lhd$ 1. В силу теоремы 132 в некоторой окрестности $H' \subset H$ точки (x_0, u_0) существует первый интеграл Φ системы[7] (106), удовлетворяющий начальному условию

$$\Phi(x, u) = u - \varphi_0(x), \quad (x, u) \in \overline{S},$$

[7] В теореме, правда, утверждается существование решения соответствующего линейного однородного уравнения в частных производных, что, согласно следствию 130, то же самое.

где

$$\overline{S} \equiv \{(x,u) \in H|\ x = \sigma(y),\ (y,u) \in \overline{D} \subset D \times \mathbf{R}\} \ni (x_0, u_0),$$

причем векторы

$$\begin{aligned} (\sigma(y),u)'_{y_i}\big|_{(y_0,u_0)} &= (\sigma'_{y_1}(y_0),0), \quad i = 1,\ldots,n-1, \\ (\sigma(y),u)'_u\big|_{(y_0,u_0)} &= (0,1) \quad \text{и} \quad (f(x_0,u_0), g(x_0,u_0)) \end{aligned}$$

— линейно независимы (в обнуляющейся нетривиальной линейной комбинации этих векторов, судя по их первым компонентам, обязан отсутствовать последний вектор, но присутствовать — предпоследний, который однако, судя по вторым компонентам, не может в ней содержаться).

2. Так как

$$\Phi'_u(x_0,u_0) = 1 \neq 0,$$

можно без ограничения общности считать выполненным неравенство

$$\Phi'_u(x,u) \neq 0, \quad (x,u) \in H'$$

(если нужно, уменьшим окрестность H точки (x_0,u_0) и снова применим к ней теорему 132, от чего область H' уменьшится, но значения функции Φ в ней сохранятся).

3. По лемме 134 равенство $\Phi(x,u) = 0$ в области H' неявно задает решение φ задачи Коши для уравнения (105), определенное в окрестности G точки x_0 (так как $\Phi(x_0, \varphi_0(x_0)) = \Phi(x_0,u_0) = 0$) и удовлетворяющее начальному условию (104)), поскольку при $x \in S \cap G$ имеем $(x,\varphi(x)) \in \overline{S}$ и

$$0 = \Phi(x,\varphi(x)) = \varphi(x) - \varphi_0(x).$$

4. Найденное решение задачи Коши в области G единственно в силу следствия 133, так как любое решение φ этой задачи по лемме 135 задает инвариантную для системы (106) в области H' поверхность $u = \varphi(x)$, имеющую заданный след $u = \varphi_0(x)$ на гиперповерхности $\overline{S}$, а значит, однозначно определенную. $\triangleright$

8.5. Задачи для самостоятельного решения

I. Как изменятся характеристики линейного однородного уравнения (103), если заменить их характеристиками того же уравнения, рассмотренного как частный случай квазилинейного уравнения (105)?

II. Как выглядит линейное однородное уравнение в частных производных, характеристики которой задаются системой (106)?

III. Сформулировать и доказать аналогичное следствию 131 утверждение об общем решении уравнения (105).

IV. Какой геометрический смысл имеет условие линейной независимости векторов в формулировке теоремы 136 в терминах характеристик уравнения (105)?

V. Можно ли в условиях теоремы 104 (или 136) утверждать дополнительно, что в любой подобласти $G'' \subset G'$ (или, соответственно, $G' \subset G$) решение задачи Коши — единственно?

VI. Для уравнения

$$xu'_x - yu'_y = 0, \quad x, y > 0,$$

найти все решения задачи Коши и определить их количество:
a) $u = x$ при $y = x$;
b) $u = x$ при $y = 1/x$;
c) $u = 1$ при $y = 1/x$.

VII. Доказать, что если область $G \subset \mathbf{R}^2$ односвязна и $M, N \in \mathrm{C}^2(G)$, то функция $\mu \in \mathrm{C}^1(G)$ — *интегрирующий множитель* для уравнения в дифференциалах

$$N(x,y)\,dy = M(x,y)\,dx, \quad (x,y) \in G,$$

(т. е. уравнение

$$\mu(x,y)N(x,y)\,dy = \mu(x,y)M(x,y)\,dx, \quad (x,y) \in G, \tag{109}$$

— есть уравнение в полных дифференциалах; см. п. 1.7) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению

$$N(x,y)u'_x - M(x,y)u'_y = u\left(M'_y(x,y) - N'_x(x,y)\right), \quad (x,y) \in G;$$

более того, локально в любой точке $(x_0, y_0) \in G$ интегрирующий множитель существует и определяется с точностью до множителя вида $F(\Phi(x,y))$, где Φ — потенциал уравнения (14).

Сергеев Игорь Николаевич
Лекции по дифференциальным уравнениям. II семестр
Учебное пособие

Оригинал макет изготовлен издательской группой механико-математического факультета МГУ

Подписано в печать 28.4.2004 г.
Формат 60×90/16
Объем 4 п. л.
Заказ 2
Тираж 150 экз.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, г. Москва, Воробьевы горы.
Лицензия на издательскую деятельность ИД №04059 от 20.2.2001

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета и Франко-русского центра им. А. М. Ляпунова