МИФИ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)

Е.Б. Сандаков

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Москва 2005

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е.Б. Сандаков

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

МОСКВА 2005

УДК 514.12(075)+512.64(075)
ББК 22.151.5я7+22.143я7
С 18

Сандаков Е.Б. *Основы аналитической геометрии и линейной алгебры:* учебное пособие. М.: МИФИ, 2005.– 308 с.

Данное учебное пособие «Основы аналитической геометрии и линейной алгебры» предназначено для студентов МИФИ первого курса всех специальностей.

Оно полностью соответствует программе курса "Аналитическая геометрия и линейная алгебра", предусмотренного для технических и экономических вузов с углубленным изучением высшей математики, такими как МИФИ.

В данном пособии рассматривается большое число примеров, которые способствуют лучшему усвоению студентами данного материала.

Кроме того, в конце каждой главы приводится список задач для самостоятельного решения, которые помогут читателю проконтролировать свои знания.

В основу данной книги положены пособия [1]– [3] (см. список литературы). Работы [4]–[12] рекомендуются для дополнительного чтения по данному курсу.

За помощь в оформлении книги выражаю благодарность Сандакову А.Е.

В пособии для сокращения записи использованы некоторые специальные символы, которые обозначают:

$\Rightarrow$ – следует;

$\Leftrightarrow$ – тогда и только тогда (необходимо и достаточно);

R – множество действительных чисел;

C – множество комплексных чисел;

\# – конец доказательство или его отсутствие

Рекомендовано редсоветом МИФИ в качестве учебного пособия

ISBN 5–7262–0619–3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Понятие вектора. Операции сложения и умножения векторов на число и их свойства

1. Понятие вектора. Операции сложения и умножения на число

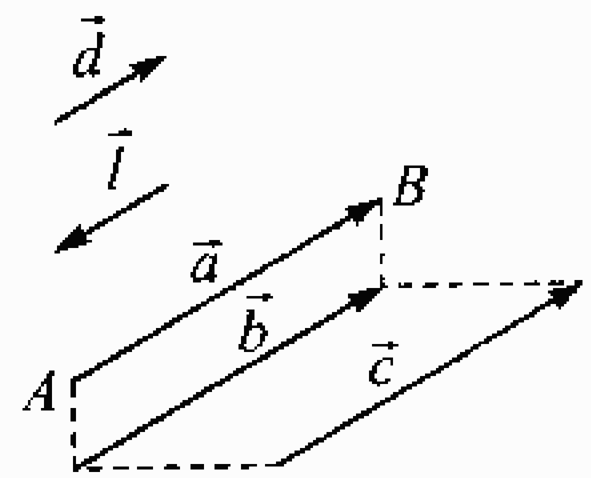

Рис. 1

Определение 1.1. Отрезок ненулевой длины будем называть направленным, если указано, какая из ограничивающих его точек является первой и какая – второй. Первая точка называется началом, а вторая – концом, и направление от начала к концу указывается стрелкой (на рис. 1, A – начало, B – конец отрезка).

Определение 1.2. Векторами (иначе геометрическими векторами, или свободными векторами) называются направленные отрезки, для которых по правилам, указанным ниже, введены понятия равенства, нулевого и противоположного векторов, а также определены операции сложения векторов и умножения векторов на действительные числа.

Вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$ (A – начало, B – конец вектора) или $\vec{a}$ (см. рис. 1).

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными $(\vec{a}=\vec{b})$, если один из них может быть получен из другого с помощью параллельного переноса. На рис. 1 $\vec{a}=\vec{b}$, $(\vec{b}=\vec{c})$. Заметим, что так введенное определение равенства векторов удовлетворяет следующим свойствам:

1) $(\vec{x}=\vec{x})$ (рефлексивность);

2) если $\vec{x}=\vec{y}$, то $\vec{y}=\vec{x}$ (симметричность);

3) если $\vec{x}=\vec{y}$, $\vec{y}=\vec{z}$ то $\vec{x}=\vec{z}$ (транзитивность).

Два вектора называются одинаково направленными (противоположно направленными), если приведенные к общему началу, они располагаются на прямой и их концы принадлежат этой прямой и лежат по одну (по разные стороны) от начала. На рис. 1 $\vec{a}$ и $\vec{d}$ одинаково направлены, а $\vec{d}$ и $\vec{l}$ противоположно направлены.

Обозначения: $\vec{x}\uparrow\uparrow\vec{y}$, если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ одинаково направлены; $\vec{x}\uparrow\downarrow\vec{y}$, если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ противоположно направлены.

Длина направленного отрезка, изображающего вектор, называется длиной вектора (иначе, абсолютной величиной или модулем вектора). Модуль векторов $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ обозначается так: $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$. При этом для любого вектора $\vec{x}$ действительное число $|\vec{x}|\geq 0$.

Нулевым вектором $\vec{0}$ называется вектор, у которого начало совпадает с концом. Очевидно, $\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow|\vec{x}|=\vec{0}$.*

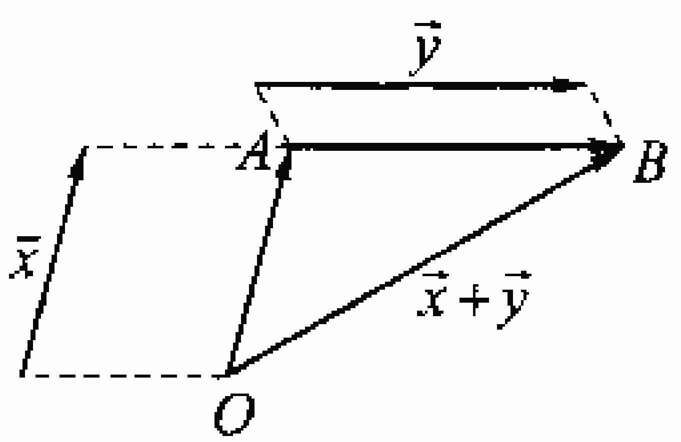

Рис. 2

Суммой двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называется вектор $\vec{x}+\vec{y}$, который получается из $\vec{x}$ и $\vec{y}$ (или им равных) по следующему правилу (рис. 2): от произвольной точки *O* откладывают вектор $\vec{x}$, от конца *A* отложенного вектора откладывают вектор $\vec{y}$, если *B* есть конец вектора $\vec{y}$, то $\vec{x}+\vec{y}=\overrightarrow{OB}$. Указанный способ построения суммы называется правилом треугольника. Сумма не зависит от выбора начальной точки *O*.

Вектор $(-\vec{x})$ называется противоположным к $\vec{x}$, если они имеют одинаковую длину и противоположно направлены, т.е. $|-\vec{x}|=|\vec{x}|$ и $(-\vec{x})\downarrow\uparrow\vec{x}$.

Произведением вектора $\vec{x}\neq 0$ на действительное число $\lambda\neq 0$ $(\lambda\in R)$ называется вектор $\lambda\vec{x}=\vec{x}\lambda$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $|\lambda\vec{x}|=|\lambda||\vec{x}|$;

б) при $\lambda>0$ $(\lambda\vec{x})\uparrow\uparrow\vec{x}$, при $\lambda<0$ $(\lambda\vec{x})\uparrow\downarrow\vec{x}$.

Если $\vec{x}=\vec{0}$ или $\lambda=0$, то $\lambda\vec{x}=\vec{0}$.

*Считаем, что нулевой вектор не имеет определенного направления.

2. Основные свойства сложения векторов и умножения их на число

Теорема 1.1 (основные свойства). Пусть $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ – любые векторы, а λ и μ – любые числа, λ и $\mu\in\boldsymbol{R}$. Тогда

$\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ – (коммутативность); (1.1)

$\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$ – (ассоциативность); (1.2)

$\exists\vec{0}$ (нуль вектор): $\forall\vec{x}$ $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$; (1.3)

$\forall\vec{x}\,\exists$ вектор $(-\vec{x})$ – противоположный:

$\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$; (1.4)

$\vec{x}=1\cdot\vec{x}$; (1.5)

$\forall\vec{x},\ \forall\lambda,\ \mu\in\boldsymbol{R}:\lambda(\mu\vec{x})=(\lambda\mu)\vec{x}$; (1.6)

$\forall\vec{x},\ \forall\lambda,\ \mu\in\boldsymbol{R}:(\lambda+\mu)\vec{x}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$; (1.7)

$\forall\vec{x},\ \vec{y},\ \forall\lambda\in\boldsymbol{R}:\lambda(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$. (1.8)

Доказательство. Свойства (1.1)–(1.8) следуют из определений и рис. 3–5.

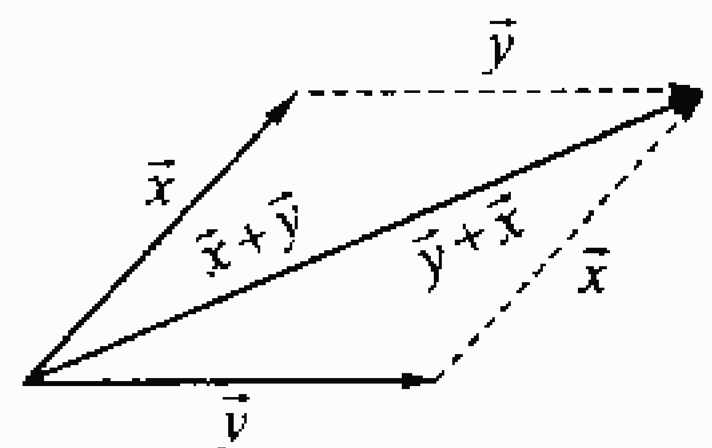

Рис. 3

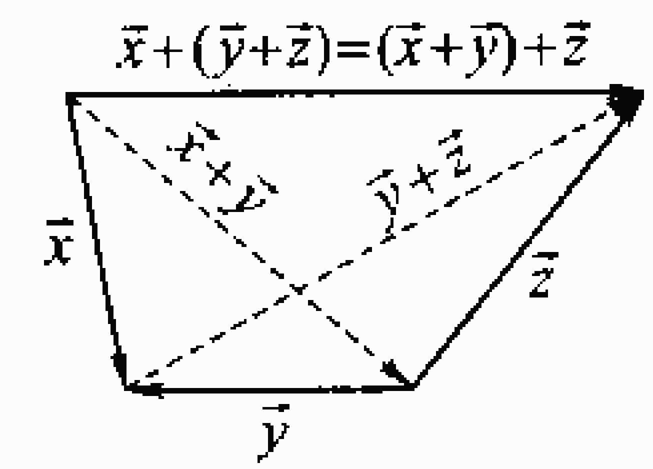

Рис. 4

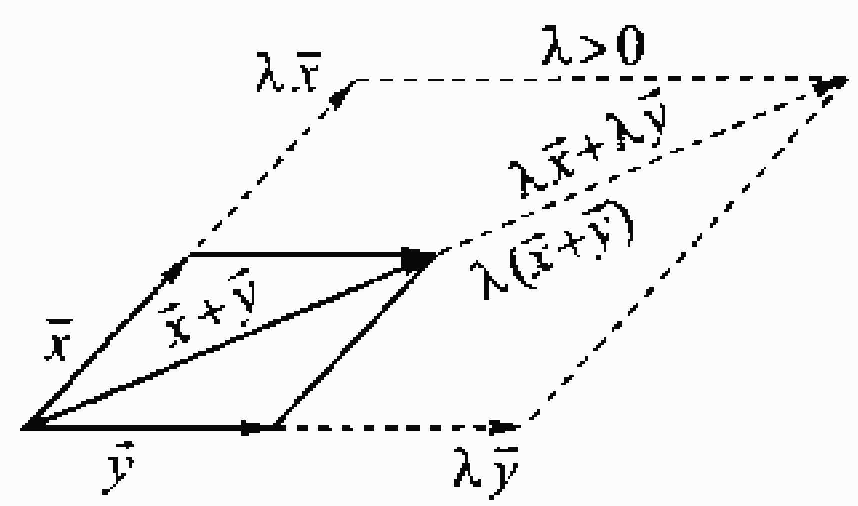

Рис. 5

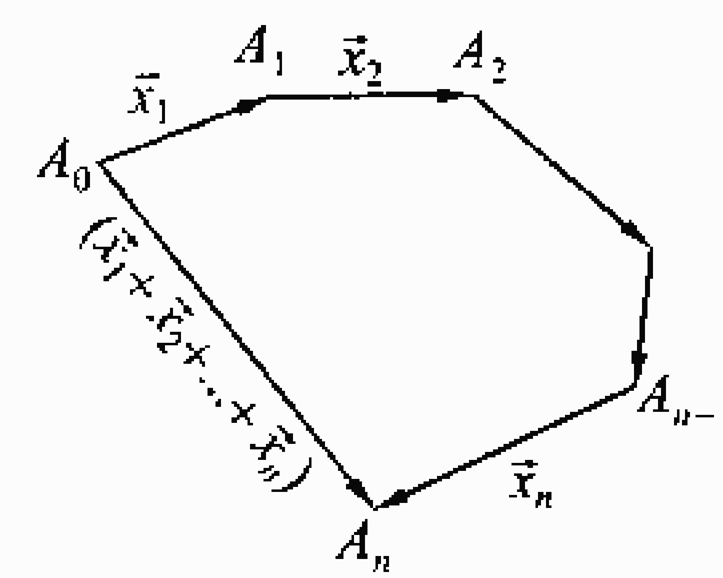

Рис. 6

Следствие 1.1: $(-\vec{x})=(-1)\vec{x}$;

Следствие 1.2: $\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_0A_n}$ (рис. 6);

Следствие 1.3: сложение векторов определяется по правилу параллелограмма (см. рис. 3).

Разностью векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называется вектор $\vec{x}+(-\vec{y})$, который обозначается как $\vec{x}-\vec{y}$.

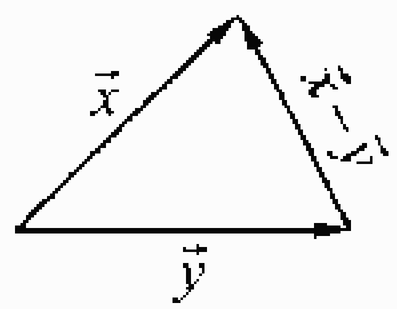

Рис. 7

Отметим, что $\vec{z}=\vec{x}-\vec{y}\Leftrightarrow\vec{z}+\vec{y}=\vec{x}$. Геометрически $\vec{x}-\vec{y}$ получается из $\vec{x}$ и $\vec{y}$ (или им равных), как указано на рис. 7.

Замечание 1.1. У векторов, которые рассматриваем, начальные точки выбраны произвольно (т.е. не различаем равные вектора, получающиеся друг из друга параллельным переносом). Такие векторы иногда называют «скользящими» векторами. (Они определены с точностью до точки приложения при параллельном «скольжении».) Часто в физике, механике и т.д. рассматривают «связные» векторы, т.е. векторы, общая начальная точка приложения для которых фиксирована.

Определение 1.3. Множество V называется линейным пространством свободных векторов (ЛПСВ), если:

1) для $\forall\vec{x}$, $\vec{y}\in V$ определен элемент $\vec{x}+\vec{y}\in V$, называемый суммой векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$;

2) для $\forall\vec{x}\in V$ и $\forall\lambda\in\boldsymbol{R}$ определен $\lambda\vec{x}\in V$, называемый произведением вектора $\vec{x}$ на число λ;

3) для $\forall\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}\in V$ и $\forall\lambda$, $\mu\in\boldsymbol{R}$ в множестве V выполняются свойства (1.1)–(1.8).

Укажем примеры линейных пространств свободных векторов.

Пример 1.1. Подмножество V_0, состоящее из одного нулевого вектора, очевидно, является ЛПСВ.

Пример 1.2. Подмножество V_1 всех свободных векторов, параллельных некоторой прямой, является ЛПСВ (условия 1.1–1.8 определения ЛПСВ легко проверяются).

Пример 1.3. Подмножество V_2 всех свободных векторов, параллельных некоторой плоскости, является ЛПСВ (условия 1.1–1.8 легко проверяются).

Пример 1.4. Множество V_3 всех свободных векторов в пространстве, очевидно, является ЛПСВ.

Укажем примеры множеств векторов, по той или иной причине не являющихся ЛПСВ.

Пример 1.5. Множество всех свободных векторов пространства за исключением векторов параллельных некоторой фиксированной прямой l (так как в пределах этого множества нельзя складывать векторы, симметричные относительно указанной прямой).

Пример 1.6. Множество $\boldsymbol{X}$ всех векторов пространства, имеющих общее начало, концы которых лежат на фиксированной прямой l, не проходящей через начало координат (так как нулевой вектор не принадлежит множеству $\boldsymbol{X}$).

§ 2. Теоремы разложения. Линейная зависимость и независимость векторов

1. Коллинеарные и компланарные векторы. Теоремы разложения векторов

Определение 1.4. Векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$,... называются коллинеарными (обозначаем $\vec{x}\parallel\vec{y}$), если все они параллельны одной прямой. Векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$,... называются компланарными, если все они параллельны одной плоскости.

Из определения следуют следующие очевидные утверждения:

1) нулевой вектор коллинеарен любому вектору;

2) каждый вектор $\vec{x}$ коллинеарен самому себе;

3) если $\vec{x}\parallel\vec{y}$, то и $\vec{y}\parallel\vec{x}$;

4) если $\vec{x}\parallel\vec{y}$ и $\vec{y}\parallel\vec{z}$, то $\vec{x}\parallel\vec{z}$;

5) если несколько векторов коллинеарны между собой, то они и подавно компланарны между собой;

6) любые два вектора компланарны между собой.

Имеют место следующие важные теоремы.

Теорема 1.2 (о разложении). Для $\forall$ вектора $\vec{a}$, коллинеарного любому вектору $\vec{l}_1\neq\vec{0}$ $\exists$ единственное число $\lambda_1\in\boldsymbol{R}$: $\vec{a}=\lambda_1\vec{l}_1$.

Теорема 1.3. Для $\forall$ вектора $\vec{a}$, компланарного $\forall$ двум неколлинеарным векторам $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$, $\exists$ единственные числа λ_1, $\lambda_2\in\boldsymbol{R}$: $\vec{a}=\lambda_1\vec{l}_1+\lambda_2\vec{l}_2$.

Теорема 1.4. Для $\forall$ вектора $\vec{a}$ и $\forall$ трех некомпланарных векторов $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$ $\exists$ единственные числа λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \boldsymbol{R}$:

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{l}_1 + \lambda_2\vec{l}_2 + \lambda_3\vec{l}_3.$$

Доказательство теоремы 1.2. Предполагая для $\forall\vec{a}$ существование представления $\vec{a} = \lambda_1\vec{l}_1$ (где $\vec{l}_1 \neq 0$), покажем его единственность.

Пусть существует еще одно представление $\vec{a} = \lambda_1'\vec{l}_1$.

Вычитая одно представление из другого, получаем $(\lambda_1 - \lambda_1')\vec{l}_1 = \vec{0}$. Так как $\vec{l}_1 \neq \vec{0}$, то $\lambda_1 = \lambda_1'$. Тем самым единственность представления доказана. Далее, если $\vec{l}_1$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$ одинаково направлены, то этим единственным числом, как следует из определения умножения вектора на число, является число $\lambda_1 = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{l}_1|}$ (рис. 8). Если же $\vec{l}_1$ и $\vec{a}$ противоположно направлены, то этим единственным числом по той же причине является число $\lambda_1 = -\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{l}_1|}$. Если же $\vec{a} = \vec{0}$, то этим единственным числом является $\lambda_1 = 0$.

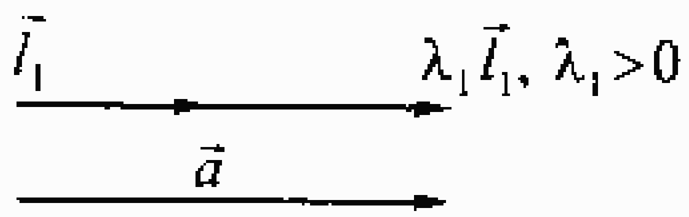

Рис. 8

Доказательство теоремы 1.3. Если вектор $\vec{a}$ коллинеарен одному из векторов $\vec{l}_1$ или $\vec{l}_2$, то из 1) $\Rightarrow$ 2).

Пусть теперь $\vec{a}$ не коллинеарен ни одному из векторов $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$. Приведем векторы $\vec{a}$, $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ к общему началу O. Проведем через точку M (конец вектора $\vec{a}$) прямые, параллельные векторам $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$. Обозначим через E_1 и E_2 точки пересечения указанных прямых с прямыми, на которых лежат векторы $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ (рис. 9) соответственно. (Существование точек E_1 и E_2 следует из того, что $\vec{l}_1 \nparallel \vec{l}_2$.) В силу правила параллелограмма сложения векторов получим $\vec{a} = \overrightarrow{OE}_1 + \overrightarrow{OE}_2$.

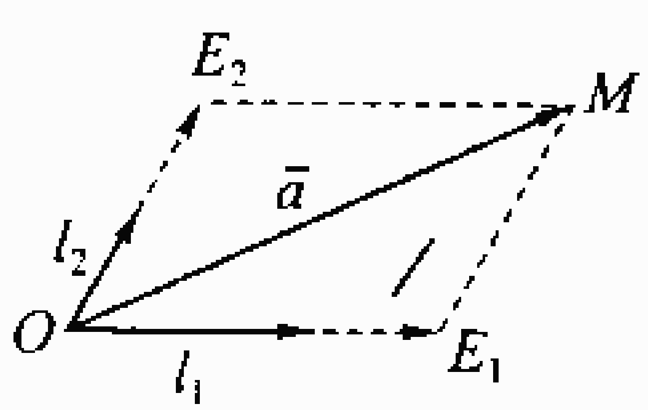

Рис. 9

Из теоремы 1.2 следует, что существует $\lambda_1 \in \boldsymbol{R}$: $\overrightarrow{OE}_1 = \lambda_1\vec{l}_1$ и существует $\lambda_2 \in \boldsymbol{R}$: $\overrightarrow{OE}_2 = \lambda_2\vec{l}_2$. Таким образом, получим:

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{l}_1 + \lambda_2\vec{l}_2.$$

Покажем единственность этого представления. Для этого предположим, что существует еще другое представление:

$$\vec{a} = \lambda_1'\vec{l}_1 + \lambda_2'\vec{l}_2$$

(для определенности предположим, что $\lambda_1 \neq \lambda_1'$). Вычитая из одного представления другое, получаем $(\lambda_1 - \lambda_1')\vec{l}_1 = (\lambda_2 - \lambda_2')\vec{l}_2$ или (так как $\lambda_1 - \lambda_1' \neq O$) $\vec{l}_1 = \dfrac{\lambda_2' - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_1'}\vec{l}_2$. Следовательно, согласно определению умножения вектора на число получаем $\vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2$, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие и доказывает единственность представления.

Доказательство теоремы 1.4. Если вектор $\vec{a}$ компланарен какимнибудь двум векторам из тройки $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$, то из теоремы 1.3 $\Rightarrow$ теорема 1.4. Пусть теперь $\vec{a}$ некомпланарен ни с какой парой векторов из тройки $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$. Приведем векторы $\vec{a}$, $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$ к общему началу O (рис. 10) и проведем через точку M (конец вектора $\vec{a}$) плоскости, параллельные плоскостям, определяемым парами векторов $\vec{l}_1\vec{l}_2$, $\vec{l}_1\vec{l}_3$ и $\vec{l}_2\vec{l}_3$. Точки пересечения указанных плоскостей с прямыми, на которых лежат векторы $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$, обозначим соответственно через E_1, E_2, E_3 (существование точек E_1, E_2, E_3 вытекает из того, что векторы $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$, некомпланарны). В силу правила параллелограмма сложения векторов имеем $\vec{a} = \overrightarrow{OE}_3 + \overrightarrow{OM}_O$. Из теоремы 1.2 следует, что су-

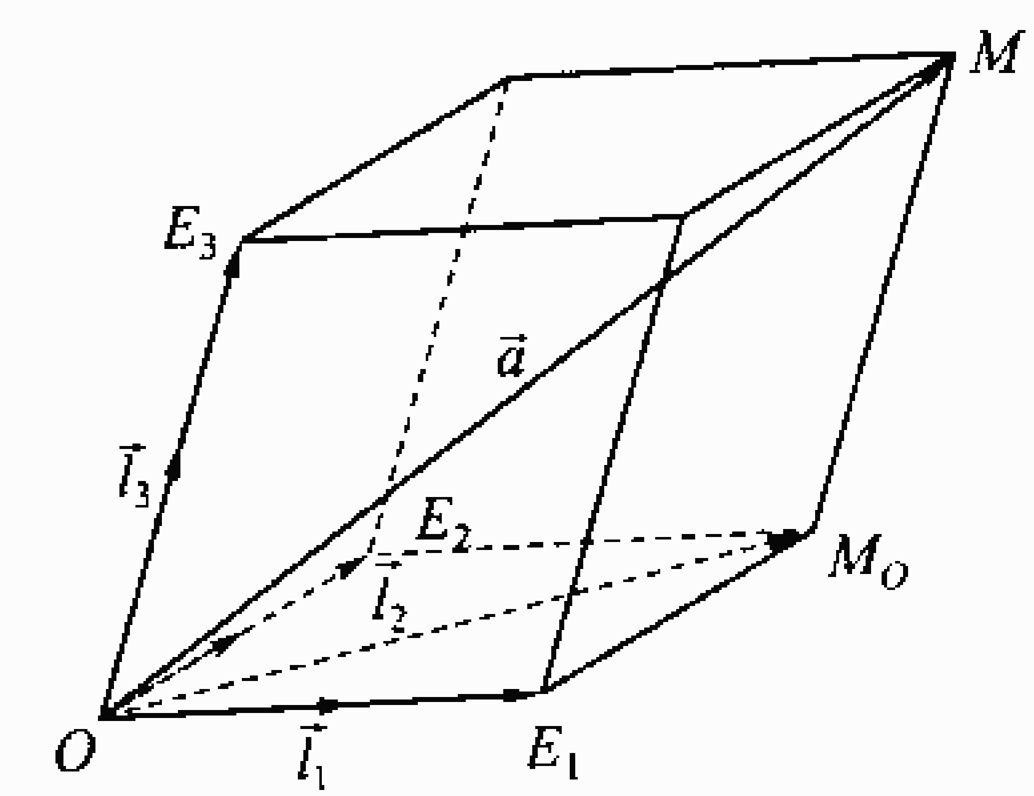

Рис. 10

ществует $\lambda_3 \in \boldsymbol{R}$: $\overline{OE_3} = \lambda_3 \vec{l}_3$, а из теоремы 1.3 следует, что существуют числа λ_1, $\lambda_2 \in \boldsymbol{R}$: $\overrightarrow{OM}_O = \lambda_1 \vec{l}_1 + \lambda_2 \vec{l}_2$. Следовательно, получаем $\vec{a} = \lambda_1 \vec{l}_1 + \lambda_2 \vec{l}_2 + \lambda_3 \vec{l}_3$. Покажем единственность этого представления. Для этого предположим, что существует еще другое представление $\vec{a} = \lambda_1' \vec{l}_1 + \lambda_2' \vec{l}_2 + \lambda_3' \vec{l}_3$ (для определенности предположим, что $\lambda_1 \neq \lambda_1'$). Вычитая из одного представления другое, получаем

$$(\lambda_1 - \lambda_1')\vec{l}_1 = (\lambda_2' - \lambda_2)\vec{l}_2 + (\lambda_3' - \lambda_3)\vec{l}_3 .$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_1'$ то $\vec{l}_1 = \dfrac{\lambda_2' - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_1'} l_2 + \dfrac{\lambda_3' - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_1'} l_3$.

Отсюда в силу правила сложения двух векторов следует, что $\vec{l}_1$ лежит в плоскости, определяемой векторами $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$. Следовательно, векторы $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$ компланарны, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие и доказывает единственность представления. #

2. Линейная зависимость и независимость векторов

Рассмотрим линейное пространство свободных векторов V (например, V_m, где $m = 1, 2, 3$ – фиксированное).

Определение 1.5. Векторы a_1, $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ из V называются линейно независимыми в V, если для $\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \boldsymbol{R}$ из равенства

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}$$

следует $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Векторы a_1, $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ из V называются линейно зависимыми в V, если $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \boldsymbol{R}$ не все одновременно равные нулю $(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_k| \neq 0)$, такие, что

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0} .$$

Определение 1.6. Если a_1, $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in V$ и $\exists \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in \boldsymbol{R}$:

$$\vec{a} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \ldots + \beta_k \vec{a}_k ,$$

то говорят, что вектор $\vec{a}$, есть линейная комбинация векторов a_1, $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ из V.

Теорема 1.5 (критерий линейной зависимости). Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ из V линейно зависимы в $V \Leftrightarrow$ один из них есть линейная комбинация остальных.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть a_1, $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ линейно зависимы. Тогда $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \boldsymbol{R}$ $(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_k| \neq 0$, без ограничения общности можно считать $\alpha_1 \neq 0)$, такие, что

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0},$$

или $\vec{a}_1 = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \ldots + \beta_k \vec{a}_k$, где $\beta_2 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}, \ldots, \beta_k = -\dfrac{\alpha_k}{\alpha_1}$.

$\Leftarrow$ Пусть, например (без ограничения общности), $\vec{a}_1$ является линейной комбинацией остальных, т.е.

$$\vec{a}_1 = \beta_2 \vec{a}_2 + \ldots + \beta_k \vec{a}_k .$$

Тогда $(-1)\vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \ldots + \beta_k \vec{a}_k = \vec{0}$, где $\alpha_1 = (-1) \neq 0$, $\alpha_2 = \beta_2, \ldots,$ $\alpha_k = \beta_k$, т.е. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ линейно зависимы в V. #

Из определений, теоремы разложения и критерия линейной зависимости получаем:

Вывод 1. Линейно зависимыми векторами в V_1 – «прямой», V_2 – «плоскости», V_3 – «пространстве» являются соответственно: в V_1 – нулевой вектор $\vec{0}$, в V_2 – любые два коллинеарных вектора, в V_3 – любые три компланарных вектора.

2. Линейно независимыми векторами в V_1, V_2, V_3 соответственно являются: в V_1 – любой ненулевой вектор, в V_2 – любые два неколлинеарных вектора, в V_3 – любые три некомпланарных вектора.

3. В V_m ($m = 1, 2, 3$) существует m линейно независимых векторов, причем любые ($m + 1$) векторов линейно зависимы в V_m.

§ 3. Базис и размерность линейного пространства свободных векторов. Координаты вектора в данном базисе

1. Основные определения

Пусть V – линейное пространство свободных векторов (например, V_m, где $m = 1, 2, 3$ фиксированное).

Определение 1.7. Векторы $\vec{l}_1, \vec{l}_2, ..., \vec{l}_n$ из V называются базисом V, если $\vec{l}_1, \vec{l}_2, ..., \vec{l}_n$ – линейно независимы в V и для $\forall\, \vec{x} \in V\ \exists\, x_1, ..., x_n \in \boldsymbol{R}$:

$$\vec{x} = x_1 \vec{l}_1 + x_2 \vec{l}_2 + ... + x_n \vec{l}_n .$$

Указанное равенство называется разложением вектора $\vec{x} \in V$ по базису $\vec{l}_1, \vec{l}_2, ..., \vec{l}_n$ из V.

Лемма 1.1. Для любого вектора $\vec{x} \in V$ разложение его по базису $\vec{l}_1, \vec{l}_2, ..., \vec{l}_n$ из V единственно.

Доказательство. Если предположить, что существует еще одно разложение $\vec{x} = x_1' \vec{l}_1 + ... + x_n' \vec{l}_n$, тогда $\vec{0} = \vec{x} - \vec{x} = (x_1 - x_1')\vec{l}_1 + ... + (x_n - x_n')\vec{l}_n$.

В силу линейной независимости векторов $\vec{l}_1, \vec{l}_2, ..., \vec{l}_n$ имеем $x_1 - x_1' = 0, ..., x_n - x_n' = 0$, т.е. $x_1 = x_1', ..., x_n = x_n'$. #

Определение 1.8. Числа $x_1, ..., x_n$ в разложении $\vec{x} = x_1' \vec{l}_1 + ... + x_n \vec{l}_n$ вектора $\vec{x} \in V$ по базису $\vec{l}_1, \vec{l}_2, ..., \vec{l}_n$ из V называют координатами вектора $\vec{x}$ относительно базиса $\vec{l}_1, \vec{l}_2, ..., \vec{l}_n$ из V. Число n-базисных векторов называют размерностью V, обозначают $\dim V = n$.

Из результатов предыдущего параграфа следует.

Вывод 1.2. Пусть V_1, V_2, V_3 – линейное пространство свободных векторов, расположенных соответственно на «заданной прямой», «заданной плоскости», в «пространстве». Тогда

1) $\forall\, \vec{l}_1 \neq 0$, $\vec{l}_1 \in V$ образует базис V_1, $\dim V_1 = 1$;

2) $\forall$ два неколлинеарных вектора $(\vec{l}_1 \not\parallel \vec{l}_2)$ $\vec{l}_1, \vec{l}_2$ образуют базис V_2, $\dim V_2 = 2$;

3) $\forall$ три некомпланарных вектора $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3 \in V_3$ образуют базис V_3, $\dim V_3 = 3$;

Замечание 1.2. Из вывода следует, что «заданная прямая» одномерна, «заданная плоскость» двумерна, «пространство» в обычном понимании трехмерно.

Определение 1.9. Базис $\vec{l}_1, \vec{l}_2, ..., \vec{l}_n$ из V называется ортонормированным базисом (ОНБ), если векторы $\vec{l}_1, \vec{l}_2, ..., \vec{l}_n$ попарно ортогональны (перпендикулярны) и по модулю равны единице. Если базис произвольный, то он называется косоугольным или аффинным.

2. Координатная запись сложения векторов и умножения вектора на число

Все рассмотрения приведем в линейном пространстве свободных векторов V_3 (для V_1, V_2 все рассуждения проводятся аналогично).

Пусть $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ – базис V_3. Тогда для $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in V_3$ имеем единственное разложение по базису:

$$\vec{x} = x_1 \vec{l}_1 + x_2 \vec{l}_2 + x_3 \vec{l}_3, \quad \vec{y} = y_1 \vec{l}_1 + y_2 \vec{l}_2 + y_3 \vec{l}_3$$

или кратко

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{l}_i , \quad \vec{y} = \sum_{i=1}^{3} y_i \vec{l}_i .$$

Из свойств сложения векторов и умножения вектора на вещественное число имеем

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 \vec{l}_1 + x_2 \vec{l}_2 + x_3 \vec{l}_3) + (y_1 \vec{l}_1 + y_2 \vec{l}_2 + y_3 \vec{l}_3) =$$
$$= (x_1 + y_1)\vec{l}_1 + (x_2 + y_2)\vec{l}_2 + (x_3 + y_3)\vec{l}_3 .$$

или кратко

$$\vec{x} + \vec{y} = \sum_{j=1}^{3} x_j \vec{l}_j + \sum_{j=1}^{3} y_j \vec{l}_j = \sum_{j=1}^{3} (x_j + y_j)\, \vec{l}_j .$$

Аналогично, для $\forall\, \lambda \in \boldsymbol{R}$

$$\lambda \vec{x} = \lambda (x_1 \vec{l}_1 + x_2 \vec{l}_2 + x_3 \vec{l}_3) = (\lambda x_1)\vec{l}_1 + (\lambda x_2)\vec{l}_2 + (\lambda x_3)\vec{l}_3 ,$$

или кратко

$$\lambda \vec{x} = \lambda \sum_{j=1}^{3} x_j \vec{l}_j = \sum_{j=1}^{3} (\lambda x_j) \vec{l}_j .$$

Итак, в силу единственности разложения по базису, получаем следующее правило 1.1: при сложении любых векторов линейного пространства свободных векторов V их координаты относительно любого базиса V складываются, а при умножении вектора на любое число $\lambda \in \boldsymbol{R}$ все координаты этого вектора умножаются на число λ.

3. Аффинные и декартовые системы координат

Определение 1.10. Аффинной системой координат в пространстве V_m (m – фиксировано, m = 1, 2, 3) называется совокупность m базисных векторов, отнесенных к общему началу 0 (0 – называется началом координат).

Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат. (В пространстве V_3 первая ось называется осью абсцисс, вторая – осью ординат, третья – осью аппликат). Плоскости (в V_3), проходящие через оси координат, называются координатными плоскостями.

Определение 1.11. Декартовая прямоугольная система координат в V_m (m = 1, 2, 3) есть совокупность ОНБ и начала координат.

Замечание 1.3. В случае декартовой прямоугольной системы координат в V_3 базисные векторы единичной длины $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ принято обозначать буквами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (в V_2 соответственно буквами $\vec{i}, \vec{j}$).

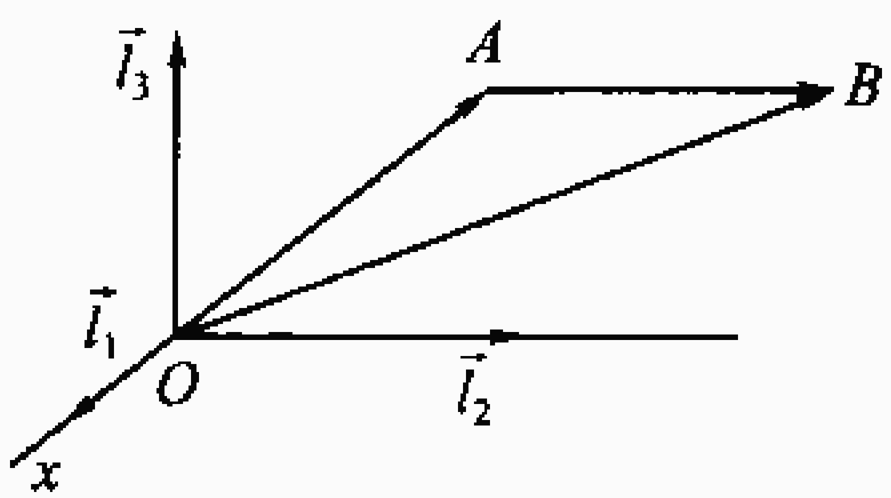

Рис. 11

Определение 1.12. Аффинными (декартовыми прямоугольными) координатами точки A называются координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ относительно базиса $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ (рис. 11).

В пространстве V_3 рассмотрим две точки A и B, координаты которых относительно некоторой аффинной системы координат 0, $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ соответственно равны (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2). Поставим задачу найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Очевидно $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (см. рис. 11). По определению аффинных координат точки $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$.

Тогда согласно правилу 1.1 из предыдущего пункта (см. § 3, п. 2) $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}$. Таким образом, получено следующее правило.

Правило 1.2. Чтобы найти координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.

Замечание 1.4. Аналогичным образом это правило может быть получено и для пространств V_1 и V_2.

§ 4. Скалярное произведение векторов

1. Проекция вектора на ось и ее свойства

Осью называется прямая, на которой указано направление. Направление оси задается указанием ненулевого вектора $\vec{l}$, параллельного (принадлежащего) данной прямой (см. рис. 12).

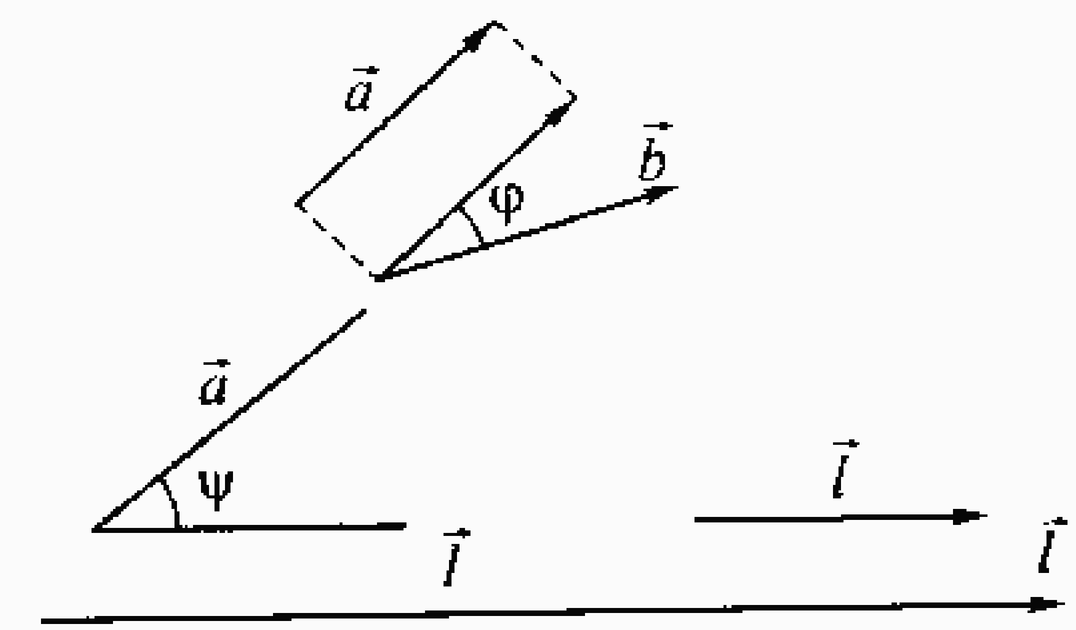

Рис. 12

Углом φ между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется, если не оговорено особо, величина наименьшего угла между равными им векторами, приведенными к общему началу (рис. 12).

Обозначение: $\varphi = (\widehat{\vec{a}\vec{b}})$ или $\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}}$. Углом между вектором $\vec{a}$ и осью l называется угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{l}$, где $\vec{l}$ – вектор, задающий направление оси l (на рис. 12 ψ – угол между $\vec{a}$ и осью l).

Определение 1.13. Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось $\vec{l}$ (вектор $\vec{l}$) называется число $np_{\vec{l}}\,\vec{a}$ такое, что

$$np_{\vec{l}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a}\vec{l}}) = \begin{cases} +|\vec{a}_l|, & \text{если } \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{l} \\ -|\vec{a}_l|, & \text{если } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{l}, \end{cases}$$

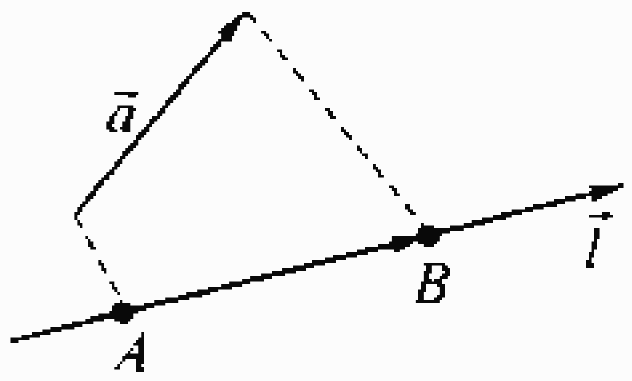

Рис. 13

где $\vec a_1$ – вектор, соединяющий проекцию A начала $\vec a$ на ось $\vec l$ с проекцией B конца $\vec a$ на эту же ось (рис. 13).

Свойство проекций. Пусть $\vec a$ и $\vec b$ – любые векторы и λ, $\mu \in \boldsymbol{R}$. Тогда

$$np_{\vec l}(\lambda\vec a+\mu\vec b)=\lambda np_{\vec l}\,\vec a+\mu np_{\vec l}\,\vec b .$$

Справедливость этого утверждения следует из второго определения проекции вектора на ось и рис. 14. #

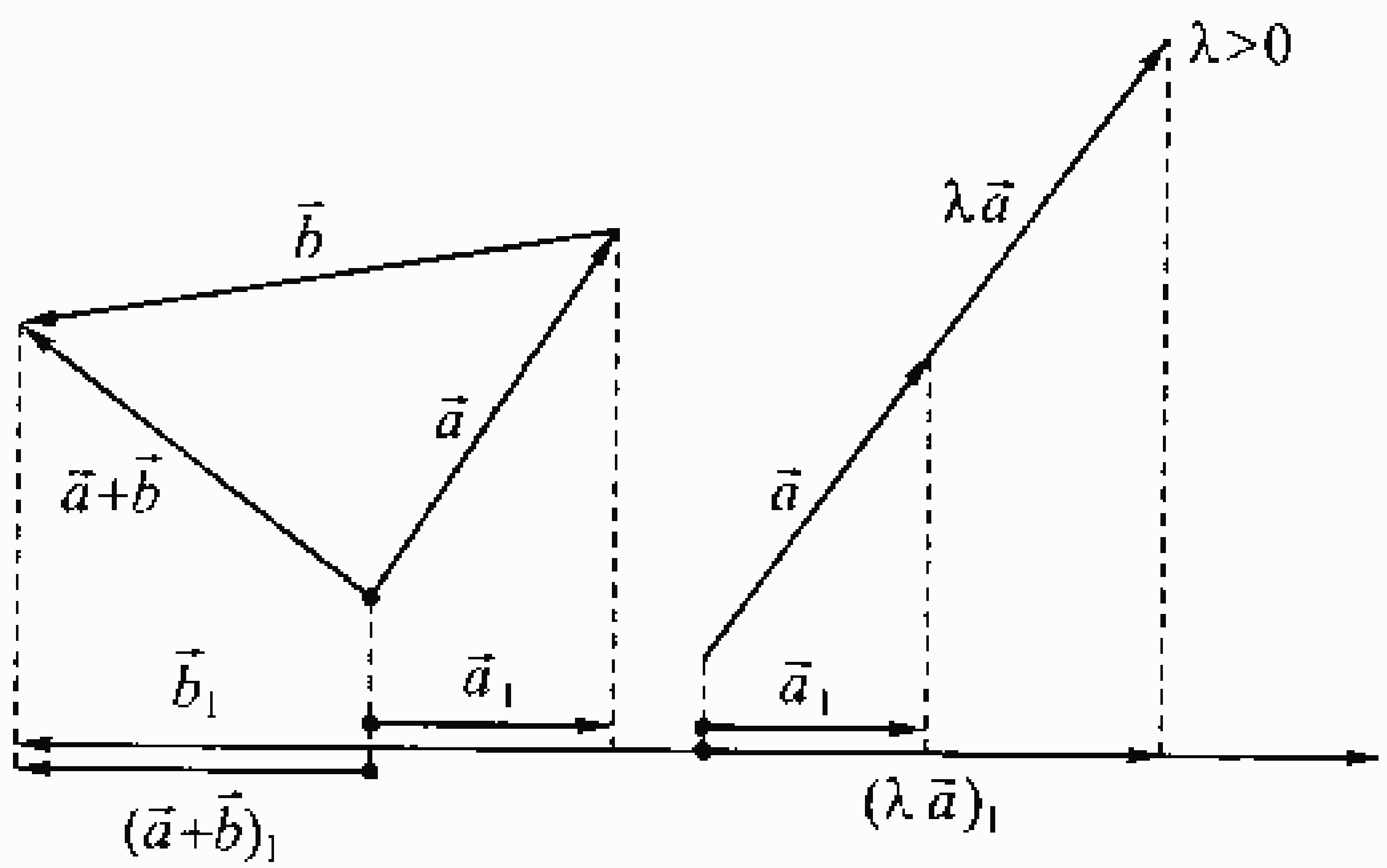

Рис. 14

2. Определение скалярного произведения и его геометрические свойства

Определение 1.14. Скалярным произведением $\vec x\,\vec y$ двух векторов $\vec x$ и $\vec y$ называется действительное число (скаляр), равное произведению их длин на косинус угла между ними.

$$\vec x\,\vec y=|\vec x||\vec y|\cos(\widehat{\vec x\,\vec y}).$$

Иногда обозначают $\vec x\,\vec y=(\vec x,\ \vec y)$.

Геометрические свойства:

1) $\vec x\,\vec y=0 \Leftrightarrow \vec x\perp\vec y$ ($\vec x$ – ортогонален $\vec y$) (считаем, что нулевой вектор ортогонален любому вектору);

2) $\vec x\,\vec y=|\vec x|np_{\vec x}\,\vec y=|\vec y|np_{\vec y}\,\vec x$.

Доказательство.

1. Свойство следует из определения.

2. Согласно первому определению проекции вектора на ось имеем:

$$np_{\vec x}\,\vec y=|\vec y|\cos(\widehat{\vec x\,\vec y});\quad np_{\vec y}\,\vec x=|\vec x|\cos(\widehat{\vec x\,\vec y}).$$

Из этих равенств, в силу определения скалярного произведения, следует 2. #

Из 2 получаем правило 1.3. Скалярное произведение двух векторов равно модулю одного вектора, умноженному на проекцию второго вектора на предыдущий.

3. Алгебраические свойства скалярного произведения

Пусть $\vec x$, $\vec y$, $\vec z$ – любые векторы, а λ, μ – произвольные вещественные числа. Тогда

1) $\vec x\,\vec x\ge 0$, $\vec x\,\vec x=0\Leftrightarrow \vec x=\vec 0$;

2) $\vec x\,\vec y=\vec y\,\vec x$ (коммутативность или симметрия);

3) $(\lambda\vec x+\mu\vec y)\vec z=\lambda(\vec x\,\vec y)+\mu(\vec y\,\vec z)$ (линейность по первому множителю).

Доказательство.

1) $\vec x\,\vec x=|\vec x|^2\ge 0$, $(\vec x,\vec x)=0\Leftrightarrow|\vec x|^2=0\Leftrightarrow\vec x=\vec 0$.

2. Следует из определения скалярного произведения.

3. Из геометрических свойств скалярного произведения и свойства проекций имеем:

$$(\lambda\vec x+\mu\vec y)\vec z=|\vec z|np_{\vec z}(\lambda\vec x+\mu\vec y)=|\vec z|(\lambda np_{\vec z}\,\vec x+\mu np_{\vec z}\,\vec y)=$$

$$=\lambda(|\vec z|\,np_{\vec z}\,\vec x)+\mu(|\vec z|\,np_{\vec z}\,\vec y)=\lambda(\vec x\,\vec z)+\mu(\vec y\,\vec z).\ \#$$

Замечание 1.5. Из 2) и 3) следует, что $\vec x\,\vec y$ линейно и по второму множителю.

Имеет место следующая лемма.

Основная лемма 1.2. Пусть $\vec a$ и $\vec b$ – два заданных вектора. Если для любого вектора $\vec x$: $\vec a\,\vec x=\vec b\,\vec x$, то $\vec a=\vec b$.

Доказательство. Условие леммы запишем в виде: $\forall\,\vec x$: $(\vec a-\vec b)\vec x=0$. Полагая $\vec x=\vec a-\vec b$, получаем $(\vec a-\vec b)(\vec a-\vec b)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow|\vec a-\vec b|=0\Leftrightarrow\vec a-\vec b=\vec 0\Leftrightarrow\vec a-\vec b$. #

4. Свойства модуля вектора и свойства расстояния между векторами

Из определения скалярного произведения следует предложение.

Предложения. Для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеем:

1) $|\vec{x}|^2 = \vec{x}\,\vec{x}$, $|\vec{x}| = (\vec{x}\,\vec{x})^{1/2}$;

2) $\cos(\widehat{\vec{x}\vec{y}}) = \dfrac{\vec{x}\,\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$;

3) $|\vec{x}\,\vec{y}| \le |\vec{x}||\vec{y}|$ (неравенство Буняковского–Шварца). Равенство в последней формуле имеет место тогда и только тогда, когда $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны. #

Для модуля вектора справедливы следующие свойства.

Основные алгебраические свойства модуля. Пусть $\vec{x}$, $\vec{y}$ – произвольные векторы, а λ – произвольное вещественное число. Тогда

1) $|\vec{x}| \ge 0$, $|\vec{x}| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$,

2) $|\lambda\,\vec{x}| = |\lambda||\vec{x}|$ (однородность модуля);

3) $|\vec{x} + \vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|$ – неравенство треугольника.

Доказательство. Свойства 1) и 2) следуют из алгебраических свойств скалярного произведения и равенства $|\vec{x}| = (\vec{x}\,\vec{x})^{1/2}$.

Свойство 3) следует из неравенства Буняковского–Шварца. Оно вытекает из следующей цепочки соотношений:

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y})(\vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}\,\vec{x}) + 2(\vec{x}\,\vec{y}) + (\vec{y}\,\vec{y}) \le |\vec{x}|^2 +$$

$$+2|\vec{x}||\vec{y}| + |\vec{y}|^2 = (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2.$$

Знак равенства в 3 достигается $\Leftrightarrow$ $\vec{x}\,\vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|$ $\Leftrightarrow$, когда угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ равен нулю. #

Задача 1.1. Доказать, что для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливы неравенства:

$$\big||\vec{x}| - |\vec{y}|\big| \le |\vec{x} - \vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

Определение 1.15. Вещественное число $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}|$ называется расстоянием между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Из определения и алгебраических свойств модуля вектора следует, что расстояние между векторами удовлетворяет следующим свойствам:

1) $\rho(\vec{x}, \vec{y}) > 0$, если $\vec{x} \ne \vec{y}$ и $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$;

2) для $\forall\, \vec{x}, \vec{y}$: $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho(\vec{y}, \vec{x})$;

3) для $\forall\, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$: $\rho(\vec{x}, \vec{y}) \le \rho(\vec{x}, \vec{z}) + \rho(\vec{z}, \vec{y})$. #

5. Координатная запись скалярного произведения

Все рассуждения проведем в ЛПСВ V_3 (для V_1 и V_2 – выкладки проводятся аналогично).

Пусть $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ – базис V_3. Тогда можем любые векторы $\vec{x}$ и $\vec{y} \in V_3$ записать в виде:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{3} x_j \vec{l}_j, \quad \vec{y} = \sum_{k=1}^{3} y_k \vec{l}_k.$$

Пользуясь свойством линейности скалярного произведения по каждому множителю, получаем

$$\vec{x}\,\vec{y} = \left(\sum_{j=1}^{3} x_j \vec{l}_j\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{3} y_k \vec{l}_k\right) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} (\vec{l}_j\,\vec{l}_k)\, x_j\, y_k$$

или

$$\vec{x}\,\vec{y} = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{jk}\, x_j\, y_k,$$

где $\varepsilon_{jk} = \vec{l}_j \vec{l}_k$. Если $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ – ортонормированный базис, т.е.

$$\vec{l}_j\,\vec{l}_k = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \ne k, \end{cases}$$

то получим

1) $\vec{x}\,\vec{y} = \vec{x}_1\,\vec{y}_1 + \vec{x}_2\,\vec{y}_2 + \vec{x}_3\,\vec{y}_3 = \sum\limits_{k=1}^{3} x_k\, y_k$;

2) $|\vec{x}| = (\vec{x}\,\vec{x})^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$;

3) $\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \dfrac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$;

4) $|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$ – расстояние между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

§ 5. Векторное и смешанное произведение векторов

1. Упорядоченные правые и левые тройки векторов

Тройка векторов в V_3 называется упорядоченной, если они записаны в определенном порядке. Например, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ есть упорядоченная тройка, $\vec{x}$ – первый вектор, $\vec{y}$ – второй, $\vec{z}$ – третий вектор.

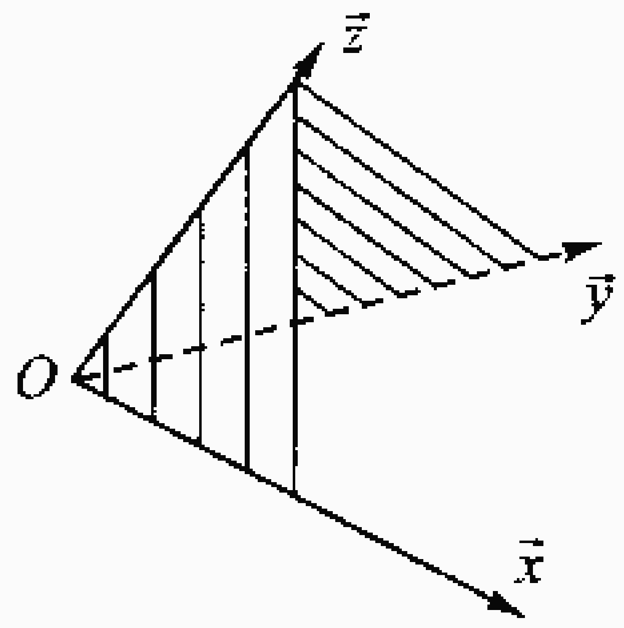

Рис. 15

Определение 1.16. Упорядоченную тройку некомпланарных векторов с общим началом O называем правой упорядоченной тройкой, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден против часовой стрелки. Если указанный поворот виден по часовой стрелке, то тройка называется левой тройкой. На рис. 15 $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ – правая тройка.

Замечание 1.6. Из определения следует, что тройки $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$; $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{x}$; $\vec{z}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ той же ориентации, что и $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, а тройки $\vec{y}$, $\vec{x}$, $\vec{z}$; $\vec{z}$, $\vec{y}$, $\vec{x}$; $\vec{x}$, $\vec{z}$, $\vec{y}$ имеют одинаковую ориентацию, но противоположную $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

2. Определение векторного произведения двух векторов и его геометрических свойства

Определение 1.17. Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $[\vec{a}, \vec{b}]$ (иначе ещё обозначают $[\vec{a}\vec{b}]$ или $\vec{a}\times\vec{b}$), такой, что

1) $|[\vec{a}\,\vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$;

2) $[\vec{a}\,\vec{b}]\perp\vec{a}$, $[\vec{a}\,\vec{b}]\perp\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $[\vec{a}, \vec{b}]$ образуют правую упорядоченную тройку.

Геометрические свойства векторного произведения:

1) $|[\vec{a}\,\vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\vec{b}) = \text{пл. } S_{\square}$,

где $S_{\square}$ – параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведенных к общему началу;

2) $[\vec{a}\,\vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$ ($\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны);

3) если $\vec{I}_1$, $\vec{I}_2$, $\vec{I}_3$ – ОНБ и $\vec{I}_1$, $\vec{I}_2$, $\vec{I}_3$ образуют правую тройку, то $[\vec{I}_1, \vec{I}_2] = \vec{I}_3$, $[\vec{I}_2, \vec{I}_3] = \vec{I}_1$, $[\vec{I}_3, \vec{I}_1] = \vec{I}_2$.

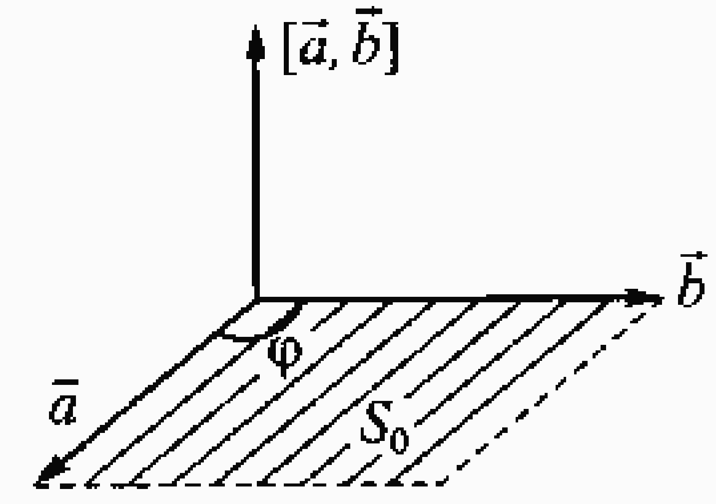

Рис. 16

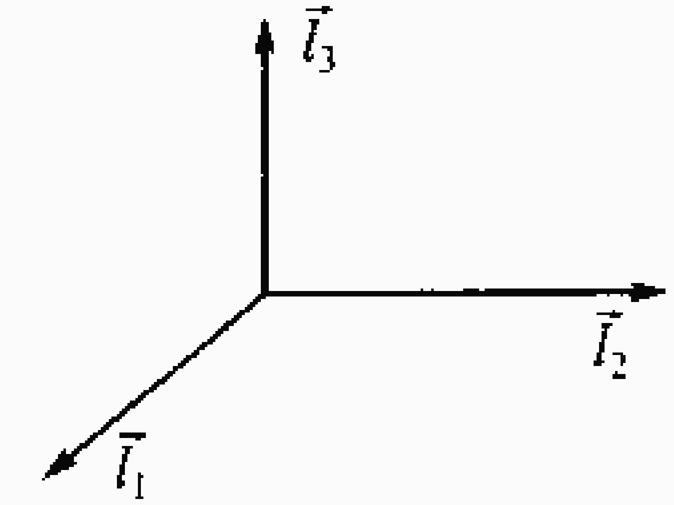

Рис. 17

Доказательство. 1) следует из определения и рис. 16;

2) если $[\vec{a}\,\vec{b}] = \vec{0}$ и хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\vec{0}$, то (см. § 2 п. 1) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если же $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, то $|[\vec{a}\,\vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Rightarrow \sin(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = 0 \Rightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$. Обратное утверждение следует из определения векторного произведения;

3) следует из определения векторного произведения и свойств упорядоченных троек (рис. 17). #

3. Определение смешанного произведения трех векторов и его геометрические свойства

Определение 1.18. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число $[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}$, которое обозначается $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$, т.е.

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) \overset{\text{опр}}{=} [\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}$$

Геометрические свойства смешанного произведения:

1) $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны;

2) $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{cases} +\text{объем } V_{\diamond}, \text{ если } \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \text{ правая тройка,} \\ -\text{объем } V_{\diamond}, \text{ если } \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \text{ левая тройка,} \end{cases}$

где $V_\Diamond$ – параллелепипед, построенный на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ которые приведены к общему началу;

3) $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}=\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}]$, т.е. квадратные скобки (векторное умножение) в смешанном произведении можно ставить произвольно.

Доказательство. 1) Следует из критерия ортогональности двух векторов и определения векторного произведения. Действительно,

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}=0 \Leftrightarrow [\vec{a}\,\vec{b}]\perp\vec{c} \Leftrightarrow \vec{c}\parallel S_\Diamond$$

($S_\Diamond$ – параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенных к общему началу) $\Leftrightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарны;

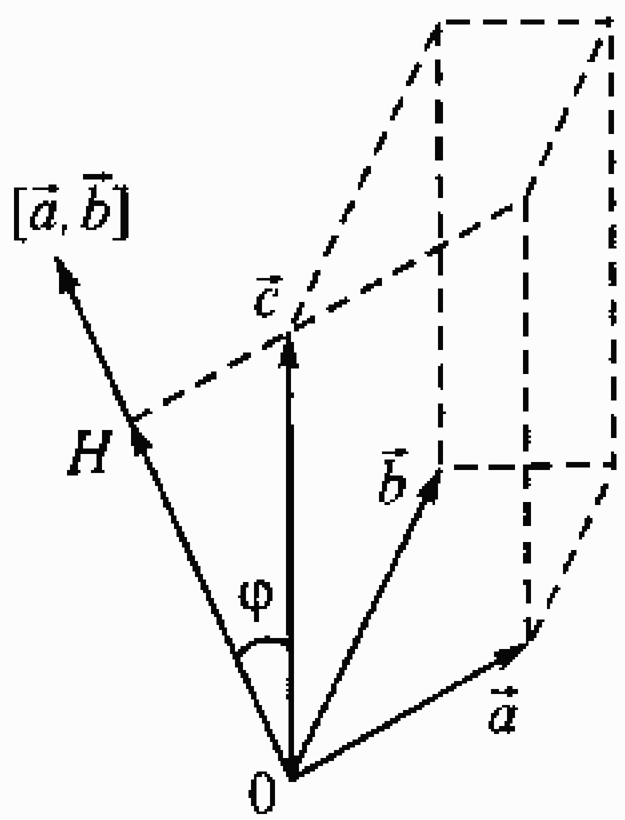

Рис. 18

2) из свойств скалярного произведения и определения проекции вектора на ось имеем

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}=\left|[\vec{a}\,\vec{b}]\right| np_{[\vec{a}\,\vec{b}]}\vec{c}=$$

$$=\text{пл.}\,S_\square\,|\vec{c}|\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{c}$ и $[\vec{a}\,\vec{b}]$ (см. рис. 18).

Обозначим через h высоту параллелепипеда $V_\Diamond$ ($V_\Diamond$ – параллелепипед, построенный на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, которые приведены к общему началу), опущенную на основание $S_\Diamond$. Тогда

$$h=\begin{cases}+|\vec{c}|\cos\varphi, & \text{если } \cos\varphi>0 \\ \text{или если } \vec{a},\vec{b},\vec{c} - \text{правая тройка векторов}, \\ -|\vec{c}|\cos\varphi, & \text{если } \cos\varphi<0 \\ \text{или если } \vec{a},\vec{b},\vec{c} - \text{левая тройка векторов}.\end{cases}$$

Так как $V_\Diamond=$ *пл.* $S\ h$, то из приведенных рассуждений следует

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=\begin{cases}+\text{ объем } V_\Diamond, & \text{если } \vec{a},\vec{b},\vec{c} - \text{правая тройка векторов}, \\ -\text{ объем } V_\Diamond, & \text{если } \vec{a},\vec{b},\vec{c} - \text{левая тройка векторов}.\end{cases}$$

3) из коммутативности скалярного произведения следует, что $\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}]=[\vec{b}\,\vec{c}]\vec{a}$, а в силу предыдущего свойства как $[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}$, так и $[\vec{b}\,\vec{c}]\vec{a}$ с точностью до знака равны объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, которые приведены к общему началу. Но так как тройки $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ имеют одинаковую ориентацию, то и знаки чисел $[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}$ и $[\vec{b}\,\vec{c}]\vec{a}$ совпадают. Следовательно, $[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}=\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}]=(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$. #

4. Алгебраические свойства векторного произведения

Для векторного произведения справедливы следующие алгебраические свойства:

1) для $\forall\,\vec{a}:[\vec{a}\,\vec{a}]=\vec{0}$;

2) для $\forall\,\vec{a}$, $\vec{b}:[\vec{a}\,\vec{b}]=-[\vec{b}\,\vec{a}]$ – антикоммутативность;

3) векторное произведение линейно по каждому сомножителю, т.е. для $\forall\,\lambda,\ \mu\in R$

а) $[(\lambda\,\vec{a}+\mu\,\vec{b})\,\vec{c}]=\lambda[\vec{a}\,\vec{c}]+\mu[\vec{b}\,\vec{c}]$;

б) $[\vec{a}\,(\lambda\,\vec{b}+\mu\,\vec{c})]=\lambda[\vec{a}\,\vec{b}]+\mu[\vec{a}\,\vec{c}]$.

Доказательство. 1) следует из определения векторного произведения;

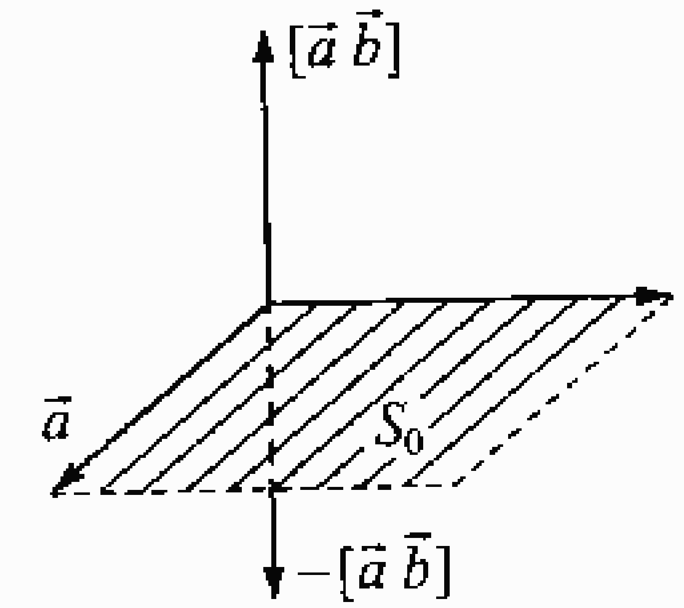

Рис. 19

2) если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то свойство 2 очевидно. Если же $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны то, в силу определения векторного произведения двух векторов, векторы $[\vec{a}\,\vec{b}]$ и $[\vec{b}\,\vec{a}]$ имеют одинаковую длину и коллинеарны (так как ортогональны одной и той же плоскости, определяемой векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$). Таким образом, либо $[\vec{a}\,\vec{b}]=[\vec{b}\,\vec{a}]$ либо $[\vec{a}\,\vec{b}]=-[\vec{b}\,\vec{a}]$. Но так как тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $[\vec{a}\,\vec{b}]$ и $\vec{a}$, $\vec{b}$, $[\vec{b}\,\vec{a}]$ являются тройками противоположной ориентации (рис. 19), то векторы $[\vec{a}\,\vec{b}]$ и $[\vec{b}\,\vec{a}]$ имеют взаимно противоположные направления. Следовательно, $[\vec{a}\,\vec{b}]=-[\vec{b}\,\vec{a}]$;

3) а) пусть $\vec{x}$ – любой вектор, тогда в силу произвола расстановки квадратных скобок в смешанном произведении (см. § 5 п. 3) и в силу линейности скалярного произведения получим:

$$[(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\vec{c}]\vec{x}=([\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}][\vec{c}\,\vec{x}])=$$
$$=\lambda\vec{a}[\vec{c}\,\vec{x}]+\mu\vec{b}[\vec{c}\,\vec{x}]=\lambda[\vec{a}\,\vec{c}]\vec{x}+\mu[\vec{b}\,\vec{c}]\vec{x},$$

т.е. для $\forall\vec{x}$ имеем:

$$[(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\vec{c}]\vec{x}=(\lambda[\vec{a}\,\vec{c}]+\mu[\vec{b}\,\vec{c}])\vec{x}.$$

Поэтому по основной лемме скалярного произведения (см. § 4, п. 3) имеем $[(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\vec{c}]=\lambda[\vec{a}\,\vec{c}]+\mu[\vec{b}\,\vec{c}]$);

б) следует из антикоммутативности векторного произведения и линейности его по первому множителю. Действительно,

$$[\vec{a}(\lambda\vec{b}+\mu\vec{c})]=-[(\lambda\vec{b}+\mu\vec{c})\vec{a}]=-\lambda[\vec{b}\,\vec{a}]-\mu[\vec{c}\,\vec{a}]=\lambda[\vec{a}\,\vec{b}]+\mu[\vec{a}\,\vec{c}].$$

Отметим еще полезное тождество:

$$[\vec{a}\,\vec{b}]^2=\vec{a}^2\,\vec{b}^2-(\vec{a}\,\vec{b})^2.$$

Справедливость его следует из цепочки равенств:

$$\vec{a}^2\,\vec{b}^2-(\vec{a}\,\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=$$
$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}}))=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=[\vec{a}\,\vec{b}]^2.\ \#$$

5. Алгебраические свойства смешанного произведения

Смешанное произведение обладает следующими алгебраическими свойствами:

1) смешанное произведение $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$ равно нулю, если один из сомножителей нулевой вектор или имеется два одинаковых сомножителя;

2) от перемены мест двух сомножителей смешанное произведение меняет знак, например $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=-(\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c})$;

3) смешанное произведение линейно по каждому сомножителю, т.е.

а) $((\lambda\vec{a}+\mu\vec{d})\vec{b}\,\vec{c})=\lambda(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})+\mu(\vec{d}\,\vec{b}\,\vec{c})$,

б) $(\vec{a}(\lambda\vec{b}+\mu\vec{d})\vec{c})=\lambda(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})+\mu(\vec{a}\,\vec{d}\,\vec{c})$

в) $(\vec{a}\,\vec{b}(\lambda\vec{c}+\mu\vec{d}))=\lambda(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})+\mu(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d})$

4) если к одному вектору смешанного произведения прибавить любой другой его вектор, умноженный на произвольное число, то величина смешанного произведения не изменится, например

$$(\vec{a}+\lambda\vec{b})\vec{b}\,\vec{c})=(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c});$$

5) для $\forall\lambda\in R:((\lambda\vec{a})\vec{b}\,\vec{c})=\lambda(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$.

Доказательство. 1) Если в тройке $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ один из векторов равен нулю или имеется два одинаковых вектора, то $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны и, следовательно, $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=0$ (см. § 5, п. 3);

2) $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}=-[\vec{b}\,\vec{a}]\vec{c}=-(\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c})$;

3) следует из равенства $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\,\vec{c})$ и из линейности векторного и скалярного произведения. Действительно, докажем равенство а) (равенства б) и в) доказываются аналогично).

$$((\lambda\vec{a}+\mu\vec{d})\vec{b}\,\vec{c})=[(\lambda\vec{a}+\mu\vec{d})\vec{b}]\vec{c}=((\lambda[\vec{a}\,\vec{b}]+\mu[\vec{d}\,\vec{b}])\vec{c})=$$
$$=\lambda[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}+\mu[\vec{d}\,\vec{b}])=\lambda(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})+\mu(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c});$$

4) $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\vec{b}\,\vec{c})=(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})+\lambda(\vec{b}\,\vec{b}\,\vec{c})=(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$.

Здесь были использованы доказанные в этом пункте свойства 1 и 3. Свойство 5 следует из 3 а) (при $\mu=0$). #

6. Координатная запись векторного и смешанного произведения

Пусть $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$ – произвольный базис V_3 и пусть заданы разложения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по векторам базиса $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$, т.е. $\vec{a}=\alpha_1\vec{l}_1+$ $+\alpha_2\vec{l}_2+\alpha_3\vec{l}_3$; $\vec{b}=\beta_1\vec{l}_1+\beta_2\vec{l}_2+\beta_3\vec{l}_3$. Используя алгебраические свойства векторного произведения (см. § 5, п. 4), получаем

$$\begin{aligned}&[\vec{a}\,\vec{b}]=[(\alpha_1\vec{l}_1+\alpha_2\vec{l}_2+\alpha_3\vec{l}_3)(\beta_1\vec{l}_1+\beta_2\vec{l}_2+\beta_3\vec{l}_3)]=\\&=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)[\vec{l}_2\vec{l}_3]+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)[\vec{l}_3\vec{l}_1]+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)[\vec{l}_1\vec{l}_2].\end{aligned}\qquad(1.10)$$

<u>Следствие 1.4.</u> Если $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$ правый ортонормированный базис, то $[\vec{l}_1,\vec{l}_2]=\vec{l}_3$, $[\vec{l}_2,\vec{l}_3]=\vec{l}_1$, $[\vec{l}_3,\vec{l}_1]=\vec{l}_2$ и тогда формула (10) примет вид:

$$[\vec{a}\,\vec{b}]=[(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\vec{l}_1+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\vec{l}_2+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\vec{l}_3.\qquad(1.11)$$

Замечание 1.7. Если $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$ – левый ортонормированный базис из V_3, то перед всей правой частью формулы (1.11) следует поставить знак минус.

Найдем выражение смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ через их компоненты $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ и $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ в произвольном базисе $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$. Для этого запишем смешанное произведение $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$ в виде $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = [\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}$. Учитывая (1.10) и линейность скалярного произведения, получаем

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\gamma_1[\vec{l}_2\,\vec{l}_3]\vec{l}_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\gamma_2(\vec{l}_3\,\vec{l}_1]\vec{l}_2 + \\ +(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\gamma_3[\vec{l}_1\,\vec{l}_2]\vec{l}_3.$$

(Здесь не выписывались слагаемые, содержащие смешанные произведения с равными сомножителями, так как они равны нулю (см. § 5, п. 5).) Учитывая равенства $[\vec{l}_2\,\vec{l}_3]\vec{l}_1 = [\vec{l}_3\,\vec{l}_1]\vec{l}_2 = [\vec{l}_1\,\vec{l}_2]\vec{l}_3 = (\vec{l}_1\,\vec{l}_2\,l_3)$, получаем

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \{\gamma_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + \gamma_2\,\alpha_3\,\beta_1 - \alpha_1\beta_3 + \\ +\gamma_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\}(\vec{l}_1\,\vec{l}_2\,\vec{l}_3). \tag{1.12}$$

Отметим, если $(\vec{l}_1\,\vec{l}_2\,l_3)$ – правый ОНБ, то $(\vec{l}_1\,\vec{l}_2\,\vec{l}_3) = 1$, если – $(\vec{l}_1\,\vec{l}_2\,l_3)$ – левый ОНБ, то $(\vec{l}_1\,\vec{l}_2\,l_3) = -1$ и, следовательно, получаем следующее следствие.

Следствие 1.5. Сметанное произведение трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ выражается через их координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ и $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ в ОНБ по формуле

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \pm\{\gamma_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + \gamma_2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + \\ +\gamma_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\} \tag{1.13}$$

при этом в правой части (1.13) берется знак «+», если $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$ – правый ОНБ и знак «–», если $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$ – левый ОНБ.

Формулы (1.10)–(1.13) для векторного и смешанного произведения достаточно громоздки. Для их более наглядной записи можно использовать определители второго и третьего порядков.

Рассмотрим таблицу:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

из четырех чисел a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}. Таблицы такого вида называются квадратными матрицами второго порядка. Определителем второго порядка, соответствующим матрице (1.14), называется число, равное $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$ и обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Аналогично таблица

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \tag{1.15}$$

состоящая из девяти чисел a_{ik}, $i, k = 1, 2, 3$ называется квадратной матрицей третьего порядка, а число, которое обозначается символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - \\ -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

называется определителем третьего порядка этой матрицы.

Определитель третьего порядка матрицы (1.15) запишем иначе через определители второго порядка в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \\ -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{1.16}$$

Это определение называется разложением определителя третьего порядка по элементам первой строки.

Из определителя третьего порядка формулы (1.16) и формул (1.10)–(1.13) координатной записи векторного и смешанного произведения следуют выводы.

Вывод 1.3.

$$(\vec a\,\vec b\,\vec c)=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}(\vec l_1\,\vec l_2\,\vec l_3), \qquad (1.17)$$

если $\vec l_1,\ \vec l_2,\ \vec l_3$ – произвольный базис V_3;

Вывод 1.4.

$$(\vec a\,\vec b\,\vec c)=\pm\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}, \qquad (1.18)$$

если $\vec l_1,\ \vec l_2,\ \vec l_3$ – ОНБ, причем в правой части берется знак «+», если $\vec l_1,\ \vec l_2,\ \vec l_3$ – правый ОНБ, и знак «–», если $\vec l_1,\ \vec l_2,\ \vec l_3$ – левый ОНБ.

Для записи векторного произведения векторов $\vec a$ и $\vec b$, заданного своими координатами $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$, $(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)$ в произвольном базисе $\vec l_1,\ \vec l_2,\ \vec l_3$ можно использовать символ определителя, а именно

$$[\vec a\,\vec b]=\begin{vmatrix}[\vec l_3\,\vec l_2] & [\vec l_3\,\vec l_1] & [\vec l_1\,\vec l_2]\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}. \qquad (1.19)$$

Если же $\vec l_1,\ \vec l_2,\ \vec l_3$ – ОНБ, то формула (1.19) примет вид

$$(\vec a\,\vec b)=\pm\begin{vmatrix}\vec l_1 & \vec l_2 & \vec l_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}, \qquad (1.20)$$

причем в правой части берется знак «+» если $\vec l_1,\ \vec l_2,\ \vec l_3$ – правый ОНБ, и знак «–», если $\vec l_1,\ \vec l_2,\ \vec l_3$ – левый ОНБ.

Замечание 1.8. Раскладывая определители (1.19) и (1.20) по формуле (1.16), очевидно, придем к ранее полученным формулам (1.10), (1.11).

Отметим, что из алгебраических свойств смешанного произведения трех векторов (§ 5, п. 5) и формулы (1.18) следуют свойства определителей третьего порядка.

1. Если определитель третьего порядка содержит две одинаковые строки или строку, все элементы которой нули, то определитель равен нулю.

2. Перестановка местами двух строк определителя равносильна умножению его на число (-1).

3. Определитель обладает свойством линейности по каждой строке, например для первой строки (для 2-й и 3-й строки аналогично).

$$\begin{vmatrix}\lambda a_{11}+\mu d_1 & \lambda a_{12}+\mu d_2 & \lambda a_{13}+\mu d_3\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}= =\lambda\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\mu\begin{vmatrix}d_1 & d_2 & d_3\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}. \qquad (1.16)$$

4. Если к элементам некоторой строки определителя прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на произвольное число λ, величина определителя не изменится.

5. Общий множитель всех элементов некоторой строки определителя можно выносить за знак этого определителя, например,

$$\begin{vmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Доказательство. В некотором правом ОНБ $\vec l_1,\ \vec l_2,\ \vec l_3$ рассмотрим векторы $\vec a,\ \vec b,\ \vec c,\ \vec d$ с координатами в этом базисе соответственно $(a_{11},\ a_{12},\ a_{13})$, $(a_{21},\ a_{22},\ a_{23})$, $(a_{31},\ a_{32},\ a_{33})$ и $(d_1,\ d_2, d_3)$. Тогда свойства 1–5, очевидно, следуют из формулы (1.10) и алгебраических свойств смешанного произведения. #

Замечание 1.9. Свойства 1–5 справедливы и для определителей второго порядка, что непосредственно следует из равенства:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

и свойств 1–5 для определителей третьего порядка. #

7. Условия ортогональности, коллинеарности и компланарности векторов

Пусть $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ – произвольный базис в V_3 и пусть три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ определены своими координатами в этом базисе:

$$\vec{a}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),\ \vec{b}=(\beta_1, \beta_2, \beta_3),\ \vec{c}=(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Тогда

$$[\vec{a}\,\vec{b}]=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}[\vec{l}_3\,\vec{l}_2]-\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}[\vec{l}_3\,\vec{l}_1]+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}[\vec{l}_1\,\vec{l}_2].$$

Отметим, что если $\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=0$, то, очевидно, $[\vec{a}\,\vec{b}]=\vec{0}$ и, следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Верно и обратное утверждение, т.е. если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, что эквивалентно условию $[\vec{a}\,\vec{b}]=\vec{0}$, то

$$\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=0.$$

Действительно, скалярно умножив равенство,

$$\vec{0}=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}[\vec{l}_3\,\vec{l}_2]-\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}[\vec{l}_3\,\vec{l}_1]+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}[\vec{l}_1\,\vec{l}_2].$$

Соответственно на $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ получим (так как $(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3)\neq 0$), что

$$\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, из только что проведенных рассуждений геометрических свойств скалярного, векторного и смешанного произведения, а также формул (1.9), (1.10), (1.17), получим следующее утверждение.

<u>Утверждение 1.1.</u> Если $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ – произвольный базис V_3, то $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}=0.$$

<u>Утверждение 1.2.</u> Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны $\Leftrightarrow [\vec{a}\,\vec{b}]=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{\alpha_3}{\beta_3},$$

т.е. координаты этих векторов пропорциональны (причем пропорция $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\mu}{\upsilon}$ здесь и всюду ниже понимается в смысле равенства $\alpha\upsilon=\beta\mu$).

<u>Утверждение 1.3.</u> Если базис $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ – ортонормированный, то вектор $\vec{a}$ ортогонален вектору $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\,\vec{b}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0.$$

<u>Следствие 1.6.</u> Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ из V_3 образуют базис

$$V_3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

<u>Утверждение 1.4.</u> 1) Если $\vec{l}_1, \vec{l}_2$ – произвольный базис V_2 и векторы $\vec{a}=(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\vec{b}=(\beta_1, \beta_2)$, заданы своими координатами в этом базисе, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2},$$

т.е. координаты этих векторов пропорциональны.

2) Если $\vec{l}_1, \vec{l}_2$ – ортонормированный базис пространства V_2, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны $\Leftrightarrow \vec{a}\,\vec{b}=0 \Leftrightarrow \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=0$.

Доказательство следует из утверждения 3 если считать, что

$$\alpha_3=\beta_3=0.$$

<u>Следствие 1.7.</u> Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из V_2 образуют базис

$$V_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\neq 0.$$

§ 6. Некоторые задачи аналитической геометрии в пространстве и на плоскости

1. Объем тетраэдра

Поставим задачу: вычислить объем тетраэдра, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$, заданных в некотором ОНБ своими координатами $\vec a=(x_1,\ y_1,z_1)$, $\vec b=(x_2,\ y_2,z_2)$, $\vec c=(x_3,\ y_3,z_3)$

Очевидно,

$$V=\frac{1}{6}\left|(\vec a\,\vec b\,\vec c)\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}$$

2. Площадь треугольника

Пусть на плоскости задана декартовая прямоугольная система координат OXY и в этой системе координат заданы три точки $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ и $P_3(x_3,y_3)$. Требуется найти площадь треугольника с вершинами в точках P_1, P_2 и P_3. Для решения этой задачи рассмотрим на плоскости два вектора $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ и $\overrightarrow{P_1P_3}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1)$. В пространстве V_2 векторное произведение не определено. Но ничто не мешает считать, что наша плоскость V_2 помещена в пространство V_3 и третий базисный вектор выбран перпендикулярно плоскости и имеет единичную длину. Тогда площадь треугольника

$$S=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3}]\right|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0\end{vmatrix}.$$

3. Деление отрезка в данном отношении

Пусть в пространстве V_m (m – фиксировано, m = 1, 2, 3) задана декартовая прямоугольная система координат и две точки A и B. Условимся называть величиной направленного отрезка $\overline{AB}$ некоторой оси число, равное его длине, взятой со знаком плюс, если

направление этого отрезка совпадает с направлением оси, и со знаком минус, если оно противоположно направлению оси. Величину направленного отрезка $\overline{AB}$ будем обозначать AB (очевидно, $AB=-BA$).

Пусть на некоторой оси l задан направленный отрезок AB и точка M, принадлежащая этой оси ($M\neq B$), тогда число λ, определяемое равенством $\lambda=\dfrac{AM}{MB}$, где AM и MB – величины направленных отрезков $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ оси l, называется отношением, в котором точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$.

Задача аналитической геометрии о делении отрезка в данном отношении состоит в следующем.

Считая известными координаты двух точек A и B и отношение λ, в котором некоторая (неизвестная) точка M делит отрезок $\overrightarrow{AB}$, найти координаты точки M (рис. 20). Решим задачу в V_3 (в V_1 и V_2 задача решается аналогично).

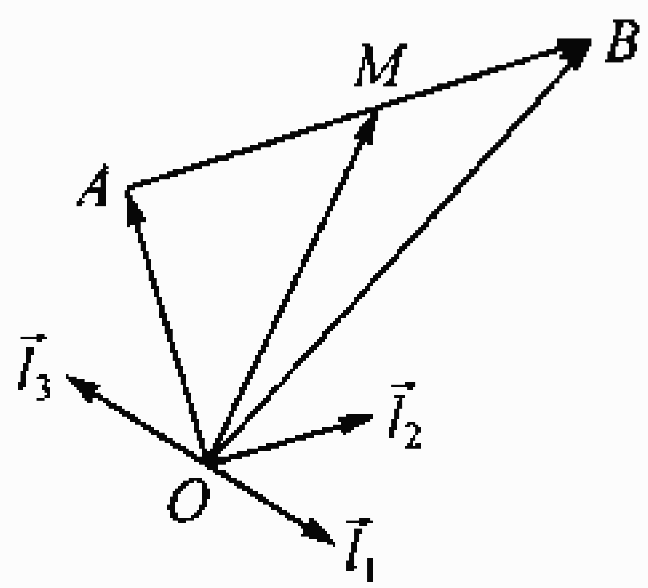

Рис. 20

Пусть координаты точек A, B равны соответственно $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ и $(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)$ Координаты неизвестной точки M обозначим через $(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Так как $\overrightarrow{AM}\parallel\overrightarrow{MB}$, то $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$. Следовательно, $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$ или, $x_k=\dfrac{\alpha_k+\lambda\beta_k}{1+\lambda}$, $k=1,2,3$.

4. Двойное векторное произведение

Пусть $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ – векторы из V_3. Выражение $[\vec a\,[\vec b\,\vec c]$ называется двойным векторным произведением.

<u>Утверждение 1.5.</u> $[\vec a\,[\vec b\,\vec c]=\vec b\,(\vec a\,\vec c)-\vec c\,(\vec a\,\vec b)=\begin{vmatrix}\vec b & \vec c\\ (\vec a\,\vec b) & (\vec a\,\vec c)\end{vmatrix}.$

Для запоминания формулы удобно правило: двойное векторное произведение равно среднему вектору, умноженному на скалярное произведение двух остальных, минус другой вектор внутреннего произведения, умноженный на скалярное произведение двух остальных.

Доказательство. Введем специальную декартову прямоугольную систему координат. Ось OZ направим по вектору $\vec{c}$, а ось OY поместим в плоскости векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (считаем, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ приведены к общему началу). В таком случае будем иметь:

$$\vec{a}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3),\quad \vec{b}=(0,\ \beta_2,\ \beta_3),\quad \vec{c}=(0,0,\gamma_3).$$

Теперь находим:

$$[\vec{b}\,\vec{c}]=(\beta_2\gamma_3,\ 0,\ 0);$$

$$[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}]]=(0,\ \alpha_3\beta_2\gamma_3,\ -\alpha_2\beta_2\gamma_3) \qquad (1.21)$$

С другой стороны,

$$\vec{a}\vec{c}=\alpha_3\gamma_3;\quad \vec{b}(\vec{a}\vec{c})=(0,\ \alpha_3\beta_2\gamma_3,\ \alpha_3\beta_3\gamma_3)$$

$$\vec{a}\vec{b}=(\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3);\quad \vec{c}(\vec{a}\vec{b})=(0,\ 0,\ \alpha_2\beta_2\gamma_3,\ -\alpha_3\beta_3\gamma_3).$$

Следовательно,

$$\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b})=(0,\ \alpha_3\beta_2\gamma_3,\ -\alpha_2\beta_2\gamma_3). \qquad (1.22)$$

Сравнивая правые части формул (1.21) и (1.22), получаем

$$[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b}).\ \#$$

5. Некоторые свойства ОНБ. Направляющие косинусы вектора

Пусть $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$, $\vec{i}_3$ – ОНБ в V_3. Тогда для любого вектора $\vec{a}\in V$ справедливо разложение $\vec{a}=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\vec{i}_i$, причем очевидно, что

1) $\lambda_k=\vec{a}\vec{i}_k=np_{\vec{i}_k}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi_k$, где $\varphi_k=\widehat{\vec{a}\vec{i}_k}$, $k=1,\ 2,\ 3$, числа $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$, $\cos\varphi_3$ принято называть направляющими косинусами вектора $\vec{a}\neq\vec{0}$;

2) $|\vec{a}|=\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}$;

3) $\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2+\cos^2\varphi_3=1$, если $\vec{a}\neq\vec{0}$.

Следствие 1.8. В ОНБ вектор однозначно определяется заданием его длины и трех направляющих косинусов.

Замечание 1.10. Аналогичные свойства справедливы и в V_2.

§ 7. Преобразование аффинных координат на плоскости и в пространстве

Пусть V_m – пространство свободных векторов ($m=2,3$, m фиксировано) и пусть в пространстве V_m заданы две системы координат (не обязательно декартовые прямоугольные).

Первая, определяемая началом O и базисными векторами $\vec{i}_1,\ldots,\vec{i}_m$, и вторая, определяемая началом O' и базисными векторами $\vec{i}'_1,\ldots,\vec{i}'_m$. Пусть M – произвольная точка, координаты ее в этих системах обозначены соответственно $(x_1,\ldots,x_m)$ и $(x'_1,\ldots,x'_m)$. Поставим перед собой задачу выразить $(x_1,\ldots,x_m)$ через $(x'_1,\ldots,x'_m)$, считая известным положение второй системы координат относительно первой, т.е. заданы координаты $a_1,\ldots,a_m$ нового начала координат O' и координаты базисных векторов $\vec{i}'_1,\ldots,\vec{i}'_m$ в первом базисе:

$$\begin{cases}\vec{i}'_1=t_{11}\vec{i}_1+\ldots+t_{m1}\vec{i}_m;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \vec{i}'_m=t_{1m}\vec{i}_1+\ldots+t_{mm}\vec{i}_m.\end{cases} \qquad (1.23)$$

Матрица $T=\begin{bmatrix}t_{11} & \ldots & t_{1m}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ t_{m1} & \ldots & t_{mm}\end{bmatrix}$ называется матрицей перехода от старого базиса к новому.

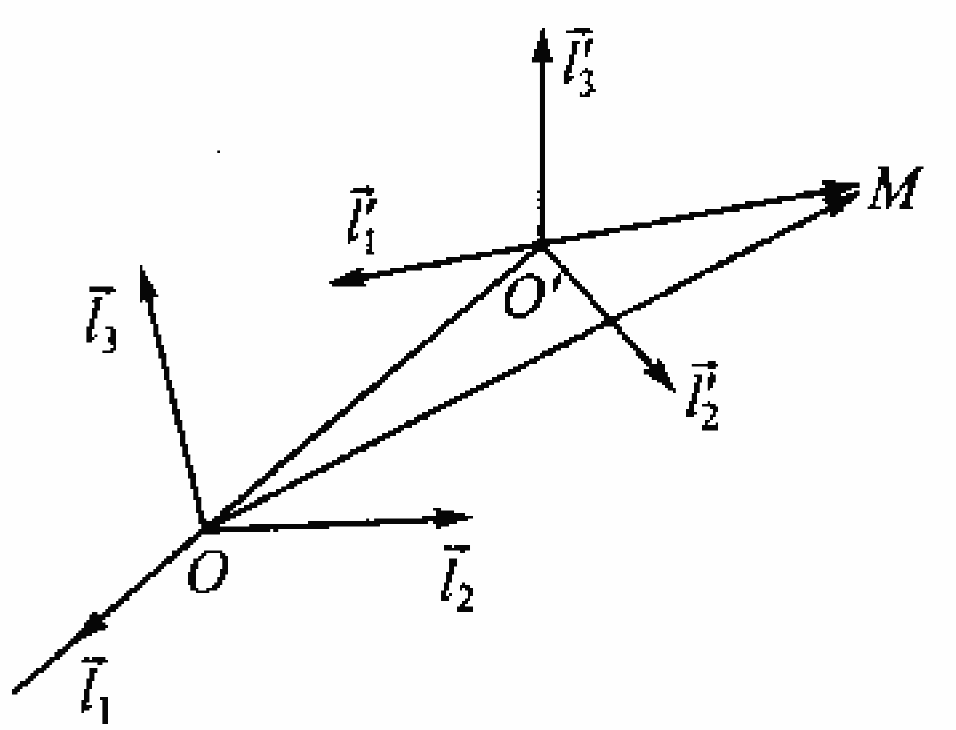

Рис. 21

В силу правила сложения векторов (рис. 21) имеем $\overline{OM}=\overline{OO'}+\overline{O'M}$.

Подставляя в это равенство выражения:

$$\overline{OM} = \sum_{j=1}^{m} x_j \vec{l}_j\,; \quad \overline{OO'} = \sum_{j=1}^{m} a_j \vec{l}_j\,; \quad \overline{O'M} = \sum_{j=1}^{m} x'_j \vec{l}'_j$$

и воспользовавшись формулами (1.23), получаем

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \vec{l}_j = \sum_{j=1}^{m} a_j \vec{l}_j + \sum_{k=1}^{m} x'_k \vec{l}'_k = \sum_{j=1}^{m} a_j \vec{l}_j + \sum_{k=1}^{m} x'_k \left(\sum_{j=1}^{m} t_{jk} \vec{l}_j \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(a_j + \sum_{k=1}^{m} t_{jk} x'_k \right) \vec{l}_j .$$

или

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \vec{l}_j = \sum_{j=1}^{m} \left(a_j + \sum_{k=1}^{m} t_{jk} x'_k \right) \vec{l}_j .$$

Из единственности разложения по базису следует, что

$$x_j = a_j + \sum_{k=1}^{m} t_{jk} x'_k, \quad j = 1, \dots, m. \tag{1.24}$$

Приходим к следующему выводу: каковы бы ни были две произвольные аффинные системы координат в пространстве V_m $(m = 2, 3)$ координаты любой точки пространства V_m относительно первой системы являются линейными функциями координат той же точки относительно второй системы.

Очевидно, изменение системы координат можно произвести в два этапа: сначала изменить только начало координат, не изменяя базис, т.е. перейти к системе координат $O', \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_m$, а затем перейти к новому базису, не меняя начала. На первом этапе формулы преобразования координат имеют вид:

$$x_1 = a_1 + \tilde{x}_1, \dots, x_m = a_m + \tilde{x}_m, \tag{1.25}$$

где $x_1, \dots, x_m$ – координаты точки M в системе $O, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_m$, $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m$ – координаты этой же точки в системе $O', \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_m$.

Формулы (1.25) называются формулами преобразования координат при параллельном переносе системы вдоль вектора $\overline{OO'} = (a_1 \dots a_m)$. На втором этапе формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = t_{11} x'_1 + \dots + t_{1m} x'_m\,; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{x}_m = t_{m1} x'_1 + \dots + t_{mm} x'_m . \end{cases} \tag{1.26}$$

Здесь $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m$ по-прежнему обозначают координаты точки M в системе $O', \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_m$, а через $x'_1, \dots, x'_m$ обозначены ее координаты в системе $O', \vec{l}'_1, \dots, \vec{l}'_m$.

Матрица
$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{m1} & \dots & t_{mm} \end{bmatrix}$$
является матрицей перехода от новых координат к старым.

Итак, видим, что матрица T перехода от старого базиса к новому является в то же время матрицей перехода от новых координат к старым.

Преобразование координат точки при повороте декартовой системы координат на угол φ.

<u>Определение 1.19.</u> Система координат $O, \vec{l}_1, \vec{l}_2$ на плоскости называется правой (левой), если кратчайший поворот от $\vec{l}_1$ к $\vec{l}_2$ совершается против часовой стрелки (по часовой стрелке). Пусть $O', \vec{l}_1, \vec{l}_2$ и $O', \vec{l}'_1, \vec{l}'_2$ две декартовые прямоугольные системы координат. Через φ обозначим угол между векторами $\vec{l}_1$ и $\vec{l}'_1$, отсчитываемый в направлении кратчайшего поворота от $\vec{l}_1$ к $\vec{l}_2$. Возможны два существенно различных случая: 1) системы $O', \vec{l}_1, \vec{l}_2$ и $O', \vec{l}'_1, \vec{l}'_2$ одной ориентации (обе правые, или обе левые) (рис. 22, а); 2) системы $O', \vec{l}_1, \vec{l}_2$ и $O', \vec{l}'_1, \vec{l}'_2$ – разной ориентации (рис. 22, б). В первом случае очевидно (см. рис. 22, а),

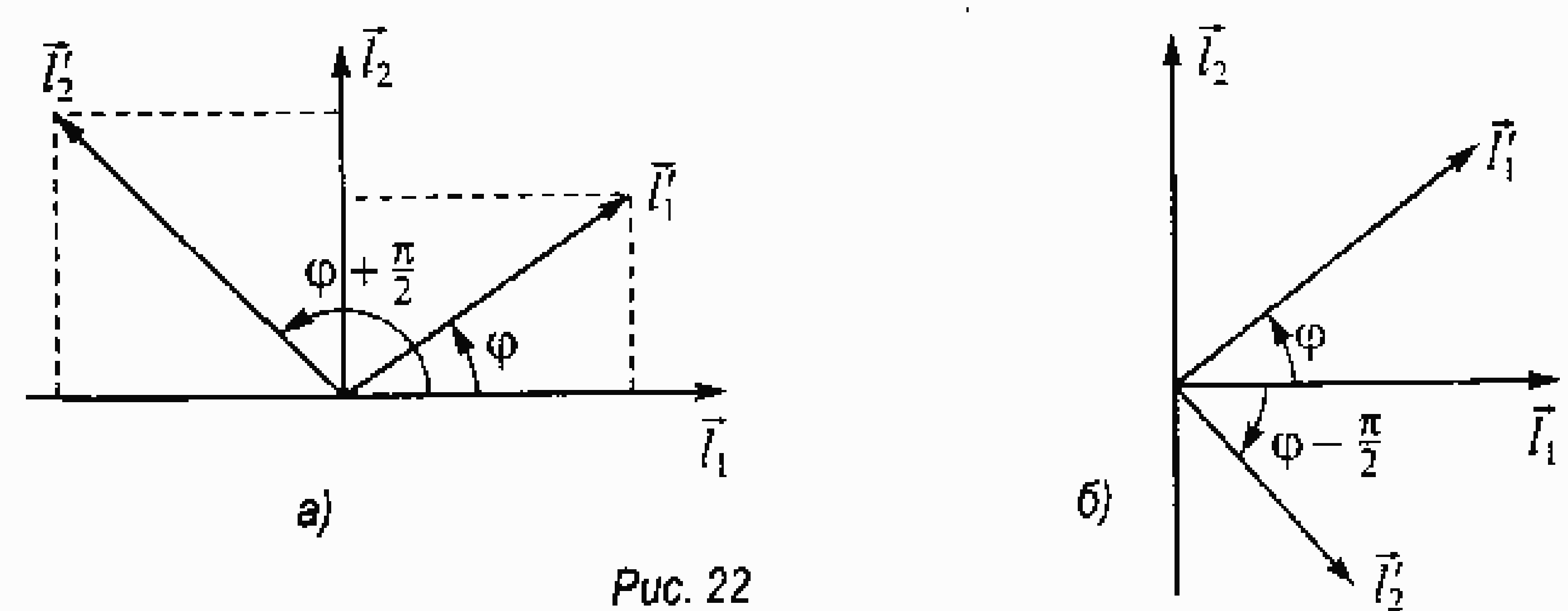

Рис. 22

$$\begin{cases} \vec{l}_1' = \cos\varphi \vec{l}_1 + \sin\varphi \vec{l}_2; \\ \vec{l}_2' = -\sin\varphi \vec{l}_1 + \cos\varphi \vec{l}_2, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Из (1.26) получаем:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \cos\varphi x_1' - \sin\varphi x_2'; \\ \tilde{x}_2 = \sin\varphi x_1' + \cos\varphi x_2'. \end{cases} \qquad (1.27)$$

Формулы (1.27) носят название формул преобразования координат при повороте системы вокруг начала на угол φ.

Из (1.25) и (1.26) следует, что формулы преобразования координат точки в общем случае при переходе от одной декартовой прямоугольной системы к другой, имеющей ту же ориентацию, имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \cos\varphi x_1' - \sin\varphi x_2'; \\ x_2 = a_2 + \sin\varphi x_1' + \cos\varphi x_2'. \end{cases}$$

<u>Замечание 1.11.</u> Если декартовые прямоугольные системы O, $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ и O', $\vec{l}_1'$, $\vec{l}_2'$ – разной ориентации, то аналогичными рассуждениями можно показать (см. рис. 22, б), что формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + x_1' \cos\varphi + x_2' \sin\varphi; \\ x_2 = a_2 + x_1' \sin\varphi - x_2' \cos\varphi. \end{cases}$$

§ 8. Полярные, цилиндрические и сферические координаты

1. Полярные координаты

Для определения системы полярных координат на плоскости надо задать: масштаб (т.е. единицу измерения длины), точку O (называемую полюсом системы координат) и исходящий из полюса луч l, который называется полярной осью. Координаты точки M определяются двумя числами (рис. 23): радиусом $r = |\overline{OM}|$ и углом φ (полярным углом)

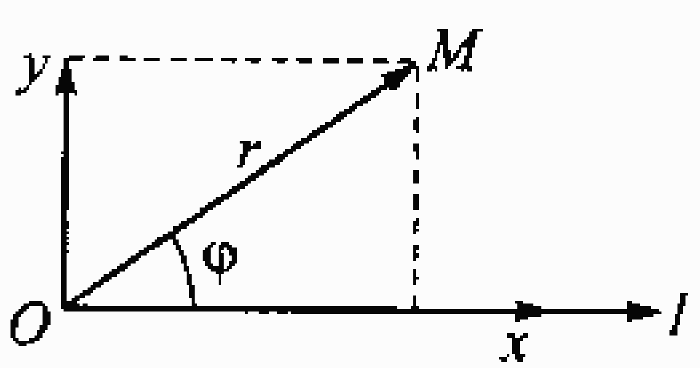

Рис. 23

между полярной осью и вектором $\overline{OM}$, отсчитываемым от полярной оси против хода часовой стрелки. Упорядоченная пара (r, φ) называется полярными координатами точки M (обозначение $M(r, \varphi)$). Отметим, что координатные линии $\rho = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ есть соответственно окружность радиуса ρ и луч, выходящий из полюса под углом φ к полярной оси. У полюса O $r = 0$, φ не определено.

Для того чтобы соответствие между точками плоскости (отличными от полюса) и парами (r, φ) было взаимно однозначным, обычно полагают, что r и φ изменяются в следующих пределах: $0 < r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Правда, иногда бывает целесообразным считать полярный угол точки определенным лишь с точностью до слагаемых вида $2\pi k$ (где k – любое целое число), а r – принимающим любые действительные значения (например, в задачах, связанных с непрерывным движением точки по плоскости: движение по окружности, по прямой, проходящей через полюс, и т.п.). Очевидно (см. рис. 23), любой полярной системе координат на плоскости соответствует единственная правая декартовая прямоугольная система координат с тем же масштабом, начало которой совпадает с полюсом, а ось абсцисс – с полярной осью и, обратно, по любой правой декартовой прямоугольной системе координат однозначно определяем полярную систему, сохраняя в ней масштаб и начало координат, объявляя полюсом и требуя, чтобы полярная ось совпадала с осью абсцисс. Посмотрим, как связаны между собой координаты x, y и r, φ какой-нибудь точки M плоскости в обеих системах. Очевидно (см. рис. 23),

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (1.28)$$

Они позволяют от полярных координат точки M перейти к декартовым прямоугольным. Из них же можно получить и обратный переход:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\varphi=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ если } (x,y) \text{ лежит в I четверти}, x\neq 0;\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi, \text{ если } (x,y) \text{ лежит во II и III четверти}, x\neq 0;\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+2\pi, \text{ если } (x,y) \text{ лежит во IV четверти}, x\neq 0;\\ \text{при } x=0,\ y>0\quad \varphi=\dfrac{\pi}{2};\\ \text{при } x=0,\ y<0\quad \varphi=\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases}\tag{1.29}$$

2. Цилиндрические координаты

Для определения цилиндрической системы координат в пространстве надо задать: плоскость π, называемую основной, с выбранной на ней полярной системой координат, масштаб, т.е. единицу измерения длины, и ось OZ, проходящую через полюс и перпендикулярную к основной плоскости. Тогда цилиндрическими координатами точки M (рис. 24), не лежащей на оси OZ, называются тройка чисел (r, φ, z) (обозначение $M(r, \varphi, z)$), где (r, φ) – полярные координаты точки M_0 (ортогональной проекции точки M на основную плоскость), а $z = np_{OZ}\overrightarrow{OM}$. Для точки M, лежащей на оси OZ, угол φ не определен. Отметим, что координатные поверхности $r=\text{const}$, $z=\text{const}$, $\varphi=\text{const}$ есть соответственно: цилиндрическая поверхность, прямолинейные, образующие которой параллельны оси OZ; плоскость, параллельная основной плоскости π; полуплоскость, «выходящая» из оси OZ под углом φ к полярной оси OX.

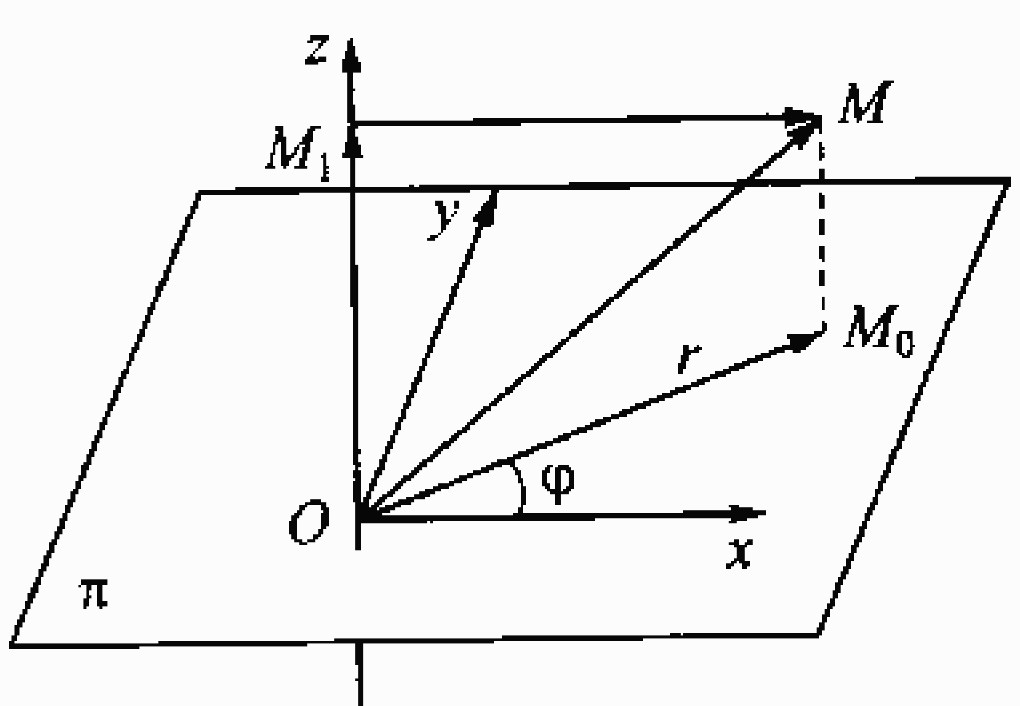

Рис. 24

Если взять декартовую прямоугольную систему координат, порожденную данной цилиндрической системой координат, т.е. такую декартовую прямоугольную систему, начало которой совпадает с полюсом O, ось OX совпадает с полярной осью, ось OY получается из OX поворотом (в основной плоскости π) в положительном направлении на угол φ, а ось OZ совпадает с осью OZ цилиндрической системы координат, то координаты (x, y, z) точки M в этой системе связаны с цилиндрическими координатами r, φ, z этой же точки следующими соотношениями (см. рис. 24):

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z.$$

Эти равенства позволяют от цилиндрических координат точки M перейти к декартовым прямоугольным. Обратный переход дается формулами (1.29).

3. Сферические координаты

Для определения сферической системы координат в пространстве, так же как и для цилиндрической, надо задать: плоскость π, называемую основной, с выбранной на ней полярной системой координат, масштаб, т.е. единицу измерения длины, и ось OZ, проходящую через полюс и перпендикулярную к основной плоскости.

Сферическими координатами точки M, не лежащей на оси OZ (рис. 25) называются три числа ρ, φ, θ (обозначение $M(\rho, \varphi, \theta)$), где $\rho=\left|\overrightarrow{OM}\right|$, долгота φ – полярный угол ортогональной проекции M_0 точки M на основную плоскость относительно данной в этой плоскости полярной системы координат $(0\le\varphi<2\pi)$, широта θ точки M – это угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью OZ $(0\le\theta\le\pi)$. Для точки M, лежащей на оси OZ, угол φ не определен и для полюса O угол θ не определен. Отметим, что

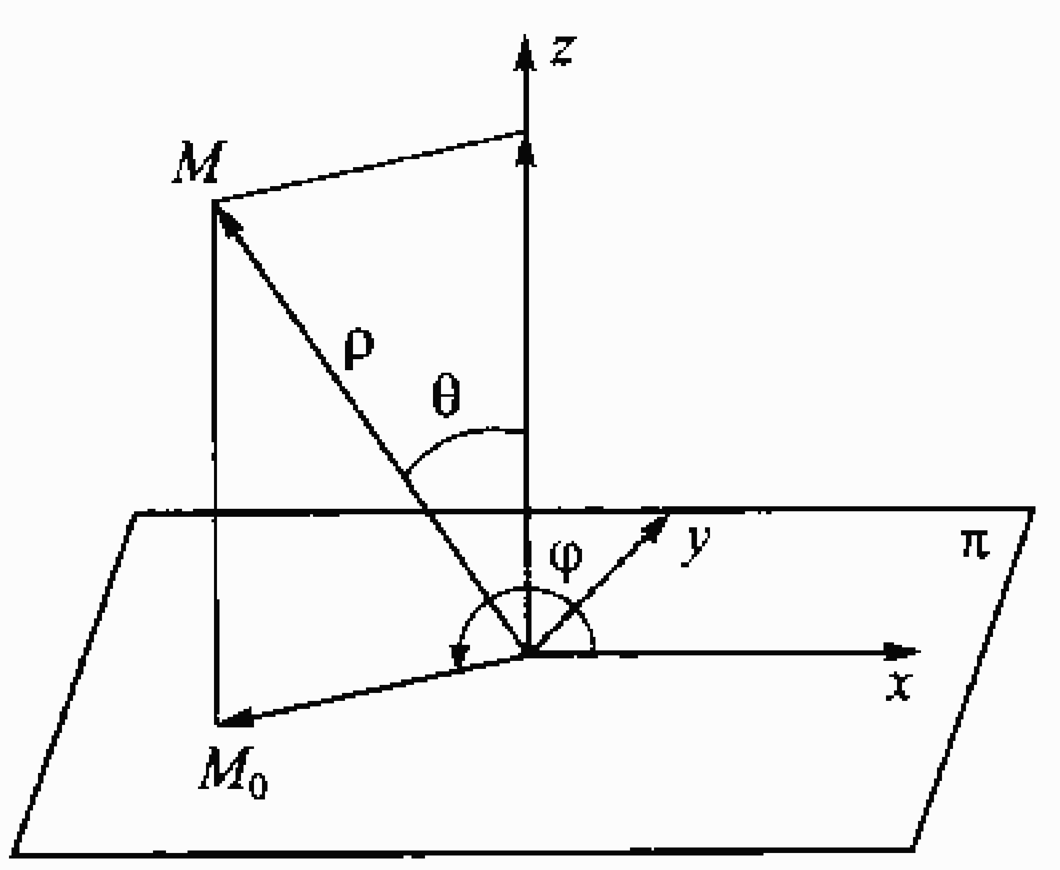

Рис. 25

координатные поверхности $\rho = \mathrm{const}$, $\varphi = \mathrm{const}$ и $\theta = \mathrm{const}$ есть соответственно: сфера; полуплоскость, выходящая из оси OZ под углом φ к полярной оси OX; коническая поверхность с вершиной в полюсе.

Если взять декартовую прямоугольную систему координат, порожденную данной сферической системой координат, т.е. такую декартовую прямоугольную систему, начало которой совпадает с полюсом O, ось OX совпадает с полярной осью, ось OY получается из OX поворотом (в основной плоскости π) в положительном направлении на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а ось OZ совпадает с осью OZ сферической системы координат, то прямоугольные координаты x, y, z точки M связаны с сферическими координатами ρ, φ, θ этой же точки (рис. 25) следующими соотношениями: $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$. Эти формулы позволяют выразить x, y, z через ρ, φ, θ и обратно.

Задачи к Главе 1

1) Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL}$.

2) Пусть M – точка пересечения медиан грани ABC треугольной пирамиды $SABC$. Разложить вектор $\overrightarrow{SM}$ по базису $\vec{e}_1 = \overrightarrow{SA}$; $\vec{e}_2 = \overrightarrow{SB}$; $\vec{e}_3 = \overrightarrow{SC}$.

3) Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(-2; 1)$; $B(1; 3)$; $C(4; 0)$. Найти четвертую его вершину D.

4) В пространстве выбран некоторый базис, относительно которого $\vec{a} = (1; 1; 1)$; $\vec{b} = (1; 2; 3)$; $\vec{c} = (1; 2; 1)$. Являются ли эти три вектора линейно–зависимыми.

5) Найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы BF и AE, проведенные из концов основания этого треугольника взаимно перпендикулярны.

6) Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Известно, что $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям $(\vec{a}; \vec{x}) = \alpha$; $[\vec{b}, \vec{x}] = \vec{c}$.

7) Показать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

8) Определить начало вектора $\vec{a} = (2; 3; -1)$, если конец его совпадает с точкой $B = (1; 1; 2)$.

9) Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы имели место следующие соотношения:

а) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$;

б) $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$;

в) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$.

10) Даны вершины треугольника $A(-1; -2; 4)$; $B(-4; -2; 0)$; $C(3; -2; 1)$. Найти

а) внешний угол при вершине C;

б) проекцию медианы $\overrightarrow{AM}$ на сторону BC.

11) Найти центр тяжести системы трех одинаковых масс, сосредоточенных в точках $A(0; 0)$; $B(4; 2)$; $C(2; 4)$.

§ 1. Задание уравнений кривых и поверхностей

1. Уравнения линий на плоскости

Пусть на плоскости задана декартовая прямоугольная система координат OXY. Если $M(x, y)$ – произвольная точка, то вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x,\ y)$ назовем радиусом-вектором точки M.

Определение 2.1. Пусть на плоскости дана какая-нибудь линия L. Уравнением данной линии в выбранной системе координат называется такое равенство $\Phi(x, y) = 0$ (или в векторной форме $\Phi(\vec{r}) = 0$) с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x, y (координаты $\vec{r}$) каждой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты никакой точки (никакого радиуса-вектора $\vec{r}$ точки), не лежащей на ней.

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2 \tag{2.1}$$

(если в векторной форме $|\vec{r} - \vec{r}_0| = a$). Это уравнение, очевидно, является уравнением окружности с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом a. Действительно, точка $M(x, y)$ лежит на указанной окружности $\Leftrightarrow$ расстояние между точками M и M_0 равно a $\Leftrightarrow$ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$. Следовательно, координаты любой точки $M(x, y)$, лежащей на указанной окружности, удовлетворяют уравнению (2.1), а координаты любой точки, не лежащей на этой окружности, не удовлетворяют уравнению (2.1).

Замечание 2.1. В какой-нибудь другой системе координат та же линия может иметь новое уравнение. Разумеется, что одно и то же уравнение в разных системах определяет разные линии.

В основу определения уравнения линии может быть положена не декартовая прямоугольная система координат, а какая-нибудь другая система координат (например, полярная). Тогда текущие координаты точки M следует обозначать другими буквами, так, как

принято для этой системы. Например, в полярной системе координат уравнение линии записывается в виде $F(\rho, \varphi) = 0$.

Пример 2.2. Уравнение окружности радиуса a с центром начале координат в полярной системе координат имеет вид: $\rho = a$.

Параметрическое уравнение линии. Пусть на плоскости задана какая-нибудь декартовая прямоугольная система координат и пусть даны две функции от одного аргумента $t \in [\alpha, \beta] \subset R$:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t) \end{cases} \tag{2.2}$$

или в векторной форме $\vec{r} = \vec{r}(t) = \{x(t),\ y(t)\}$.

Если величины x и y при каждом значении параметра t рассматривать как координаты некоторой точки M, то при изменении t величины x и y, вообще говоря, будут меняться и, следовательно, точка M будет перемещаться по плоскости.

Определение 2.2. Равенства (2.2) называются параметрическими уравнениями линии (траектории точки M); аргумент t называется переменным параметром.

Замечание 2.2. Уравнение линии, заданной в некоторой декартовой прямоугольной системе координат, явным уравнением $y = f(x)$ (или $x = g(y)$) всегда можно представить в параметрическом виде: $x = t$, $y = f(t)$ ($y = t$, $x = g(t)$).

Пример 2.3. Уравнения $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ задают окружность радиуса a с центром в начале координат. В этом легко убедиться, если заметить, что t – угол между радиусом-вектором точки окружности и базисным вектором $\vec{i}_1$.

В аналитической геометрии часто приходится решать следующую задачу: даны уравнения двух линий $\Phi_1(x,\ y) = 0$ и $\Phi_2(x,\ y) = 0$. Найти точки их пересечения. Очевидно, координаты каждой точки пересечения должны удовлетворять как уравнению $\Phi_1(x,\ y) = 0$, так и $\Phi_2(x,\ y) = 0$. Следовательно, найдем все точки пересечения данных линий, если решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \Phi_1(x,\ y) = 0; \\ \Phi_2(x,\ y) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

2. Задание поверхностей в пространстве

Пусть в пространстве задана декартовая прямоугольная система координат $OXYZ$. Вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=(x,\ y,\ z)$ назовем радиусом-вектором точки M. Пусть в пространстве дана какая-нибудь поверхность S.

Определение 2.3. Уравнением данной поверхности S в выбранной системе координат называется такое равенство $\Phi\,(x,\ y,\ z)=0$ (или в векторной форме $\Phi\,(\vec{r})=0$), которому удовлетворяют координаты $x,\ y,\ z$ (координаты $\vec{r}$) каждой точки, лежащей на поверхности S, и не удовлетворяют координаты никакой точки (никакого радиуса-вектора $\vec{r}$ точки), не лежащей на ней.

Замечание 2.1. предыдущего пункта, очевидно, справедливо и для поверхностей.

Пример 2.4. Уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$ (или в векторной форме $|\vec{r}-\vec{r}_0|=a$) определяет сферу радиуса a, с центром в точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$. Показывается это так же, как в примере 2.1, предыдущего пункта.

Замечание 2.3. Аналогично определяется уравнение поверхности и в любой другой (не обязательно декартовой прямоугольной) системе координат. Если $\Phi\,(x,\ y,\ z)=0$ – уравнение поверхности S в декартовой прямоугольной системе координат, то для того, чтобы получить уравнение этой поверхности в другой системе координат, достаточно в уравнение $\Phi\,(x,\ y,\ z)=0$ вместо $x,\ y,\ z$ подставить их выражения через новые координаты. Например, уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ в сферической системе координат имеет вид: $\rho=a$.

По аналогии с параметрическими уравнениями линии на плоскости введем параметрические уравнения поверхности.

Определение 2.4. Уравнения $x=x(u,\ v)$, $y=y\,(u,\ v)$, $z=z(u,\ v)$ (или в векторной форме $\vec{r}=\vec{r}\,(u,\ v)=(x(u,\ v),\ \ y(u,v),\ \ z(u,v))$ $((u,v)\in D$, где D – некоторая область) называются параметрическими уравнениями поверхности, если для каждой точки M, принадлежащей поверхности, существует пара чисел $u,\ v\ ((u,\ v)\in D)$, при которой координаты $x,\ y,\ z$ точки M получаются из этих уравнений, и для любой точки, не лежащей на поверхности, такой пары чисел не существует.

Пример 2.5. Параметрические уравнения сферы радиуса a с центром в начале координат имеют вид:

$$\begin{cases} x=a\sin u\cos v; \\ y=a\sin u\sin v; \\ z=a\cos u, \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0\le u\le\pi; \\ 0\le v<2\pi. \end{matrix}$$

Замечание 2.4. Уравнение поверхности, заданной разрешенным (например, относительно z) уравнением $z=f\,(x,\ y)$, всегда можно представить в параметрическом виде:

$$x=u,\quad y=v,\quad z=f\,(u,\ v).$$

3. Уравнение линий в пространстве

Линию в пространстве можно рассматривать как пересечение некоторых двух поверхностей. Пусть $\Phi_1(x,\ y,\ z)=0$ и $\Phi_2(x,\ y,\ z)=0$ есть уравнения двух поверхностей, пересечением которых является данная линия L, тогда координаты любой точки, лежащей на L, удовлетворяют обоим уравнениям и координаты ни одной точки, не лежащей на линии L, не удовлетворяют одновременно обоим уравнениям. Следовательно, система:

$$\begin{cases} \Phi_1(x,\ y,\ z)=0; \\ \Phi_2(x,\ y,\ z)=0 \end{cases} \tag{2.3}$$

определяет линию L.

Замечание 2.5. Линию L можно задать как линию пересечения двух поверхностей бесчисленным множеством способов. Аналитически это означает, что вместо системы (2.3), можно взять любую эквивалентную ей систему.

Существует еще один способ задавать линию в пространстве при помощи параметрических уравнений. Линию L можно рассматривать как траекторию материальной точки, непрерывно движущейся по некоторому закону. Это означает, что координаты точки $M\,(x,\ y,\ z)$ (или радиуса-вектора $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$), лежащей на линии L, являются заданными функциями времени $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ (или в векторной $\vec{r}=\vec{r}\,(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$.

Эти уравнения называются параметрическими уравнениями линиями L в пространстве.

Пример 2.6. Уравнения $x = a\cos(t)$, $y = a\sin(t)$, $z = bt$ задают винтовую линию, лежащую на цилиндре $x^2 + y^2 = a^2$, с шагом винта, равным $2\pi b$.

4. Алгебраические линии и поверхности

Определение 2.5. Алгебраической линией на плоскости (поверхностью в пространстве) называется линия (поверхность), которая в какой-нибудь аффинной системе координат на плоскости (в пространстве) может быть задана уравнением вида:

$$\sum_{i=1}^{s} A_i x_i^{n_i} y_i^{m_i} = 0 \left(\sum_{i=1}^{s} A_i x_i^{n_i} y_i^{m_i} z_i^{p_i} = 0 \right), \tag{2.4}$$

где $A_i \in R$, $A_i \neq 0$, n_i, m_i и p_i – целые неотрицательные числа. Число $N = \max\limits_{1\le i\le s}(n_i + m_i)$ $\left(N = \max\limits_{1\le i\le s}(n_i + m_i + p_i)\right)$ называется порядком алгебраической линии (поверхности).

Пример 2.7. Уравнение $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ определяет алгебраическую линию второго порядка, а уравнение $x + y - z + 2 = 0$, определяет алгебраическую поверхность первого порядка.

Для алгебраических линий (поверхностей) справедлива следующая важная теорема.

Теорема 2.1. Линия (поверхность), которая определяется в какой-нибудь аффинной системе координат алгебраическим уравнением степени N, в любой другой системе таких же координат определяется также алгебраическим уравнением и той же степени N. Иными словами, порядок алгебраической линии (поверхности) есть инвариант преобразований аффинных систем координат (т.е. величина, не меняющаяся при изменении аффинной системы координат).

Доказательство проведем для линии (для поверхности доказывается аналогично). Пусть в системе $0xy$ линия L определяется алгебраическим уравнением степени N, т.е.

$$\sum_{i=1}^{s} A_i x_i^{n_i} y_i^{m_i} = 0, \quad \max_{1\le i\le s}(n_i + m_i) = N. \tag{2.5}$$

При переходе к какой-нибудь другой аффинной системе координат $o'x'y'$ координаты всех точек плоскости преобразуются по формулам (см. гл. 1, § 7, формула (1.24)):

$$\begin{cases} x = a_1 + t_{11}x' + t_{12}y'; \\ y = a_2 + t_{21}x' + t_{22}y'. \end{cases} \tag{2.6}$$

Очевидно, после подстановки x и y из (2.6) в исходное уравнение кривой (2.5) алгебраический характер кривой L, сохранится. Остается показать, что степень вновь полученного уравнения останется неизменной. Это почти очевидно. В самом деле, так как формулы (2.6) имеют относительно x' и y' первую степень, то после подстановки их в (2.5) уравнение линии L в новой системе координат будет иметь степень не выше N. Таким образом, получили, что при переходе от одной аффинной системы координат к любой другой степень алгебраического уравнения повыситься не может. Однако она и понизиться не может, иначе при обратном переходе она должна повыситься, а это, как видели, невозможно. #

§ 2. Прямая на плоскости. Плоскость в пространстве

1. Общее уравнение плоскости (прямой)

Обозначим через π – плоскость (прямую на плоскости). Очевидно, что плоскость (прямая) однозначно определяется заданием точки $P_1(\vec{r}_1) = P_1(x_1, y_1, z_1)(P_1(\vec{r}_1) = P_1(x_1, y_1))$ и ненулевого вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)(\vec{a} = (a_1, a_2))$ ортогонального данной плоскости (прямой). Поставим перед собой задачу: написать уравнение плоскости (прямой), проходящей через точку P_1 и ортогональной заданному вектору $\vec{a} \neq \vec{0}$. Если π – плоскость (прямая), удовлетворяющая данным условиям, то, очевидно, точка $\vec{P}(\vec{r})$ (рис. 26) принадлежит этой плоскости (прямой) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{P_1P} = \vec{r} - \vec{r}_1 \in \pi$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\vec{r} - \vec{r}_1 \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a}(\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$. Таким образом, получили следующее утверждение.

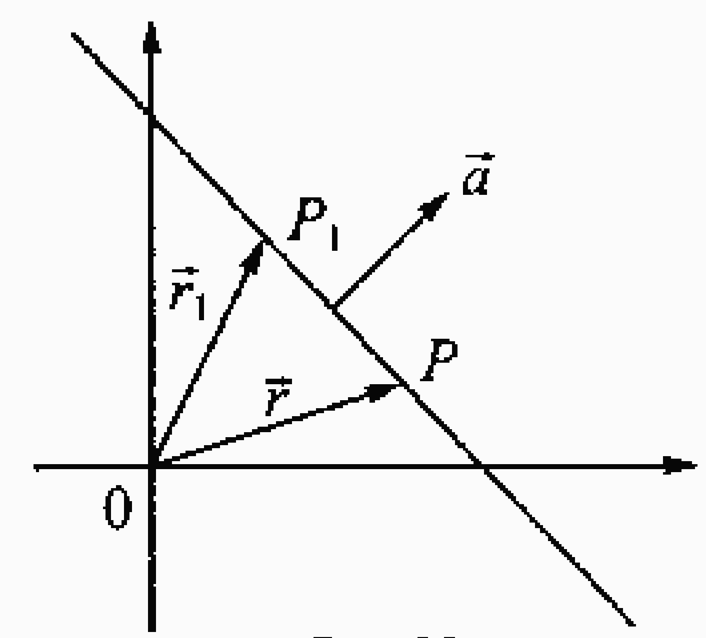

Рис. 26

Утверждение 2.1. Плоскость (прямая) перпендикулярная вектору $\vec{a} \neq \vec{0}$, проходит через точку $P_1(\vec{r}_1)$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}(\vec{r}-\vec{r}_1)=0$, или в координатной записи (в декартовой прямоугольной системе координат):

для плоскости: $a_1(x-x_1)+a_2(y-y_1)+a_3(z-z_1)=0$,

для прямой: $a_1(x-x_1)+a_2(y-y_1)=0$.

Теорема 2.2. В любой декартовой прямоугольной системе координат в пространстве (на плоскости) каждая плоскость (прямая) может быть задана уравнением: $\vec{a}\vec{r}+b=0$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ или в координатной форме $a_1x+a_2y+a_3z+b=0$ $(a_1x+a_2y+b)=0)$. Обратно каждое уравнение $\vec{a}\vec{r}+b=0$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ в декартовой прямоугольной системе координат определяет плоскость (прямую). Иными словами, уравнение $\vec{a}\vec{r}+b=0$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ является общим уравнением плоскости (прямой) в декартовой прямоугольной системе координат.

Доказательство $\Rightarrow$. Пусть задана некоторая плоскость (прямая) π. Как уже отмечалось выше, она однозначно определяется заданием точки $P_1(\vec{r}_1) \in \pi$ и ненулевого вектора $\vec{a} \perp \pi$. Из предыдущего утверждения тогда следует, что уравнение плоскости (прямой) π может быть записано в виде $\vec{a}(\vec{r}-\vec{r}_1)=0$ или $\vec{a}\vec{r}+b=0$, где $b=-(\vec{a}\vec{r}_1)$.

$\Leftarrow$ Пусть задано уравнение $\vec{a}\vec{r}+b=0$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ в декартовой прямоугольной системе координат в пространстве (на плоскости). Так как $\vec{a} \neq \vec{0}$, то найдется такой вектор $\vec{r}_1$, что $\vec{a}\vec{r}_1+b=0$. Вычитая это равенство из заданного уравнения, получаем уравнение $\vec{a}(\vec{r}-\vec{r}_1)=0$, эквивалентное заданному. Последнее уравнение, а следовательно, и заданное в силу вышеупомянутого утверждения определяет плоскость, проходящую через точку $P_1(\vec{r}_1)$ и перпендикулярную вектору $(\vec{a} \neq \vec{0})$. #

Следствие 2.1. Любая плоскость (прямая) в декартовой прямоугольной системе координат определяется уравнением первой степени (линейным уравнением). Обратно, всякое уравнение первой степени в произвольной декартовой прямоугольной системе координат $0xyz$ $(0xy)$ определяет плоскость (прямую).

Замечание 2.6. Ненулевой вектор $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ $(\vec{a}=(a_1, a_2))$ называется нормальным вектором плоскости (прямой).

2. Расстояние от точки до плоскости (прямой)

Пусть в пространстве (на плоскости) задана декартовая прямоугольная система координат и, кроме того, задана плоскость (прямая) π, уравнение которой имеет вид: $\vec{a}\vec{r}+b=0$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$. Поставим перед собой задачу: найти расстояние от произвольной точки $P_0(\vec{r}_0)$ до плоскости (прямой) π.

Обозначим через $P(\vec{r})$ текущую точку π, тогда, очевидно (рис. 27), для расстояния d от точки P_0 до π имеем $d=\left|np_{\vec{a}}(\vec{r}-\vec{r}_0)\right|$.

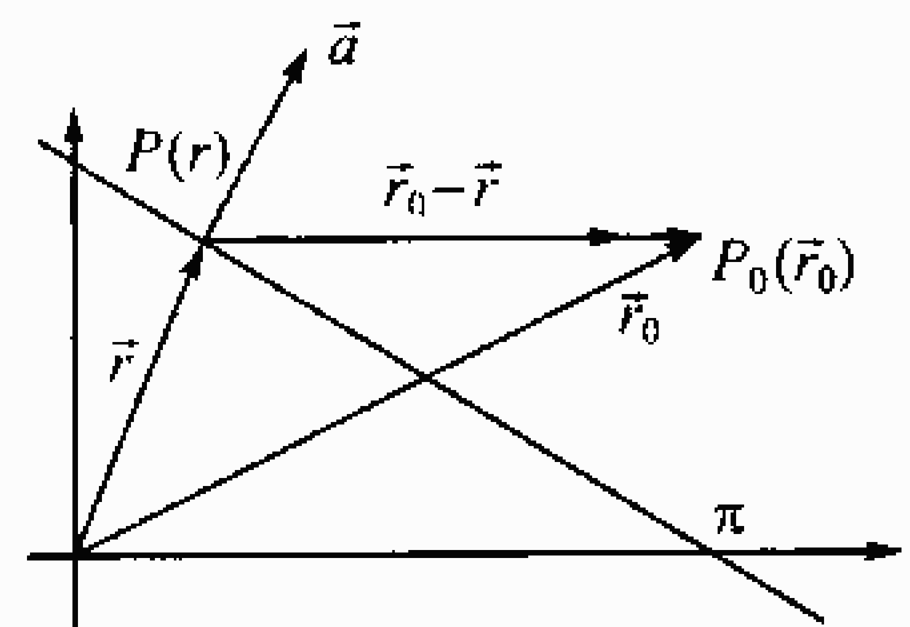

Рис. 27

Умножая обе части этого равенства на $|\vec{a}| \neq 0$, получаем

$$d|\vec{a}|=\left||\vec{a}|np_{\vec{a}}(\vec{r}_0-\vec{r})\right|=$$
$$=\left|\vec{a}(\vec{r}_0-\vec{r})\right|=\left|\vec{a}\vec{r}_0-\vec{a}\vec{r}\right|=\left|\vec{a}\vec{r}_0+b\right|.$$

Здесь воспользовались геометрическими свойствами скалярного произведения (см. гл. 1, § 4, п. 2) и тем, что точка $p(\vec{r}) \in \pi$, т.е. $\vec{a}\vec{r}=-\vec{b}$.

Разделив последнее равенство на $|\vec{a}| \neq 0$, получим

$$d=\frac{\left|(\vec{a},\vec{r_0})+b\right|}{|\vec{a}|}$$

и в координатной форме расстояние от точки P_0

до плоскости $$d=\frac{|a_1x_0+a_2y_0+a_3z_0+b|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

до прямой $$d=\frac{|a_1x_0+a_2y_0+b|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}.$$

Следствие 2.2. Расстояние от начала координат до плоскости (прямой) π

$$d = \frac{|b|}{|\vec{a}|}.$$

3. Нормированное уравнение плоскости (прямой)

Разделив общее уравнение $\vec{a}\vec{r} + b = 0$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ на $|\vec{a}| \neq 0$, получим

$$\vec{n}\vec{r} - p = 0, \qquad (2.7)$$

где $\vec{n} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $p = -\dfrac{b}{|\vec{a}|}$.

Уравнение (2.7) называется нормированным уравнением плоскости (прямой).

Замечание 2.7. Координаты вектора $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ $(|\vec{n}| = 1)$ и число p имеют простой геометрический смысл $n_1 = \cos(\widehat{\vec{n}, ox})$, $n_2 = \cos(\widehat{\vec{n}, oy})$, $n_3 = \cos(\widehat{\vec{n}, oz})$ и $|p|$ – есть расстояние от начала координат до плоскости (прямой).

В координатной записи уравнение (2.7) имеет вид:

для плоскости: $n_1 x + n_2 y + n_3 z - p = 0$, $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$,

для прямой: $n_1 x + n_2 y - p = 0$, $n_1^2 + n_2^2 = 1$.

Замечание $p > 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{r} > 0 \Leftrightarrow$, когда начало координат и $\vec{n}$ лежат по разные стороны от π. $P < 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{r} < 0 \Leftrightarrow$, когда начало координат и $\vec{n}$ лежат по одну сторону от π.

4. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой

Пусть $P_1(\vec{r}_1)$, $P_2(\vec{r}_2)$, $P_3(\vec{r}_3)$ – точки с координатами (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) в декартовой прямоугольной системе координат. Обозначим через (x, y, z) координаты текущей точки $P(\vec{r})$ искомой плоскости π. Очевидно (рис. 28), точка $P(\vec{r}) \in \pi \Leftrightarrow$ векторы $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$, $\vec{r} - \vec{r}_1$ компланарны $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это и есть уравнение искомой плоскости.

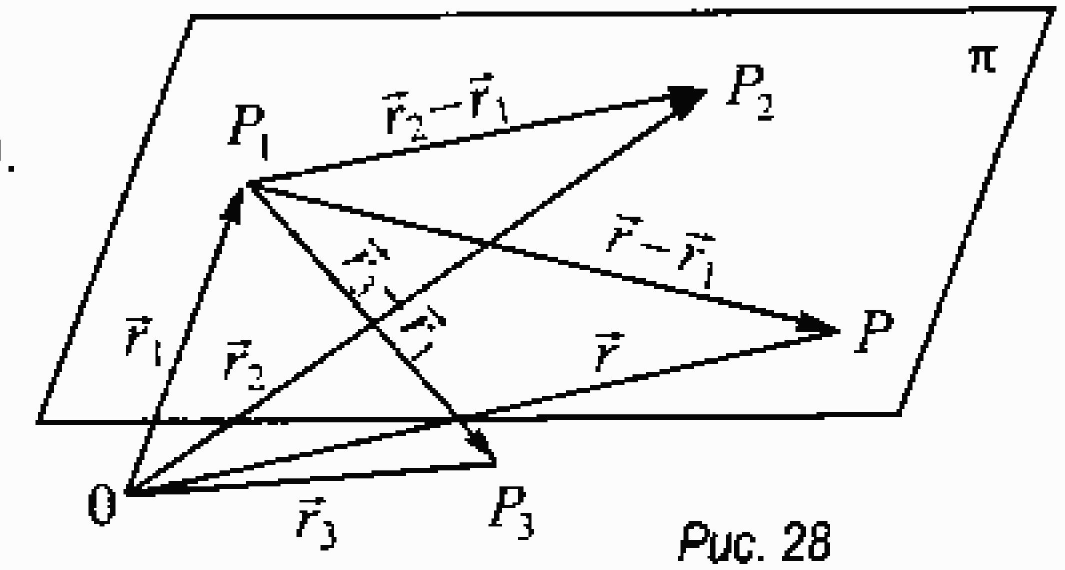

Рис. 28

5. Параметрические уравнения плоскости

Очевидно, любая плоскость однозначно определяется заданием на ней точки P_1 и двух неколлинеарных векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, параллельных плоскости, которые называются направляющими векторами плоскости. Получим уравнения этой плоскости. Очевидно (рис. 29), точка $P(\vec{r})$ принадлежит плоскости $\pi \Leftrightarrow$ векторы $(\vec{r} - \vec{r}_1)$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны. Так как векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ неколлинеарны, то по теореме разложения (гл. 1, § 2, п. 1)

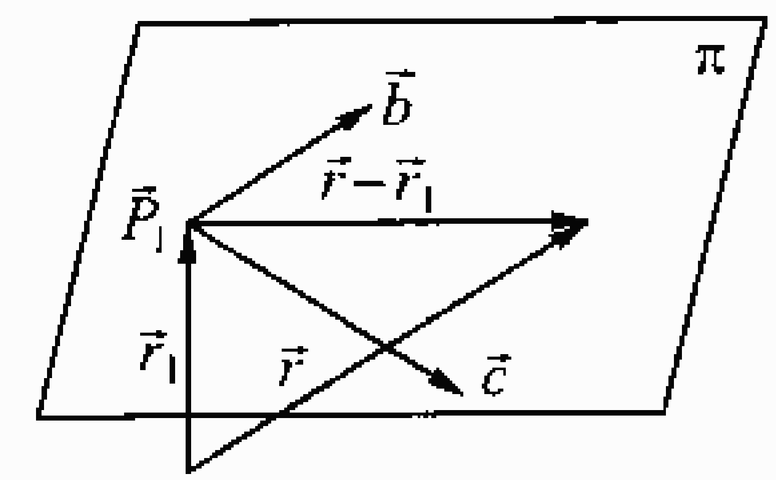

Рис. 29

Найдутся $\lambda, \mu \in R$, такие, что $\vec{r} - r_1 = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$ или

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}. \qquad (2.8)$$

Уравнение (2.8) называется параметрическим уравнением в векторной форме. Если $P_1(r_1) = P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P(r) = P(x, y, z)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ то уравнение (37) можно записать в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda b_1 + \mu c_1, \\ y = y_1 + \lambda b_2 + \mu c_2, \\ z = z_1 + \lambda b_3 + \mu c_3. \end{cases}$$

§ 3. Уравнение прямой в пространстве

1. Параметрические уравнения прямой в пространстве (на плоскости)

Прямая линия в пространстве (или на плоскости) полностью определяется заданием на ней точки $P_1(\vec{r}_1)$ и ненулевого вектора $\vec{b}$, параллельного этой прямой, который называется направляющим вектором этой прямой. Найдем параметрические уравнения прямой L, считая, что известна точка $P_1(\vec{r}_1)\in L$ и ее направляющий вектор $\vec{b}\ (\vec{b}\neq\vec{0})$.

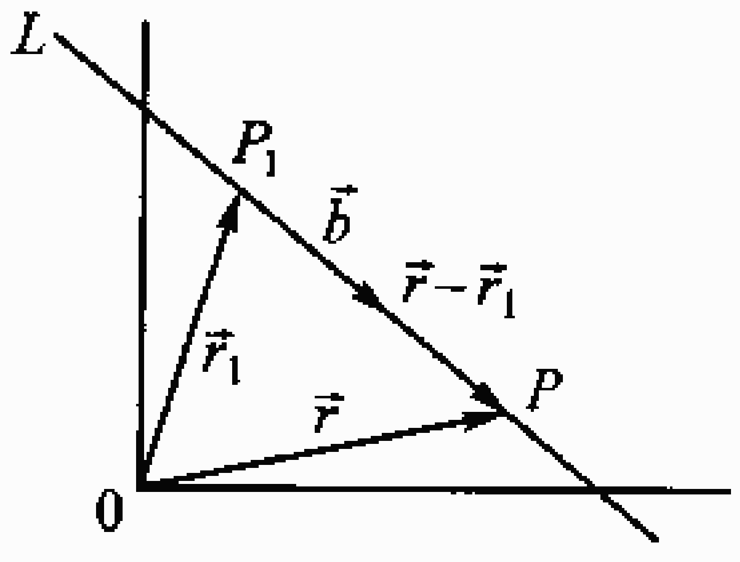

Рис. 30

Очевидно (рис. 30), точка $P(\vec{r})\in L \Leftrightarrow (\vec{r}-\vec{r}_1)\parallel\vec{b}$.

Так как $\vec{b}\neq\vec{0}$, то по теореме разложения (гл. 1, § 2, п. 1) существует такое число $t\in R$, что $\vec{r}-\vec{r}_1=t\vec{b}$, или

$$\vec{r}=\vec{r}_1+t\vec{b}. \qquad (2.9)$$

Уравнение (2.9) называется параметрическим уравнением прямой в векторной форме. В координатной форме это уравнение в пространстве (на плоскости) принимает вид:

$$\begin{cases} x=x_1+b_1t \\ y=y_1+b_2t \\ z=z_1+b_3t \end{cases} \quad \left(\begin{cases} x=x_1+b_1t \\ y=y_1+b_2t \end{cases}\right),$$

где (x,y,z), (x_1,y_1,z_1), (b_1,b_2,b_3) ((x,y), (x_1,y_1), (b_1,b_2)) есть декартовые прямоугольные координаты $P(\vec{r})$, $P_1(\vec{r}_1)$, $\vec{b}$.

2. Каноническое уравнение прямой в пространстве (на плоскости)

В предыдущем пункте было показано, что уравнение прямой, проходящей через точку $P_1(\vec{r}_1)=P_1(x_1,y_1,z_1)$ ($P_1(\vec{r}_1)=P_1(x_1,y_1)$) в направлении вектора $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ($\vec{b}=(b_1,b_2)$), имеет вид: $\vec{r}=\vec{r}_1+t\vec{b}$ $(\vec{b}\neq\vec{0})$. Отсюда следует, что $(\vec{r}-\vec{r}_1)\parallel\vec{b}$, или согласно утверждению 1 (гл. 1, § 5, п. 7) получим

$$\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3} \quad \left(\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}\right).$$

Эти уравнения называются каноническими уравнениями прямой в пространстве (на плоскости).

3. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть $P_1(\vec{r}_1)=P_1(x_1,y_1,z_1)$ и $P_2(\vec{r}_2)=P_2(x_2,y_2,z_2)$ ($P_1(\vec{r}_1)=P_1(x_1,y_1)$, $P_2(\vec{r}_2)=P_2(x_2,y_2)$) – две несовпадающие точки в пространстве (на плоскости). Чтобы написать уравнения прямой, проходящей через точки P_1 и P_2 достаточно принять $P_1(\vec{r}_1)$ за начальную точку, а $\overrightarrow{P_1P_2}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$ за направляющий вектор прямой. Согласно предыдущему пункту уравнения

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\right).$$

являются искомыми.

4. Прямая в пространстве как линия пересечения двух плоскостей

Прямая L в пространстве может быть задана как пересечение двух плоскостей (см. гл. 2, § 1, п. 3):

$$L:\begin{cases} \vec{a}\vec{r}+b=0, \\ \vec{a}'\vec{r}+b'=0, \end{cases} \qquad (2.10)$$

где $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{a}'=(a_1',a_2',a_3')$, $[\vec{a}\cdot\vec{a}']\neq\vec{0}$.

Разумеется, система (2.10) может быть заменена на любую ей эквивалентную. Из канонического уравнения прямой, очевидно, без труда может быть получено уравнение прямой в виде (2.10). Важно уметь делать обратный переход от вида (2.10) к каноническому виду, т.е. уметь находить направляющий вектор $\vec{b}$ прямой и какую-нибудь начальную точку $P_1(\vec{r}_1)$. За направляющий вектор прямой, очевидно, можно взять вектор $\vec{b}=[\vec{a}\cdot\vec{a}']$. Чтобы найти начальную точку прямой, заметим, что из условия $[\vec{a}\cdot\vec{a}']\neq\vec{0}$ следует (см. гл. 1, § 5, п. 7), что хотя бы один из определителей, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_1' & a_3' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_2' & a_3' \end{vmatrix}$ отличен от нуля. Для определенности будем считать, что $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{vmatrix} \neq 0$. Полагая в (2.10) $z = 0$, получаем для определения x и y систему: $\begin{cases} a_1 x + a_2 y + b = 0, \\ a_1' x + a_2' y + b' = 0, \end{cases}$ из которой однозначно определяются x и y (так как прямые на плоскости, определяемые этими уравнениями непараллельны).

§ 4. Основные задачи о прямых и плоскостях

1. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Если прямая задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{b}$, то расстояние от точки $P_0(\vec{r}_0)$ до этой прямой, очевидно,

$$h = \frac{s}{|\vec{b}|} = \frac{|[\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{b}]|}{|\vec{b}|},$$

где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}_0 - \vec{r}_1$ и $\vec{b}$, приведенных к общему началу.

2. Угол между двумя прямыми в пространстве (на плоскости)

Угол между двумя прямыми, очевидно, равен углу между их направляющими векторами. Следовательно, если прямые L_1 и L_2 имеют направляющие векторы соответственно $\vec{b}$ и $\vec{b}'$, то угол φ между ними согласно формуле $\vec{b} \cdot \vec{b}' = |\vec{b}||\vec{b}'|\cos(\widehat{\vec{b}\,\vec{b}'})$, определяющей скалярное произведение $\vec{b}\,\vec{b}'$, может быть вычислен по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{b}\,\vec{b}'}{|\vec{b}| \cdot |\vec{b}'|}$$

Следствие 2.3.

1) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{b} \perp \vec{b}' \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{b}' = 0$,

2) $L \| L \Leftrightarrow \vec{b} \| \vec{b}' \Leftrightarrow [\vec{b} \cdot \vec{b}'] = \vec{0}$, $\Leftrightarrow$

координаты векторов пропорциональны. Если $\vec{b} = (b_1, b_2)$ и $\vec{b}' = (b_1' b_2')$ – направляющие векторы прямых на плоскости, то $[\vec{b} \cdot \vec{b}']$ понимается как векторное произведение векторов с координатами $(b_1, b_2, 0)$, $(b_1', b_2', 0)$.

Замечание 2.8. Если прямые L_1 и L_2 заданы как линии пересечения плоскостей:

$$L_1: \begin{cases} \vec{a}_1 \vec{r} + b_1 = 0, \\ \vec{a}_1' \vec{r} + b_1' = 0, \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} \vec{a}_2 \vec{r} + b_2 = 0, \\ \vec{a}_2' \vec{r} + b_2' = 0, \end{cases}$$

то угол φ между прямыми L_1 и L_2 вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{b}_1 \vec{b}_2}{|\vec{b}_1| \cdot |\vec{b}_2|}, \text{ где } \vec{b}_1 = [\vec{a}_1 \vec{a}_1'],\ \vec{b}_2 = [\vec{a}_2 \vec{a}_2'].$$

3. Угол между двумя плоскостями

Угол между двумя плоскостями, очевидно, совпадает с углом между их нормальными векторами. Следовательно, если плоскости π и π' заданы соответственно уравнениями $\vec{a}\vec{r} + b = 0$ и $\vec{a}'\vec{r} + b' = 0$ $(\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{a}' \neq \vec{0})$, то угол φ между ними вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{a}'}{|\vec{a}| \cdot |\vec{a}'|}.$$

Следствие 2.4. 1) $\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{a}' \Leftrightarrow \vec{a}\vec{a}' = 0$,

2) $\pi \| \pi' \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{a}' \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{a}'] = \vec{0} \Leftrightarrow$ координаты векторов пропорциональны.

Замечание 2.9. Если плоскости π и π' заданы параметрическими уравнениями: $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$ $([\vec{b}\,\vec{c}] \neq \vec{0})$, $\vec{r} = \vec{r}_1' + \lambda\vec{b}' + \mu\vec{c}'$ $([\vec{b}'\vec{c}'] \neq \vec{0})$ то угол φ между плоскостями π и π' вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{[\vec{b}\vec{c}] \cdot [\vec{b}'\vec{c}']}{|[\vec{b}\vec{c}]| \cdot |[\vec{b}'\vec{c}']|}.$$

4. Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой и плоскостью называется угол межу прямой и ортогональной проекцией этой прямой на плоскость. Поскольку угол φ между прямой L и плоскостью π является дополнительным к углу γ между направляющим вектором $\vec{b}$ прямой и нормальным вектором $\vec{a}$ плоскости (рис. 31), то из определения скалярного произведения векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ и равенства $|\cos\gamma| = \sin\varphi$ получим для определения угла φ между прямой L и плоскостью π формулу:

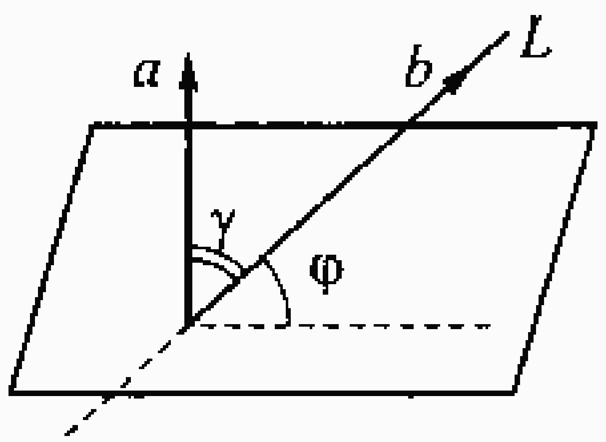

Рис. 31

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{a}\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \quad (\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0}).$$

Следствие 2.5. 1) $L \perp \pi \Leftrightarrow \vec{b} \,||\, \vec{a} \Leftrightarrow [\vec{b}\,\vec{a}] = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}$, где $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$;

2) $L \,||\, \pi \Leftrightarrow \sin\varphi = 0 \Leftrightarrow \vec{b}\vec{a} = 0 \Leftrightarrow b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = 0$.

5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданной плоскости

Уравнение прямой L, проходящей через точку $P_0(\vec{r}_0)$, перпендикулярно плоскости $\pi: \vec{a}\vec{r} + b = 0$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$, очевидно, имеет вид: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, так как за направляющий вектор искомой прямой можно взять нормальный вектор плоскости.

6. Взаимное расположение прямой и плоскости относительно осей координат

Расположение прямой относительно осей координат. Пусть уравнение прямой L, имеет вид:

$$L: a_1x + a_2y + b = 0,$$

где $\vec{a} = (a_1, a_2)$ – нормальный вектор прямой: $\vec{a} \perp L$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$.

Случай 1: $a_1 = 0 \Rightarrow a_2 \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = (0, a_2) \Rightarrow \vec{a} \,||\, oy \Rightarrow L \,||\, ox$ (рис. 32).

Уравнение прямой имеет вид: $y = -\frac{b}{a_2}$.

Случай 2: $a_2 = 0 \Rightarrow a_1 \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = (a_1, 0) \Rightarrow \vec{a} \,||\, ox \Rightarrow L \,||\, oy$.

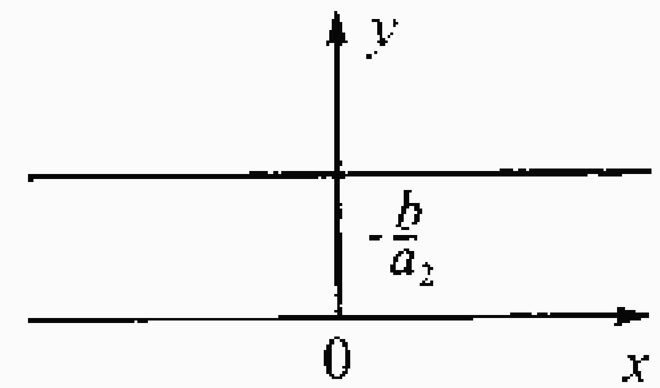

Рис. 32

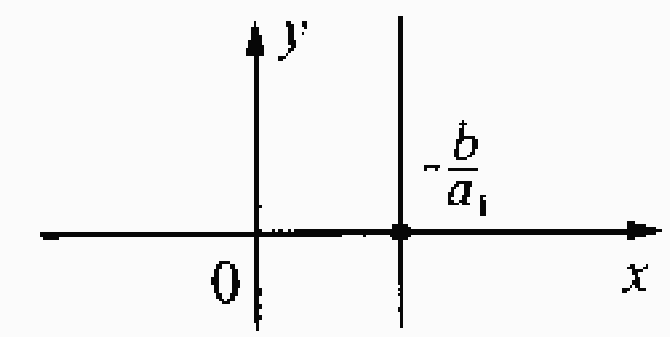

Рис. 33

Уравнение прямой имеет вид: $x = -\frac{b}{a_1}$ (рис. 33).

Случай 3: $b = 0 \Rightarrow L$ проходит через начало координат.

Случай 4: Уравнение прямой «в отрезках».

Пусть $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $b \neq 0$. Разделив уравнение прямой L на $(-b)$, получим

$$\left(-\frac{a_1}{b}\right)x + \left(-\frac{a_2}{b}\right)y = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x}{a_0} + \frac{y}{b_0} = 1, \text{ где } a_0 = -\frac{b}{a_1},\ b_0 = -\frac{b}{a_2}.$$

Это уравнение называется уравнением прямой «в отрезках». Геометрический смысл чисел a_0 и b_0 ясен из рис. 34.

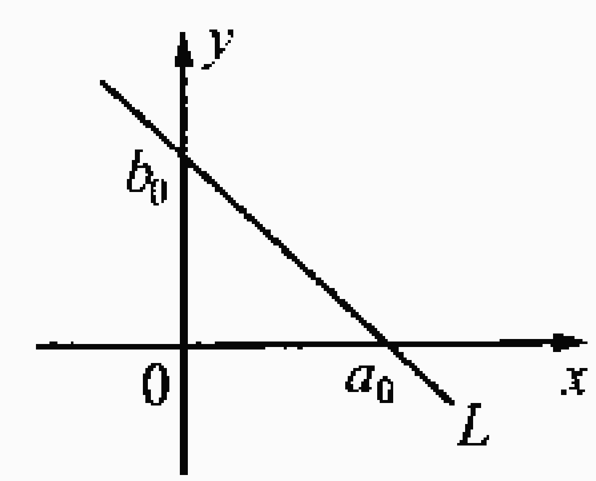

Рис. 34

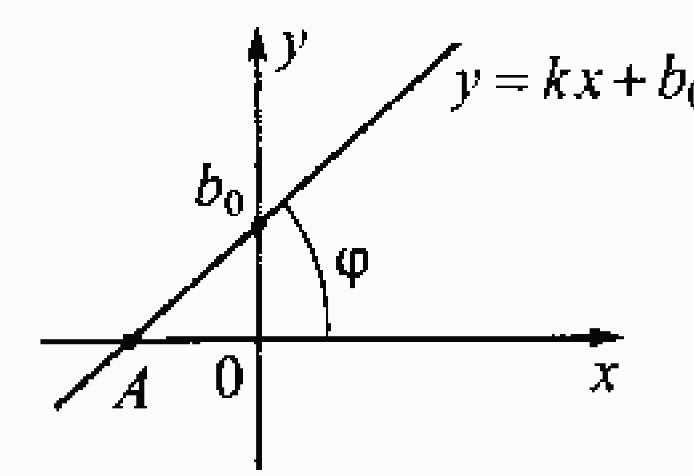

Рис. 35

Случай 5: Уравнение прямой, разрешенное относительно y.

Если $a_2 \neq 0$, то уравнение прямой можно записать в виде: $y = kx + b_0$, где, $k = -\frac{a_1}{a_2}$, $b_0 = -\frac{b}{a_2}$. При $x = 0$, очевидно, $y = b_0$ (рис. 35)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{kx + b_0 - b_0}{x} = k.$$

Следовательно, коэффициенты b_0 и k имеют простой геометрический смысл: b_0 – ордината точки пересечения прямой с осью $0y$; коэффициент k равен тангенсу угла наклона данной прямой к оси $0x$. Углом наклона φ данной прямой к $0x$ называется угол, отсчитываемый от оси $0x$ до данной прямой в том направлении, в котором производится кратчайший поворот от первого базисного вектора ко второму.

Если на плоскости заданы две прямые L_1 и L_2 уравнениями $L_1: y = k_1 x + b_0$; $L_2: y = k_1' x + b_0'$, то угол φ между ними можно вычислить по формуле $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{k_1 - k_1'}{1 + k_1 k_1'}$, где φ_1 и φ_2 – углы наклона прямых L_1 и L_2 соответственно к оси $0x$.

Следствие 2.6:

1) $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_1'$; 2) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_1 k_1' = -1$.

Расположение плоскости относительно осей координат.

Пусть уравнение плоскости имеет вид: $\pi: a_1 x + a_2 y + a_3 z + b = 0$, где $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ – нормальный вектор плоскости: $\vec{a} \perp \pi$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$.

Случай 6: $a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow a_3 \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = (0, 0, a_3) \Rightarrow \vec{a} \| 0z \Rightarrow \pi \|$ плоскости $0xy$ и уравнение плоскости имеет вид: $z = -\dfrac{b}{a_3}$.

Случай 7. $a_1 = a_3 = 0 \Rightarrow a_2 \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = (0, a_2, 0) \Rightarrow \vec{a} \| 0y \Rightarrow \pi \|$ плоскости $0xz$ и уравнение плоскости имеет вид: $y = -\dfrac{b}{a_2}$.

Случай 8: $a_2 = a_3 = 0 \Rightarrow a_1 \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = (a_1, 0, 0) \Rightarrow \vec{a} \| 0x \Rightarrow \pi \|$ плоскости $0yz$ и уравнение плоскости имеет вид: $x = -\dfrac{b}{a_1}$.

Случай 9: $b = 0$, уравнение $a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат.

Случай 10: $a_1 = 0 \Rightarrow \vec{a} = (0, a_2, a_3) \Rightarrow \vec{a} \perp 0x \Rightarrow$ уравнение $a_2 y + a_3 z + b = 0$ определяет плоскость, параллельную оси $0x$.

Случай 11: $a_2 = 0 \Rightarrow \vec{a} = (a_1, 0, a_3) \Rightarrow \vec{a} \perp 0y \Rightarrow$ уравнение $a_1 x + a_3 z + b = 0$ определяет плоскость, параллельную оси $0y$.

Случай 12: $a_3 = 0 \Rightarrow \vec{a} = (a_1, a_2, 0) \Rightarrow \vec{a} \perp 0z \Rightarrow$ уравнение $a_1 x + a_2 y + b = 0$ определяет плоскость, параллельную оси $0z$.

Случай 13: $a_1 = a_2 = b = 0 \Rightarrow a_3 \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = (0, 0, a_3) \Rightarrow \pi \|$ плоскости $0xy$ и проходит через начало координат $\Rightarrow$ плоскость π, определяемая уравнением $a_3 z = 0$, совпадает с плоскостью $0xy$.

Случай 14: $a_1 = a_3 = b = 0 \Rightarrow a_2 \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = (0, a_2, 0) \Rightarrow \pi \|$ плоскости $0xz$ и проходит через начало координат $\Rightarrow$ плоскость π, определяемая уравнением $a_2 y = 0$, совпадает с плоскостью $0xz$.

Случай 15: $a_2 = a_3 = b = 0 \Rightarrow a_1 \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = (a_1, 0, 0) \Rightarrow \pi \|$ плоскости $0yz$ и проходит через начало координат $\Rightarrow$ плоскость π, определяемая уравнением $a_1 x = 0$, совпадает с плоскостью $0yz$.

Случай 16: Уравнение плоскости «в отрезках».

Пусть $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $b \neq 0$. Разделив уравнение плоскости π на $(-b)$, получим $\left(-\dfrac{a_1}{b}\right)x + \left(-\dfrac{a_2}{b}\right)y + \left(-\dfrac{a_3}{b}\right)z = 1$ или положив $a_0 = -\dfrac{b}{a_1}$, $b_0 = -\dfrac{b}{a_2}$, $c_0 = -\dfrac{b}{a_3}$ получим $\dfrac{x}{a_0} + \dfrac{y}{b_0} + \dfrac{z}{c_0} = 1$. Это уравнение называется уравнением плоскости «в отрезках».

Геометрический смысл чисел a_0, b_0, c_0: a_0, b_0, c_0 являются абсциссой, ординатой и аппликатой точек пересечения плоскости π соответственно с осью абсцисс, осью ординат и осью аппликат.

§ 5. Пучок прямых (плоскостей)

Определение 2.6. Пучком прямых на плоскости (плоскостей в пространстве) называется совокупность прямых (плоскостей), проходящих через фиксированную точку (прямую), называемую центром (осью) пучка.

Теорема 2.3. Если $\vec{a}\vec{r} + b = 0$ и $\vec{a}'\vec{r} + b' = 0$ есть уравнения двух различных $(\vec{a} \neq \vec{a}')$ прямых (плоскостей), пересекающихся в некоторой точке S (по прямой L), то при любых α и β, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ уравнение

$$\alpha(\vec{a}\vec{r}+b)+\beta(\vec{a}'\vec{r}+b')=0 \qquad (2.11)$$

определяет прямую линию (плоскость), проходящую через точку S (прямую L). Обратно, каждая прямая (плоскость), проходящая через S (L), определяется уравнением такого же вида при некоторых α и β, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$.

Доказательство: 1) установим, что (2.11) определяет прямую линию (плоскость), проходящую через S (L). Для этого запишем (2.11) в виде:

$$(\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}')\vec{r}+(\alpha b+\beta b')=0.$$

При $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$, очевидно, вектор $\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}' \neq \vec{0}$, так как $\vec{a}$ не параллелен $\vec{a}'$, и, следовательно, выписанное уравнение определяет прямую линию (плоскость). Очевидно также, что эта прямая (плоскость) проходит через точку S (прямую L), так как координаты точки S (любой точки на прямой L) удовлетворяют как уравнению $a'\vec{r}+b=0$, так и уравнению $\vec{a}'\vec{r}+b'=0$, а следовательно, и (2.11). Таким образом, уравнение вида (2.11) при любых α и β, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$ определяет прямые (плоскости) пучка с центром S (осью L).

2) Для доказательства обратного утверждения заметим, что каждая прямая (плоскость) пучка с центром S (осью L), определяется заданием, кроме точки S (прямой L), еще одной своей точки $P(\vec{r}*) \neq S$ $(P(\vec{r}*) \notin L)$ и, следовательно, для доказательства утверждения достаточно показать, что в уравнении (2.11) числа α и β, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$ всегда можно подобрать так, чтобы определяемая ими прямая (плоскость) прошла через любую наперед заданную точку $P(\vec{r}*)$. Но это очевидно: в самом деле, если прямая (плоскость), определяемая уравнением (2.11), проходит через $P(\vec{r}*)$, то $\alpha(\vec{a}\vec{r}*+b)+\beta(\vec{a}'\vec{r}*+b')=0$. Так как точка $P(\vec{r}*) \neq S$ $(P(\vec{r}*) \notin L)$, то числа $\vec{a}\vec{r}*+b$ и $\vec{a}'\vec{r}*+b'$ одновременно в нуль не обращаются. Поэтому можно положить $\alpha=\vec{a}'\vec{r}*+b'$, $\beta=-(\vec{a}\vec{r}*+b)$. #

Задачи к Главе 2

1) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1;\,2)$ и перпендикулярной биссектрисе первого и третьего координатных углов.

2) Даны вершины треугольника A (1; 2); B (2; 1); C (4; 3). Найти расстояние от точки C до медианы, проведенной из вершины A.

3) Стороны треугольника заданы уравнениями

$$x+2y-4=0,\ \ 2x-y+1=0\ \text{ и }\ x+y+1=0.$$

Составить уравнения биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине треугольника, образованного пересечением первых двух прямых.

4) Составить уравнение перпендикуляра из вершины B на биссектрису внутреннего угла при вершине A треугольника ABC, где A (3; 1); B (7; 3); C (11; –3).

5) Составить уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}.$$

6) Определить расстояние между двумя прямыми

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{3};\quad \begin{cases}2x-y-2=0,\\ 3y-2z-4=0.\end{cases}$$

7) Определить расстояние между двумя прямыми

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0};\quad \begin{cases}x-1=0,\\ y-z=0.\end{cases}$$

8) Составить уравнение прямой, лежащей в плоскости $x-2y+$ $+z-2=0$, проходящей через точку пересечения этой плоскости и прямой $x=1+t$, $y=2-t$, $z=1+t$ и перпендикулярной последней прямой.

9) Выяснить, пересекаются ли прямые $x=1-t$, $y=2+t$, $z=1-2t$, $x=t$, $y=3+t$, $z=-1-t$.

10) Найти точку Q, симметричную точке P (2; – 5; 7) относительно прямой, проходящей через точки M_1 (5; 4; 6) и M_2 (– 2; – 17; – 8).

§ 1. Каноническое уравнение эллипса, его свойства и построение

1. Каноническое уравнение эллипса

Определение 3.1. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, таких, что сумма расстояний от любой точки до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная. Фокусы эллипса принято обозначать F_1 и F_2.

Замечание 3.1. Если фокусы F_1 и F_2 совпадают, то эллипс представляет собой окружность.

Обозначим расстояние между фокусами через $2c$, а постоянную, о которой говорится в определении эллипса,– через $2a$. Сумма расстояний произвольной точки P от фокусов F_1 и F_2, очевидно, не может быть меньше расстояния между фокусами F_1 и F_2, т.е. $a \geq c$, причем $a = c$ тогда и только тогда, когда точка P находится на отрезке $\{F_1, F_2\}$. Следовательно, если $a = c$, то эллипс вырождается в отрезок $[F_1, F_2]$. Этот случай естественно исключить из рассмотрения. Будем считать в дальнейшем $a > c$. Если нам дан какой-нибудь эллипс с фокусами F_1 и F_2 то введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат, оси которой расположим специальным образом по отношению к данному эллипсу: ось $0x$ проведем через фокусы F_1 и F_2, считая ее направленной от F_1 к F_2, начало координат поместим в середине отрезка $[F_1, F_2]$ (рис. 36). Выведем уравнение эллипса в этой системе координат. Пусть $P(x, y)$ – произвольная точка эллипса.

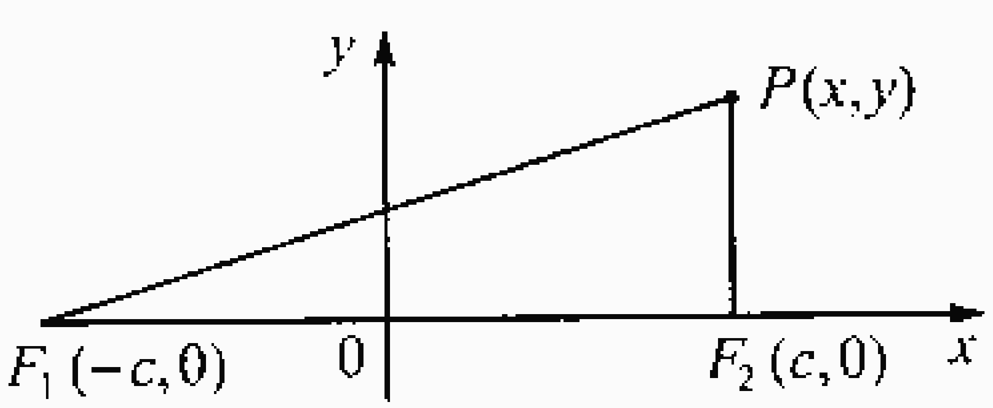

Рис. 36

Фокусы F_1 и F_2, очевидно, имеют соответственно координаты $(-c, 0)$, $(c, 0)$. Обозначим через r_1 и r_2 расстояния от точки P до фокусов F_1 и F_2 соответственно (числа r_1 и r_2, называются фокальными радиусами точки P). Точка P будет находиться на данном эллипсе тогда и только тогда, когда

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{3.1}$$

Так как $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, то (3.1) примет вид:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{3.1a}$$

Это и есть уравнение заданного эллипса в нашей специальной системе координат. Запишем это уравнение в более простом виде. Для этого перенесем второй радикал в правую часть. Возводя после этого обе части уравнения в квадрат, получаем

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

или (после очевидных преобразований)

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Вводя обозначение $b^2 = a^2 - c^2$ $(a > c)$, получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.2}$$

Покажем, что уравнение (3.2) есть уравнение нашего эллипса. Для этого достаточно показать, что (3.2) эквивалентно (3.1). Доказано только, что любая точка $P(x, y)$, удовлетворяющая (3.1), удовлетворяет и (3.2). Остается показать, что любая точка $P(x, y)$ удовлетворяющая уравнению (3.2), есть точка эллипса, т.е. для нее справедливо $r_1 + r_2 = 2a$. Итак, пусть координаты точки $P(x, y)$ удовлетворяют (3.2). Подставляя значение y^2 из (3.2) в выражение для $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, после несложных преобразований получим: $r_1 = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2}$. Так как $\frac{c}{a} < 1$ и $|x| \leq a$ (последнее неравенство следует из (3.2)), то $a + \frac{c}{a}x > 0$ и, следовательно, $r_1 = a + \frac{c}{a}x$. Аналогично показывается, что $r_2 = a - \frac{c}{a}x$. Таким образом, получаем $r_1 + r_2 = 2a$, точка $P(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (3.2), принадлежит нашему эллипсу. Уравнение (3.2) называется каноническим уравнением эллипса.

2. Свойства эллипса и его построение

Из уравнения (3.2) получим следующие свойства эллипса.

1. Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии (главные оси эллипса) и центр симметрии (центр эллипса).

В самом деле, в уравнении (3.2) x и y фигурируют в четных степенях. Следовательно, если точка $P(x, y)$ лежит на нашем эллипсе, т.е. удовлетворяет уравнению (3.2), то тем же свойством обладает точка $P_1(x, -y)$, симметричная точке P относительно оси абсцисс, точка $P_2(-x, y)$, симметричная точке P относительно оси ординат, а также точка $P_3(-x, -y)$, симметричная точке P относительно начала координат. Таким образом, оси координат являются главными осями эллипса, а начало координат - центром эллипса.

2. Весь эллипс содержится внутри прямоугольника $|x| \le a$, $|y| \le b$ касаясь его в точках $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm b)$. Это свойство немедленно следует из уравнения (3.2)

Точки $A(-a, 0)$, $B(0, b)$, $C(a, 0)$ и $D(0, -b)$, т.е. точки пересечения эллипса с осями координат, называются вершинами эллипса. Очевидно, длины отрезков, образованных пересечением эллипса с осями, равны $2a$ и $2b$. Так как $a > b$ $(b = \sqrt{a^2 - c^2})$, то главная ось, образующая в пересечении с эллипсом отрезок $2a$, называется большой осью эллипса. Другая главная ось называется малой осью эллипса. Числа a и b являются соответственно длинами большой и малой полуосей эллипса.

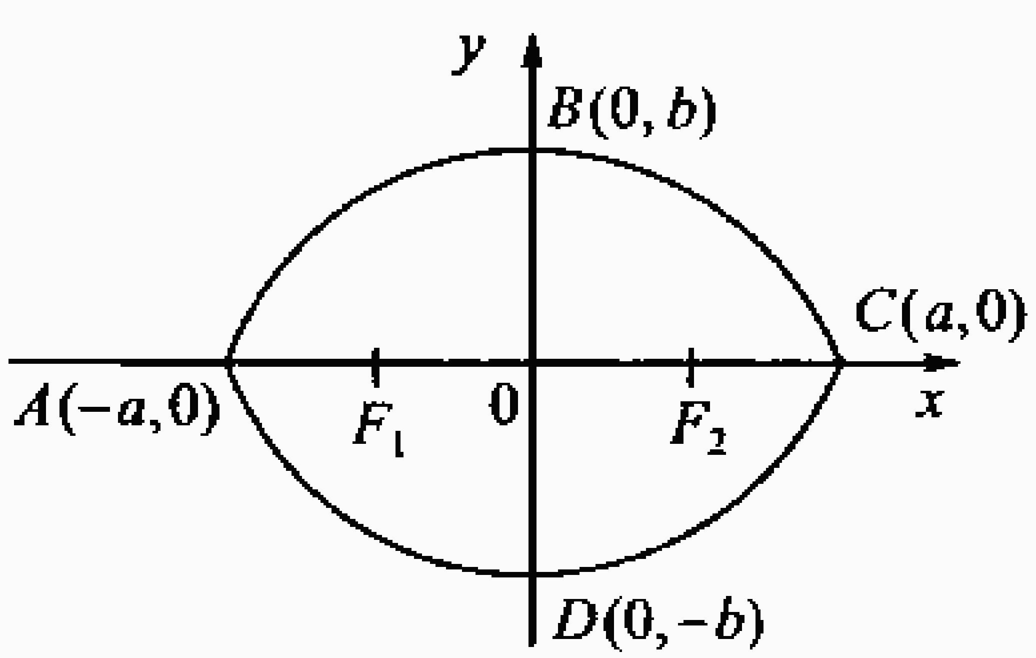

Рис. 37

3. Эллипс может быть получен посредством равномерного растяжения (сжатия) окружности (преобразование $\bar{x} = k_1 x$, $\bar{y} = k_2 y$, называется преобразованием растяжения с коэффициентом k_1 вдоль оси $0x$ и k_2 вдоль оси $0y$). Действительно, после преобразования $\bar{x} = x$, $\bar{y} = \frac{b}{a} y$ окружность $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ перейдет в эллипс $\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{a^2} = 1$.

Из свойств эллипса и формулы (3.2) нетрудно представить себе, как будет выглядеть график эллипса (рис. 37).

Замечание 3.2. Число $l = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса; оно всегда < 1. Для окружности эксцентриситет равен нулю.

§ 2. Каноническое уравнение гиперболы, ее свойства и построение

1. Каноническое уравнение гиперболы

Определение 3.2. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная. Эту постоянную обозначим через $2a$. Точки F_1 и F_2 называются фокусами гиперболы. Расстояние между ними обозначается через $2c$ и называется фокусным расстоянием.

Естественно считать, что фокусы F_1 и F_2 не совпадают $(c > 0)$ (иначе, если $a \ne 0$, то ни одна точка плоскости не может удовлетворять определению гиперболы. Если же $a = 0$, то любая точка плоскости удовлетворяет определению гиперболы).

Замечание 3.3. Очевидно, $a \le c$, причем геометрическое место точек, для которых $a = c$ представляет собой множество точек прямой $F_1 F_2$, за исключением точек интервала (F_1, F_2). Естественно этот случай исключить из рассмотрения. В дальнейшем будем считать $a < c$. Будем также считать, что $a > 0$ (так как в случае $a = 0$ геометрическое место точек, удовлетворяющих определению гиперболы, представляет собой прямую, перпендикулярную к отрезку $F_1 F_2$ в его середине. Если нам дана какая-нибудь гипербола с фокусами F_1 и F_2, то для вывода ее уравнения выберем начало координат в середине отрезка $[F_1, F_2]$, а оси $0x$ и $0y$ направим так, как указано на рис. 36.

Пусть $P(x, y)$ – произвольная точка гиперболы. Фокусы F_1 и F_2 имеют, очевидно, координаты $(-c, 0)$, $(c, 0)$. Обозначим через r_1 и r_2 расстояния от точки P до фокусов F_1 и F_2 соответственно. Точка P будет находиться на данной гиперболе тогда и только тогда, когда

$$|r_1 - r_2| = 2a \tag{3.3}$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \tag{3.3a}$$

Это и есть уравнение заданной гиперболы в нашей специальной системе координат. Запишем это уравнение в более простом виде. Используя стандартный прием «уничтожения радикалов» (см. гл. 3, § 1, п. 1), приведем уравнение (3.3*a*) к виду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.4}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Покажем, что уравнение (3.4) есть уравнение нашей гиперболы. Для этого достаточно показать, что (3.4) эквивалентно уравнению (3.3). Пока доказано только, что любая точка, удовлетворяющая (3.3), удовлетворяет и (3.4). Остается показать, что любая точка $P(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (3.4), есть точка гиперболы, т.е. выполняется равенство $|r_1 - r_2| = 2a$. Рассуждая так же, как при выводе уравнения эллипса (см. гл. 3, § 1, п. 1), нетрудно показать, что

$$r_1 = \begin{cases} a + \dfrac{c}{a}x, & x > 0, \\ -a - \dfrac{c}{a}x, & x < 0, \end{cases} \qquad r_2 = \begin{cases} -a + \dfrac{c}{a}x, & x > 0, \\ a - \dfrac{c}{a}x, & x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, для точки $P(x, y)$, удовлетворяющей уравнению (3.4), имеем $|r_1 - r_2| = 2a$ и, следовательно, $P(x, y)$ принадлежит нашей гиперболе. Уравнение (3.4) называется каноническим уравнением гиперболы.

Замечание 3.4. Число $l = \dfrac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы; оно всегда больше единицы.

2. Свойства гиперболы и ее построение

Из уравнения (3.4) получим следующие свойства гиперболы.

1. Гипербола имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии (главные оси гиперболы) и центр симметрии (центр гиперболы).

Справедливость указанного свойства доказывается так же, как доказывалось аналогичное свойство для эллипса (см. гл. 3, § 1, п. 2).

2. В полосе $-a < x < a$ ограниченной прямыми $x = \pm a$ (на рис. 38 эта полоса заштрихована), нет точек гиперболы.

Действительно, переписывая уравнение гиперболы (3.4) в виде $\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x^2}{a^2} - 1$, замечаем, что левая часть всегда неотрицательна и, следовательно, $|x| \geq a$. #

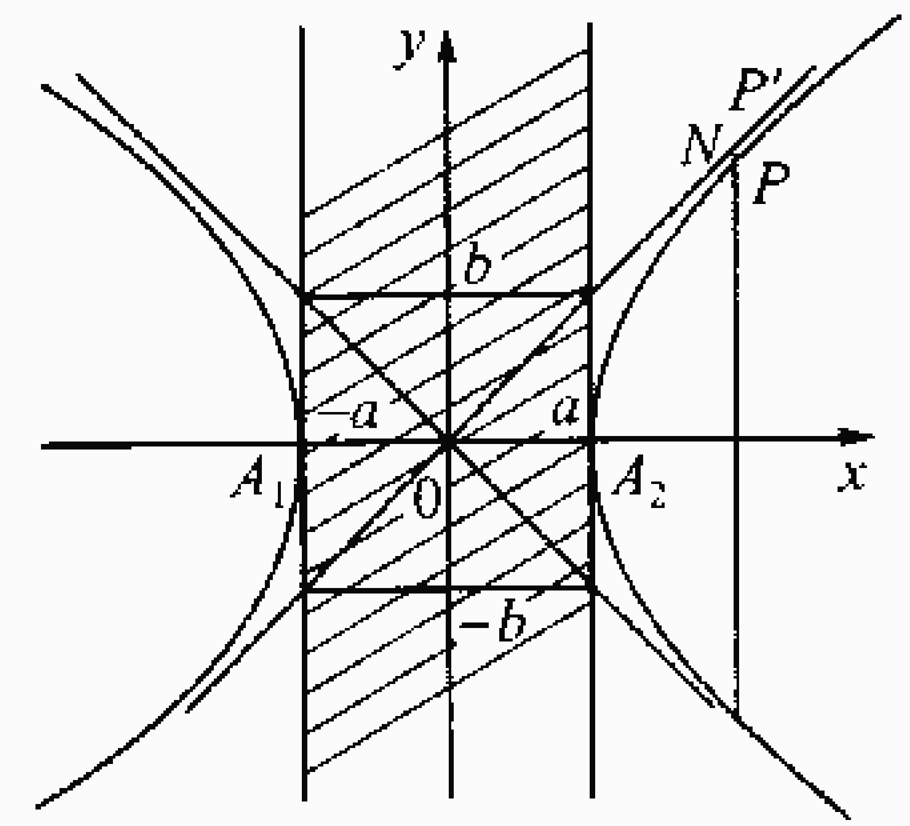

Рис. 38

Из этого утверждения следует, что все точки гиперболы лежат или вправо от прямой $x = a$ (правая ветвь гиперболы), или влево от прямой $x = -a$ (левая ветвь гиперболы), кроме двух точек $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ (вершин гиперболы), лежащих на этих прямых и являющихся точками пересечения гиперболы с фокальной осью (т.е. осью, на которой лежат фокусы гиперболы). Эта ось (в нашем случае ось $0x$) называется действительной осью гиперболы. Отметим, что с осью $0y$ гипербола не имеет точек пересечения. Эта ось называется мнимой осью гиперболы.

Основным прямоугольником гиперболы называется прямоугольник (см. рис. 38), ограниченный прямыми, параллельными действительной и мнимой осям гиперболы и отстоящими от них соответственно на расстоянии b и a. (Числа a и b являются соответственно длинами вещественной и мнимой полуосей гиперболы.) Прямые $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, являющиеся диагоналями основного прямоугольника» называются асимптотами гиперболы (см. рис. 38).

В силу симметрии гиперболы относительно осей координат для исследования ее формы достаточно рассмотреть лишь часть гиперболы, лежащую в первой координатной четверти, т.е. мы должны исследовать функцию $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ при $x \ge a$.

3. График части гиперболы $y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ при $x \ge a$ лежит ниже асимптоты (прямой $y=\frac{b}{a}x$) и при удалении точки P гиперболы в бесконечность, т.е. при $x \to +\infty$, расстояние PN от точки P гиперболы до прямой $y=\frac{b}{a}x$ стремится к нулю.

Возьмем произвольное $x\,(x \ge a)$. Ей соответствует точка $P'(x, y)$ гиперболы с абсциссой x и точка $P(x, Y)$ асимптоты с той же абсциссой x. При этом $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $Y=\frac{b}{a}x$. Очевидно,

$$Y-y=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Разность эта всегда положительна, следовательно, точка P гиперболы все время остается под точкой P' асимптоты. Кроме того, при неограниченном возрастании x эта разность, монотонно убывая, стремится к нулю, т.е. расстояние PP'; а следовательно, и PN (так как $0<PN<PP'$) стремится к нулю. Из формулы (3.4) и свойств гиперболы в целом ясен общий вид гиперболы (см. рис. 38). #

Замечание 3.5. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, определяет в нашей специальной системе координат гиперболу, которая называется сопряженной при одних и тех же a и b по отношению к гиперболе, определяемой уравнением (3.4). Очевидно, что сопряженная гипербола имеет те же асимптоты, что и данная. Для сопряженной гиперболы ось $0y$ – действительная ось, а $0x$ – мнимая. Вершинами ее, очевидно, являются точки $(0,-b)$, $(0, b)$.

§ 3. Каноническое уравнение параболы, ее свойства и построение

1. Каноническое уравнение параболы

Определение 3.3. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки F плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой. (Предполагается, что эта прямая не проходит через фокус.)

Обозначим расстояние от фокуса F до директрисы D буквой P. Пусть дана какая-нибудь парабола (и, следовательно, задано число P). Для вывода уравнения этой параболы введем на плоскости специальную декартовую прямоугольную систему координат: ось абсцисс проведем через фокус перпендикулярно к директрисе и будем считать направленной от директрисы к фокусу, начало координат расположим посередине между фокусом и директрисой (рис. 39). В этой системе координат фокус F, очевидно, имеет координаты $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

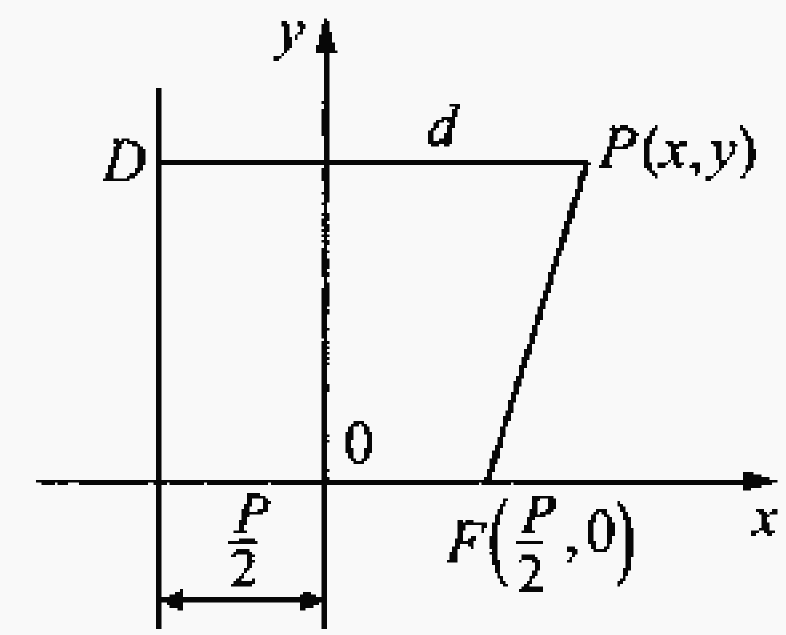

Рис. 39

Пусть $P(x, y)$ – произвольная точка параболы. Обозначим через r расстояние от точки P до фокуса F, а через d расстояние от точки P до директрисы. Точка P будет находиться на данной параболе тогда и только тогда, когда $r = d$,
что, очевидно, эквивалентно равенству:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2} \qquad (3.5)$$

Очевидно, эта формула верна только при $x \ge 0$ (при $x<0$, как легко видеть, всегда $r>d$).

Уравнение (3.5) и есть уравнение заданной параболы в нашей специальной системе координат. Запишем это уравнение в более простом виде. Возводя обе части (3.5) в квадрат и приводя подобные члены, получаем

$$y^2=2px. \qquad (3.6)$$

Покажем, что уравнение (3.6) есть уравнение нашей параболы. Для этого достаточно показать, что (3.6) эквивалентно (3.5). Пока доказано только, что любая точка $P(x, y)$ удовлетворяющая (3.5), удовлетворяет и (3.6). Остается показать, что любая точка $P(x, y)$, удовлетворяющая (3.6), удовлетворяет и (3.5). Очевидно, если точка (x, y) удовлетворяет (3.6), то $x \geq 0$. Подставляя из (3.6) y^2 в выражение $r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, получаем $r = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$, так как $x \geq 0$, что, очевидно, равно d. Таким образом, рассматриваемая точка лежит на параболе. Уравнение (3.6) называется каноническим уравнением параболы, а p-параметром параболы.

2. Свойства параболы и ее построение

Из уравнения (3.6) получим следующие свойства параболы.

1. Парабола имеет ось симметрии (ось параболы). Осью симметрии, очевидно, является ось $0x$. Точка пересечения параболы с осью называется вершиной параболы. Вершиной параболы (3.6) является начало координат.

2. Вся парабола расположена в правой полуплоскости плоскости $0xy$. Так как $p > 0$, то это свойство немедленно следует из (3.6).

Из свойств параболы и формулы (3.6) нетрудно представить себе, как будет выглядеть график параболы (рис. 40).

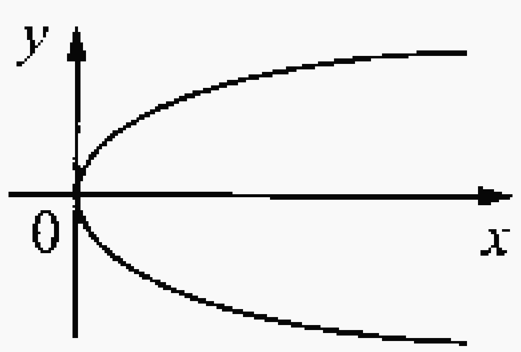

Рис. 40

Замечание 3.6. Уравнение $y^2 = -2px$ (при $p > 0$) также определяет параболу, ось которой совмещена с осью $0x$, вершина – с началом координат, но которая расположена в левой полуплоскости.

§ 4. Исследование линий второго порядка, заданных уравнениями общего вида

Общее уравнение линии второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (3.7)$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля (т.е. $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$).

Коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} называются коэффициентами группы старших членов, коэффициенты a_{13}, a_{23} и a_{33} – коэффициентами линейной части уравнения (3.7). Коэффициент a_{33} называют также свободным членом уравнения (3.7).

Линия Z, определяемая этим уравнением и рассматриваемая как геометрический объект, не меняется, если от данной декартовой системы координат перейти к другой декартовой системе координат. Отметим, кроме того, что в силу теоремы о сохранении порядка алгебраической линии при переходе от одной декартовой системы координат к другой декартовой системе координат исходное уравнение (3.7) и уравнение, полученное после преобразования координат, алгебраически эквивалентны.

Поставим следующую задачу. Найти такую декартовую систему координат, в которой уравнение (3.7) примет настолько простой вид, что геометрическая характеристика линии, определяемой этим уравнением, не будет представлять затруднений. Так как переход от одной декартовой прямоугольной системы координат к другой декартовой прямоугольной системе координат может быть осуществлен некоторым параллельным переносом системы координат и последующего поворота, то для решения поставленной задачи необходимо знать, как преобразуются коэффициенты уравнения (3.7) при параллельном переносе и повороте.

1. Изменение коэффициентов общего уравнения линии второго порядка при параллельном переносе

Пусть декартова прямоугольная система координат $O'x'y'$ получена параллельным переносом системы Oxy вдоль вектора $\overline{OO'} = (x_0, y_0)$. Как известно (см. гл. 1, § 7), старые (x, y) и новые (x', y') координаты точки M связаны соотношениями:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases} \qquad (3.8)$$

Подставляя выражения (3.8) для x и y в левую часть (3.7), получаем уравнение линии Z в системе $O'x'y'$. Очевидно, это уравнение имеет вид:

$$a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \qquad (3.9)$$

$$\text{где} \quad \begin{cases} a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \\ a'_{23} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}, \\ a'_{33} = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}. \end{cases} \qquad (3.10)$$

Следовательно, можно сделать следующий важный вывод: при параллельном переносе системы координат коэффициенты при старших членах линии второго порядка не изменяются, а коэффициенты линейной части изменяются по формулам (3.10). Заметим, что свободный член a'_{33}, вычисляется подстановкой в левую часть уравнения (3.7) координат нового начала вместо текущих координат.

Осуществляя параллельный перенос координат, новое начало $O'(x_0, y_0)$ иногда можно выбрать так, чтобы в уравнении (3.9) исчезли члены первой степени, т.е. так, чтобы коэффициенты a'_{13}, и a'_{23} равнялись нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{cases} \qquad (3.11)$$

Тогда уравнение (3.9) примет в новой системе $O'x'y'$ вид:

$$a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + a'_{33} = 0\,. \qquad (3.12)$$

Очевидно, если (a, b) – любая точка, принадлежащая линии, определяемой уравнением (3.12), то и симметричная ей относительно O' точка $(-a, -b)$ лежит на этой линии, т.е. все точки данной линии располагаются симметрично относительно точки O'. Точка $O'(x_0, y_0)$, обладающая указанным свойством, называется центром данной линии. Таким образом, для нахождения координат x_0, y_0 центра данной линии необходимо найти решение системы (3.11).

Уравнения (3.11) называются уравнениями центра линии второго порядка. Наличие центра у линии второго порядка связано с разрешимостью уравнений центра (3.11). Если уравнения центра имеют единственное решение, то линию Z второго порядка называют центральной. В силу теоремы Крамера имеем: для того, чтобы кривая Z, определяемая уравнением (3.7), была центральной, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы:

$$J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ был отличен от нуля.}$$

2. Изменение коэффициентов общего уравнения линии второго порядка при повороте системы координат

Поворот системы координат на угол φ задается формулами (гл. 1, § 7):

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases} \qquad (3.13)$$

Подставляя выражения (3.13) для x и y в левую часть (3.7), получаем уравнение Z в новой системе $Ox'y'$. Очевидно, это уравнение имеет вид:

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0, \qquad (3.14)$$

$$\text{где} \quad \begin{cases} a'_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi, \\ a'_{12} = -a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\cos\varphi\sin\varphi, \\ a'_{22} = a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\cos^2\varphi, \\ a'_{13} = a_{12}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi, \\ a'_{23} = -a_{13}\sin\varphi + a_{23}\cos\varphi. \end{cases} \qquad (3.15)$$

Выберем угол φ поворота осей так, чтобы после преобразования в уравнении линии исчез член с произведением текущих координат, т.е. так, чтобы в уравнении (3.14) $a'_{12} = 0$. Учитывая (3.15), для определения угла φ получаем уравнение:

$$a_{12}\sin^2\varphi + (a_{11} - a_{22})\sin\varphi\cos\varphi - a_{12}\cos^2\varphi = 0\,. \qquad (3.16)$$

Можно считать, что в этом уравнении $a_{12} \neq 0$ (иначе нет надобности в повороте осей). Но если $a_{12} \neq 0$, то, как легко заметить из (3.16), $\cos\varphi \neq 0$ Разделив все члены уравнения (3.16) на $\cos^2\varphi$, приведем его к виду

$$a_{12}\,\mathrm{tg}^2\varphi - (a_{22} - a_{11})\,\mathrm{tg}\,\varphi - a_{12} = 0 \qquad (3.17)$$

Откуда

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}. \qquad (3.18)$$

Формула (3.18) определяет два значения $\mathrm{tg}\,\varphi$, одно из них будет положительным, а другое отрицательным. Для решения поставленной задачи можно выбрать любое из этих значений. Отметим, что $\operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 = -1$ (следует из теоремы Виета). Это означает, что для уравнения (3.7) всегда найдутся два взаимно ортогональных направления, определяемые углами φ_1, φ_2, такие, что, поворачивая координатные оси на один из этих углов, в новой системе получаем уравнение линии, в котором отсутствует член с произведением текущих координат (т.е. $a'_{12} = 0$).

После поворота на угол φ, тангенс которого определен по формуле (3.18), уравнение линии Z примет вид

$$a'_{11}(x')^2 + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + a'_{23}y' + a_{33} = 0.$$

Коэффициенты a'_{11}, a'_{22}, a'_{13} и a'_{23} определяют по формулам (3.15), предварительно определив $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ по известному $\operatorname{tg}\varphi$:

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}. \qquad (3.19)$$

Знаки в знаменателях этих формул выбираются произвольно, но обязательно одинаковыми.

3. Инварианты линии второго порядка

Назовем инвариантом линии второго порядка относительно преобразований декартовой системы координат такую функцию $f(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33})$ от коэффициентов a_{ij} этого уравнения, значение которой не меняются при переходе к новой декартовой прямоугольной системе координат, т.е. $f(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}) = f(a'_{11}, a'_{12}, \ldots, a'_{33})$. Имеет место следующая теорема.

<u>Теорема 9.</u> Величины $J_1 = a_{11} + a_{22}$, $J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ являются инвариантами уравнения (3.7) линии второго порядка относительно преобразований декартовой прямоугольной системы координат.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать инвариантность J_1 и J_2 отдельно для параллельного переноса системы координат и для поворота.

Для параллельного переноса справедливость утверждения теоремы следует из того, что коэффициенты группы старших членов при параллельном переносе системы координат не изменяются.

При повороте системы координат согласно (3.15) имеем:

$$J'_1 = a'_{11} + a'_{22} = a_{11}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + a_{22}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = a_{11} + a_{22} = J_1;$$

$$J'_2 = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix} = a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = (a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi) \times$$

$$\times (a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\cos^2\varphi) - \Big[a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) +$$

$$(a_{22} - a_{11})\cos\varphi\sin\varphi\Big]^2 = \left[\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) + a_{12}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\cos 2\varphi\right] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) - a_{12}\sin 2\varphi - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \times \cos 2\varphi\right] -$$

$$-\left[a_{12}\cos 2\varphi - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\sin 2\varphi\right]^2 = \frac{1}{4}(a_{11} + a_{22})^2 -$$

$$-\left[a_{12}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{12})\cos 2\varphi\right]^2 - a_{12}^2\cos^2 2\varphi + a_{12}(a_{11} - a_{22}) \times$$

$$\times \cos 2\varphi \sin 2\varphi - \frac{1}{4}(a_{11} - a_{22})^2 \sin^2 2\varphi = \frac{1}{4}(a_{11} + a_{22})^2 -$$

$$-\frac{1}{4}(a_{11} - a_{22})^2 - a_{12}^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = J_2. \ \#$$

<u>Замечание 3.7.</u> Можно также показать, что $J_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ также является инвариантом относительно преобразований декартовой прямоугольной системы координат.

Все линии второго порядка в зависимости от знака инварианта I_2, разделяют на следующие три типа:

эллиптический тип, если $J_2 > 0$;

гиперболический тип, если $J_2 < 0$;

параболический тип, если $J_2 = 0$.

Очевидно, тип линии не меняется при изменении декартовой системы координат.

Исследования, проведенные выше, позволяют решить вопрос о классификации всех линий второго порядка. Решение этого вопроса проведем по следующей схеме:

1-й шаг. Если в уравнении (3.7) коэффициент $a_{12} \neq 0$, то повернем систему координат Oxy на угол φ, определяемый из формулы (3.18). Тогда уравнение (3.7) примет в системе координат $Ox'y'$ вид:

$$a'_{11}(x')^2 + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0. \qquad (3.20)$$

2-й шаг. Рассмотрим отдельно случай центральной и нецентральной линии.

Случай центральной линии. В этом случае инвариант $J_2 = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{vmatrix} = a'_{11}a'_{22} \neq 0$. Т.е. в случае центральной линии уравнение (3.20) обязательно будет содержать как член с x^2, так и член с y^2. Из уравнений (3.11) находим координаты центра $\tilde{O}\left(\dfrac{-a'_{13}}{a'_{11}}, -\dfrac{a'_{23}}{a'_{22}}\right)$ относительно системы координат $Ox'y'$.

После параллельного переноса системы координат $Ox'y'$ в центр $\tilde{O}$ уравнение линии в новой системе $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}$ примет вид:

$$a'_{11}\tilde{x}^2 + a'_{22}\tilde{y}^2 + a'_{33} = 0. \qquad (3.21)$$

1) Если $J_2 > 0$ (эллиптический случай), то коэффициенты a'_{11} и a'_{22} имеют одинаковый знак. Если знак a'_{33} противоположен знаку коэффициентов a'_{11}, a'_{22}, то уравнение (3.21) приводится к виду:

$\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1$, – каноническое уравнение эллипса,

где $a^2 = -\dfrac{a'_{33}}{a'_{11}}$, $b^2 = \dfrac{-a'_{33}}{a'_{22}}$.

Если же знак a'_{33} – совпадает со знаком коэффициентов a'_{11}, a'_{22}, то уравнение (3.21) приводится к виду:

$\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{y}^2}{b^2} = -1$ – каноническое уравнение мнимого эллипса

(этому уравнению не удовлетворяют координаты никакой точки плоскости), где $a^2 = \dfrac{a'_{33}}{a'_{11}}$, $b^2 = \dfrac{a'_{33}}{a'_{22}}$. И, наконец, если $a'_{33} = 0$, то уравнению (3.21) удовлетворяют координаты лишь одной точки $(\tilde{x} = 0,\ \tilde{y} = 0)$, которое запишем в виде:

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 0,$$

где $a^2 = \dfrac{1}{a'_{11}}$, $b^2 = \dfrac{1}{a'_{22}}$.

2) Если $J_2 < 0$ (гиперболический случай), то коэффициенты a'_{11} и a'_{22} имеют разные знаки (без ограничения общности можно считать $a'_{11} > 0$). Если $a'_{33} < 0$ $(a'_{33} > 0)$,то уравнение (3.21) приводится к виду:

$$\frac{\tilde{x}^2}{a_1^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b_1^2} = 1 \quad \left(\frac{\tilde{x}^2}{a_2^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b_2^2} = 1\right),$$

где

$$a_1^2 = -\frac{a'_{33}}{a'_{11}}, \quad b_1^2 = \frac{a'_{33}}{a'_{22}}, \quad \left(a_2^2 = \frac{a'_{33}}{a'_{11}}, \quad b_2^2 = \frac{-a'_{33}}{a'_{22}}\right).$$

Это каноническое уравнение гиперболы с действительной осью $\tilde{O}\tilde{x}$ и мнимой – $\tilde{O}\tilde{y}$ (с действительной осью $\tilde{O}\tilde{y}$ и мнимой – $\tilde{O}\tilde{x}$).

Если $a'_{33} = 0$, то уравнение (61) можно записать в виде:

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 0, \text{ где } a^2 = \frac{1}{a'_{11}}, \quad b^2 = -\frac{1}{a'_{22}}.$$

Этому уравнению удовлетворяют лишь координаты точек, лежащих на пересекающихся прямых $b\tilde{x} + a\tilde{y} = 0$ и $b\tilde{x} - a\tilde{y} = 0$.

Случай нецентральной линии (параболический случай).

В этом случае

$$J_2 = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{vmatrix} = a'_{11}a'_{22} = 0.$$

Следовательно, один из коэффициентов a'_{11} или a'_{22} в (3.20) обращается в нуль (оба в нуль обратиться не могут, иначе понизится порядок линии). Будем для определенности считать, что $a'_{11}=0$, $a'_{22}\neq 0$. Уравнение (3.20) будет тогда иметь вид:

$$a'_{22}(y')^2+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a_{33}=0.$$

или, выделяя полный квадрат по y', получаем

$$a'_{22}\left(y'+\frac{a'_{23}}{a'_{22}}\right)^2+2a'_{13}x'+a_{33}-\frac{(a'_{23})^2}{a'_{22}}=0. \qquad (3.22)$$

Перейдем к новой системе координат, полученной следующим параллельным переносом

$$\begin{cases}\tilde{x}=x',\\ \tilde{y}=y'+\dfrac{a'_{23}}{a'_{22}}.\end{cases}$$

Если ввести обозначения $\tilde{a}_{22}=a'_{22}$, $\tilde{a}_{13}=a'_{13}$, $\tilde{a}_{33}=a_{33}-\dfrac{(a'_{23})^2}{a'_{22}}$, то уравнение (3.22) примет вид:

$$\tilde{a}_{22}\tilde{y}^2+2\tilde{a}_{13}\tilde{x}+\tilde{a}_{33}=0. \qquad (3.23)$$

При $\tilde{a}_{13}=\tilde{a}_{33}=0$ уравнение (3.23) имеет вид $\tilde{y}^2=0$ и представляет собой пару слившихся прямых $\tilde{y}=0$. Если $\tilde{a}_{13}=0$, а $\tilde{a}_{33}\neq 0$, то уравнение (3.23) представляет собой либо пару параллельных прямых $\tilde{y}^2-a^2=0$ (при $\dfrac{\tilde{a}_{33}}{\tilde{a}_{22}}<0$), либо пару мнимых $\tilde{y}^2+a^2=0$ (при $\dfrac{\tilde{a}_{33}}{\tilde{a}_{22}}>0$).

Если же $\tilde{a}_{13}\neq 0$, то, совершив следующий параллельный перенос системы координат

$$\begin{cases}X=\tilde{x}+\dfrac{\tilde{a}_{33}}{2\tilde{a}_{13}},\\ Y=\tilde{y}\end{cases}$$

вместо (3.23), получаем

$Y^2=2px$ – каноническое уравнение параболы,

где $p=-\dfrac{\tilde{a}_{13}}{\tilde{a}_{22}}$ – параметр параболы.

Объединим полученные результаты.

Теорема 3.1. Пусть в декартовой прямоугольной системе координат задано уравнение (3.7) второго порядка. Тогда существует такая декартовая прямоугольная система координат, в которой это уравнение принимает один из следующих девяти канонических видов:

1) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2}+\dfrac{\tilde{y}^2}{b^2}=1$ (эллипс); 2) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2}+\dfrac{\tilde{y}^2}{b^2}=-1$ (мнимый эллипс);

3) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2}+\dfrac{\tilde{y}^2}{b^2}=0$ (одна точка); 4) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2}-\dfrac{\tilde{y}^2}{b^2}=1$ (гипербола);

5) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2}-\dfrac{\tilde{y}^2}{b^2}=0$ (пара пересекающихся прямых);

6) $\tilde{y}^2=2p\tilde{x}$ (парабола);

7) $\tilde{y}^2-a^2=0$ (пара параллельных прямых);

8) $\tilde{y}^2+a^2=0$ (пара мнимых параллельных прямых);

9) $\tilde{y}^2-a^2=0$ (пара совпавших прямых).

Задачи к Главе 3

1) Составить каноническое уравнение эллипса, если:
а) полуоси его соответственно равны 5 и 4;
б) расстояние между фокусами равно 8, а большая ось равна 10;
в) большая ось равна 26 и эксцентриситет $e=\dfrac{12}{13}$.

2) Определить фокусы эллипса $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

3) Оси эллипса совпадают с осями координат. Эллипс проходит через точки $P(2, 2)$, $Q(3, 1)$. Составить уравнение эллипса.

4) Составить каноническое уравнение гиперболы, если:
а) действительная ось равна 48, а эксцентриситет $e=\dfrac{12}{13}$;
б) действительная ось равна 16 и угол φ между асимптотой и осью абсцисс определяется условием $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{3}{4}$.

5) Составить каноническое уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ при условии, что эксцентриситет ее $e=\frac{5}{4}$.

6) Дана гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. Требуется:

а) вычислить координаты фокусов;

б) вычислить эксцентриситет;

в) написать уравнение асимптот;

г) написать уравнение сопряженной гиперболы и вычислить ее эксцентриситет.

7) Составить каноническое уравнение параболы, если расстояние фокуса от директрисы равно 2.

8) Дано уравнение касательной $x-3y+9=0$ к параболе $y^2 = 2px$. Составить уравнение параболы.

9) Мостовая арка имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что пролет арки равен 24 м, а высота 5 м.

10) Уравнения:

а) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$,

б) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$

линий второго порядка привести к каноническому виду. Изобразить на чертеже расположение этих линий относительно первоначальной системы координат.

Глава 4
ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Цилиндрические поверхности

Определение 4.1. Поверхность S называется цилиндрической поверхностью с образующей параллельной оси l, если она обладает следующим свойством: какова бы ни была лежащая на этой поверхности точка $P_0(x_0, y_0, z_0)=P_0(\bar{r}_0)$, прямая линия, проходящая через эту точку и параллельная оси l, целиком лежит на поверхности S.

Любую такую прямую, целиком лежащую на цилиндрической поверхности S, называют образующей этой поверхности.

Не ограничивая общности рассуждений, в дальнейшем будем предполагать, что ось l, о которой идет речь в определении цилиндрической поверхности, Совпадает с осью oz. (Этого всегда можно добиться, повернув соответствующим образом систему координат.)

В этой специальной системе координат (ось oz является образующей) справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. Всякое уравнение вида $f(x,y)=0$, не содержащее координату z, определяет цилиндрическую поверхность с образующей параллельной оси oz.

Доказательство. Пусть $P_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка, лежащая на поверхности S, определяемой уравнением $f(x,y)=0$, т.е. для $P_0(\bar{r}_0)$ справедливо равенство $f(x_0, y_0)=0$. Утверждение теоремы далее, очевидно, следует из того факта, что координаты любой точки P прямой, проходящей через $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной оси oz, равны соответственно x_0, y_0, z. (где z – произвольное значение) #.

Замечание 4.1. На координатной плоскости oxy уравнение $f(x,y)=0$ определяет плоскую линию, которую называют направляющей рассматриваемой цилиндрической поверхности.

§ 2. Конические поверхности

Определение 4.2. Поверхность S называется конической с вершиной в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, если она обладает следующим свойством: какова бы ни была лежащая на этой поверхности точка

$P_1(\vec{r}_1)=P_1(x_1, y_1, z_1)$, не совпадающая с вершиной P_0, прямая линия, проходящая через P_0 и P_1, целиком лежит на поверхности S.

Не ограничивая общности рассуждений, будем предполагать, что вершина $P_0(x_0, y_0, z_0)$ совпадает с началом координат. (Этого всегда можно добиться параллельным переносом системы координат.) В этой специальной системе координат (начало координат является вершиной конической поверхности) справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. Уравнение $f(x,y,z)=0$, где $f(x,y,z)$ является однородной функцией любой степени n (напомним, что функция $f(x,y,z)$ определенная при любых x, y, z, называется однородной функцией степени n, если для любого $\lambda \in R$ справедливо равенство $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)=\lambda^n f(x,y,z)$), определяет коническую поверхность с вершиной в начале координат.

Доказательство. Пусть (x_0, y_0, z_0) – отличная от начала координат точка, лежащая на поверхности S, определяемой уравнением $f(x,y,z)=0$, т.е. справедливо равенство:

$$f(x_0, y_0, z_0)=0 \tag{4.1}$$

Согласно определению конической поверхности достаточно показать, что какова бы ни была точка $P(\vec{r})=P(x,y,z)$, лежащая на прямой, проходящей через начало координат и точку $P_0(\vec{r}_0)$, координаты этой точки удовлетворяют уравнению: $f(x,y,z)=0$. Из того, что векторы $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ коллинеарны (так как точки O, P и P_0 лежат на одной прямой) и $\vec{r}_0 \neq \vec{0}$, согласно теоремам разложения (см. гл. 1, § 2, п. 1) получим, что существует вещественное число λ, такое, что $\vec{r}=\lambda\vec{r}_0$. Это в свою очередь эквивалентно (см. гл. 1, § 3, п. 2) следующим равенствам: $x=\lambda x_0$, $y=\lambda y_0$, $z=\lambda z_0$. Из последних равенств и однородности функции $f(x,y,z)$ получаем $f(x,y,z)=f(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)=\lambda^n f(x_0, y_0, z_0)$ и, следовательно, в силу (4.1) получаем $f(x,y,z)=0$ #.

§ 3. Поверхности вращения

Положим, что в плоскости oyz задана линия Z, имеющая уравнение $f(x,z)=0$. Найдем уравнение поверхности, полученной от вращения этой линии вокруг оси oy (рис. 41).

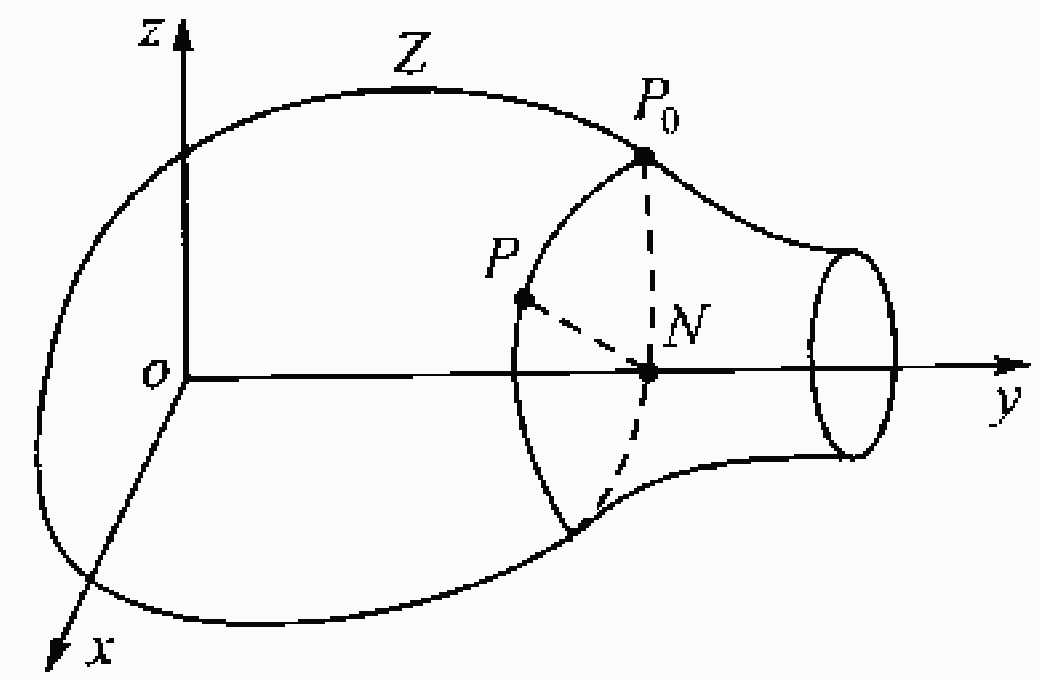

Рис. 41

Возьмем произвольную точку $P(x,y,z)$ нашей поверхности и проведем через нее плоскость, перпендикулярную к оси вращения oy. Очевидно, в пересечении этой плоскости с нашей поверхностью получится окружность с центром $N(0, y, 0)$ на оси вращения. Через P_0 обозначим точку пересечения кривой Z с этой плоскостью. Очевидно, P_0 имеет координаты $(0, y_0, z_0)$, где $y_0=y$, $z_0=\sqrt{x^2+z^2}$. Точка P лежит на поверхности тогда и только тогда, когда на ней лежит точка P_0, а следовательно, и симметричная с ней относительно плоскости oxy точка $P_0'(0, y_0, -z_0)$. Чтобы точки P_0 и P_0' лежали на поверхности, необходимо и достаточно, чтобы координата хотя бы одной из них удовлетворяли уравнению линии Z, т.е. $f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$. Это и есть искомое уравнение поверхности вращения. Таким образом, приходим к следующему правилу: чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением линии Z, лежащей в плоскости oyz вокруг оси oy, нужно в уравнении этой линии заменить z на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$.

Аналогичные правила справедливы и для поверхностей, полученных вращением плоских линий вокруг других координатных осей.

§ 4. Эллипсоиды, гиперболоиды и конусы второго порядка

1. Эллипсоид

Эллипсоидом (вещественным) называется поверхность, имеющая в некоторой («канонической» для нее) прямоугольной декартовой системе координат («каноническое») уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

Числа a, b, c называются полуосями эллипсоида.

Очевидны следующие свойства эллипсоида.

1. Координатные плоскости являются плоскостями симметрии эллипсоида, координатные оси – осями симметрии, а начало координат – центром симметрии.

2. Эллипсоид лежит внутри прямоугольного параллелепипеда – $-a\le x\le a$, $-b\le y\le b$, $-c\le z\le c$. Другими словами, эллипсоиды являются ограниченными поверхностями. И, следовательно, все плоские сечения эллипсоида являются ограниченными кривыми второго порядка, т.е. эллипсами.

3. Эллипсоид может быть получен из сферы равномерным сжатием относительно двух перпендикулярных плоскостей. Например, он может быть получен из сферы: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$ преобразованием координат по формулам $x'=x$, $y'=\frac{b}{a}y$, $z'=\frac{c}{a}z$ (равномерным сжатием ее относительно плоскости oxy с коэффициентом $\frac{c}{a}$; относительно плоскости oxz с коэффициентом $\frac{b}{a}$).

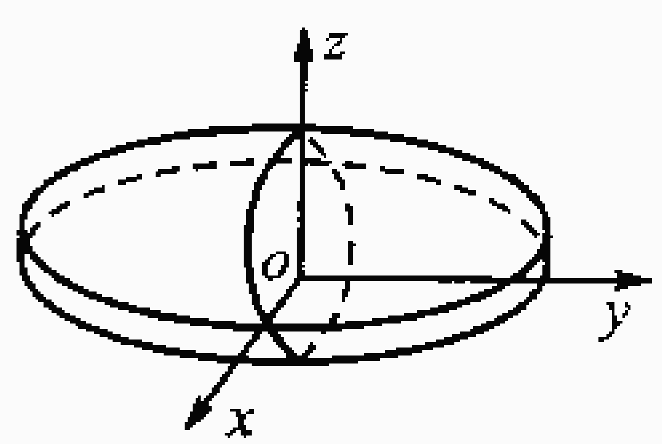

Рис. 42

На основании этих свойств нетрудно представить себе общий вид эллипсоида (рис. 42).

Замечание 4.2. Поверхность, задаваемая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

называется мнимым эллипсоидом. Очевидно, уравнению мнимого эллипсоида не удовлетворяют координаты ни одной точки.

2. Гиперболоиды

Однополостным соответственно двуполостным гиперболоидом называется поверхность, имеющая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат соответственно уравнения:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (4.2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (4.3)$$

Замечание 4.3. Уравнения (4.2) и (4.3) называются каноническими уравнениями соответственно однополостного и двуполостного гиперболоидов.

Положительные числа a, b, c называются полуосями гиперболоидов (4.2) и (4.3).

Из уравнений (4.2) и (4.3) нетрудно получить следующие свойства гиперболоидов.

1. Оба гиперболоида имеют координатные плоскости плоскостями симметрии, координатные оси – осями симметрии, а начало координат - центром симметрии.

2. В сечении обоих гиперболоидов плоскостями $x=h$, $y=h$ ($h=\text{const}$) получаются гиперболы. (В сечении однополостного гиперболоида плоскостями $x=\pm a$, $y=\pm b$ получается пара пересекающихся прямых.)

3. В сечении однополостного гиперболоида плоскостями $z=h$ ($h=\text{const}$) получаются эллипсы с полуосями $a*=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, $b*=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, расположенные симметрично относительно плоскостей oxy и oyz, причем полуоси его $a*$ и $b*$ имеют наименьшее значение при $h=0$ (иначе говоря, самых малых размеров эллипс образуется в сечении координатной плоскостью oxy. Он называется горловым эллипсом эллипсоида); при бесконечном возрастании $|h|$ полуоси $a*$ и $b*$ бесконечно возрастают.

4. В сечении двуполостного гиперболоида плоскостями $z=h$ ($h=\text{const}$) получаются: а) при $|h|<c$ – пустое множество, т.е. при $|h|<c$ плоскость $z=h$ не пересекается с двуполостным гиперболоидом; б) при $|h|>c$ плоскость $z=h$ пересекает двуполостной гиперболоид по эллипсу с полуосями $a*=a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}$, $b*=b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}$, расположенному симметрично относительно плоскостей oxz и oyz, причем, если $|h|$ бесконечно возрастает, то и полуоси $a*$ и $b*$ бесконечно возрастают; в) при $h=\pm c$ плоскости $z=\pm c$ касаются двуполостного гиперболоида соответственно в точках $(0, 0 \pm c)$.

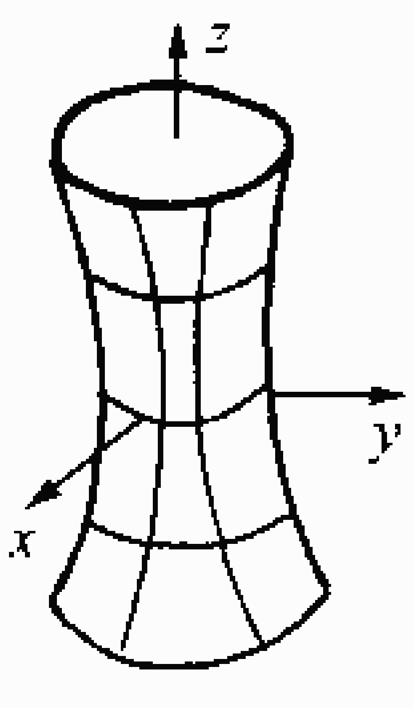

Рис. 43

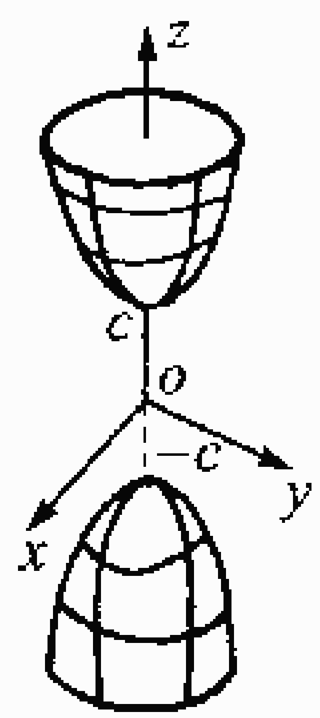

Рис. 44

Из свойств гиперболоидов и формул (4.2), (4.3) нетрудно представить себе, как будут выглядеть однополостный и двуполостный гиперболоиды (см. соответственно рис. 43 и рис. 44).

3. Конусы

Действительным конусом второго порядка называется поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат задается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (4.4)$$

Замечание 4.4. Это уравнение называется каноническим уравнением конуса.

Очевидны следующие свойства вещественного конуса.

1. Координатные плоскости являются плоскостями симметрии конуса, координатные оси – осями симметрии, а начало координат – центром симметрии.

2. В сечении конуса плоскостями $x=h$, $y=h$ $(h\neq 0)$ получаются гиперболы, при $h=0$ они вырождаются в прямые, пересекающиеся в начале координат.

3. Плоскость $z=h$ пересекает конус по эллипсу с полуосями $a*=\dfrac{a|h|}{c}$, $b*=\dfrac{b|h|}{c}$, расположенному симметрично относительно плоскостей oxz и oyz (при $h=0$, он вырождается в одну точку, начало координат), причем если $|h|$ бесконечно возрастает, то и полуоси $a*$ и $b*$ бесконечно возрастают.

4. Конус (4.4) образован прямыми линиями, проходящими через начало O координат и эллипс, описанный в п. 3 (следует из гл. 4, § 2). Естественно назвать точку O вершиной конуса.

На основании этих свойств нетрудно представить себе общий вид конуса (рис. 45).

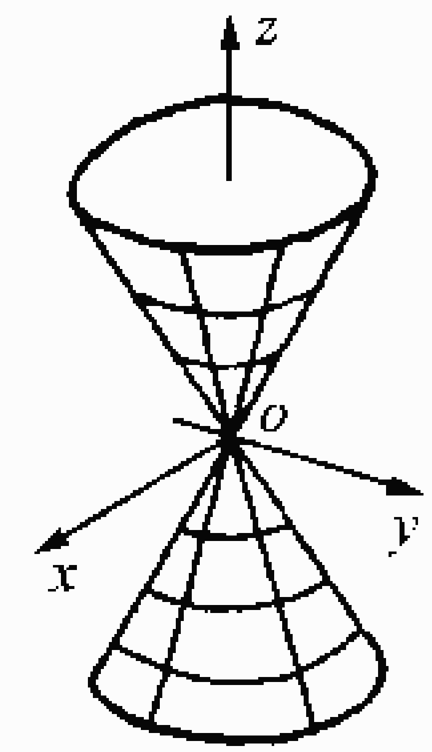

Рис. 45

Замечание 4.5. Поверхность, задаваемая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$, называется мнимым конусом второго порядка. Очевидно, единственная действительная точка мнимого конуса есть точка $O\,(0, 0, 0)$.

§ 5. Параболоиды

Эллиптическим, соответственно гиперболическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет соответственно каноническое уравнение:

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \quad \text{(эллиптический параболоид);} \qquad (4.5)$$

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \quad \text{(гиперболический параболоид).} \qquad (4.6)$$

Замечание 4.6. Уравнения (4.5) и (4.6) называются каноническими уравнениями соответственно эллиптического и гиперболического параболоидов.

Из (4.5), (4.6) нетрудно получить основные свойства параболоидов.

1. Плоскости oxz и oyz являются плоскостями симметрии параболоидов. Их пересечение (ось oz) называется осью параболоида, а пересечение оси с поверхностью параболоида (в нашем случае начало координат) – вершиной.

2. Оба параболоида (эллиптический и гиперболический) плоскостью $x = h$ (или $y = h$) ($h = \text{const}$) пересекаются по равным, параллельно расположенные параболам.

3. Плоскостью $z = h$ (при $h > 0$) эллиптический гиперболоид пересекается по эллипсу с полуосями $a* = a\sqrt{h}$, $b* = b\sqrt{h}$, расположенному симметрично относительно плоскостей oxz и oyz (при $h = 0$ он вырождается в одну точку, начало координат). Очевидно, при $h < 0$ плоскость $z = h$ не пересекается с эллиптическим параболоидом.

4. Плоскости $z = h$ ($h = \text{const}$) пересекают гиперболический параболоид по гиперболам, причем при $h > 0$ действительная ось гиперболы будет параллельна оси ox, при $h < 0$ действительная ось гиперболы будет параллельна оси oy. При $h = 0$ в сечении получается пара пересекающихся прямых. Прямые сечения плоскости $z = 0$ служат как бы переходом от одного семейства гипербол, получающихся в сечении плоскостью $z = h$ при $h > 0$, к другому семейству.

На основании этих свойств нетрудно представить себе общий вид параболоидов (эллиптического и гиперболического) (рис. 46 и рис. 47 соответственно).

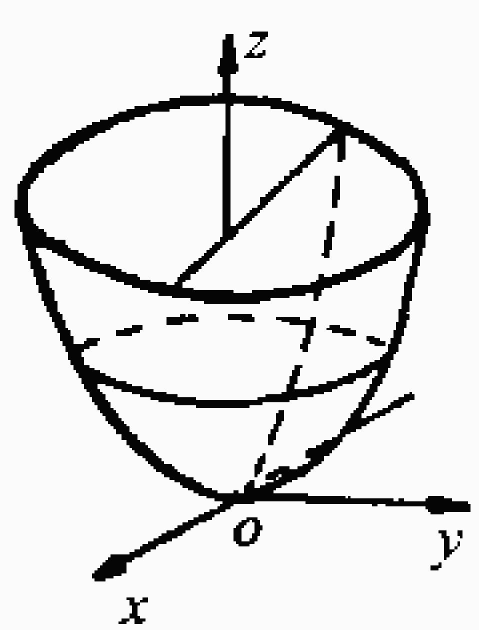

Рис. 46

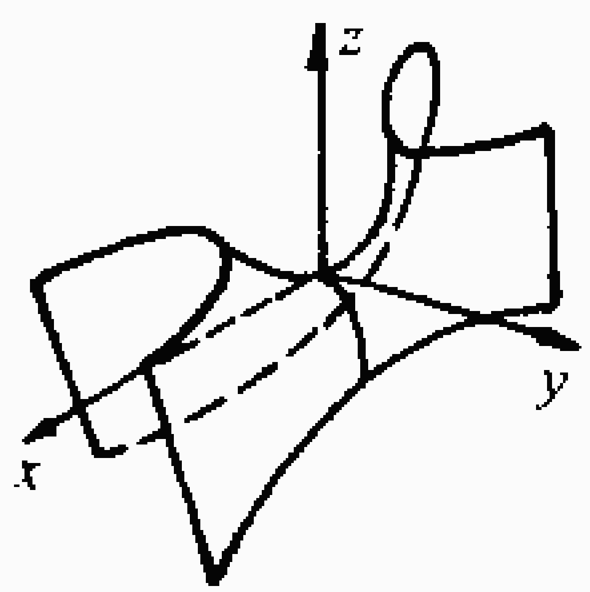

Рис. 47

§ 6. Цилиндры второго порядка

Рассмотрим в некоторой декартовой прямоугольной системе координат $oxyz$ уравнения:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad x^2 = 2py.$$

Согласно теореме 4.1 (см. гл. 4. § 1) эти уравнения определяют цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси oz, и направляющими соответственно эллипсом, гиперболой и параболой. Поверхности, определяемые этими уравнениями, называются соответственно эллиптическим, гиперболическим и параболическим цилиндром, а сами уравнения называются каноническими уравнениями цилиндров (соответственно эллиптического, гиперболического и параболического).

Нетрудно представить себе общий вид эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров (соответственно рис. 48, рис. 49, рис. 50).

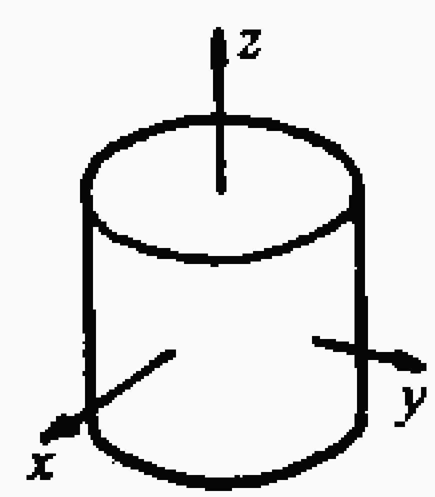

Рис. 48

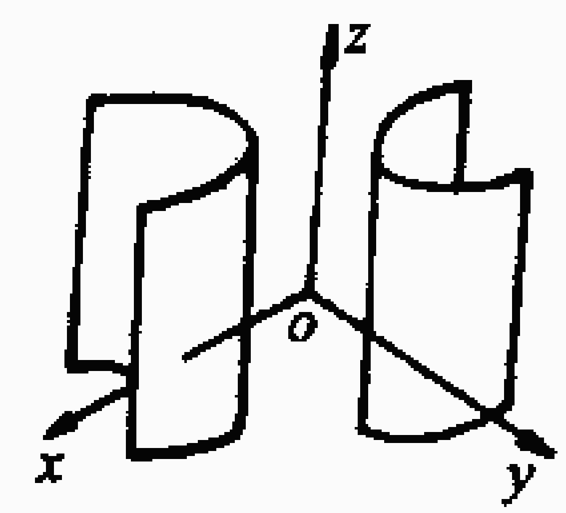

Рис. 49

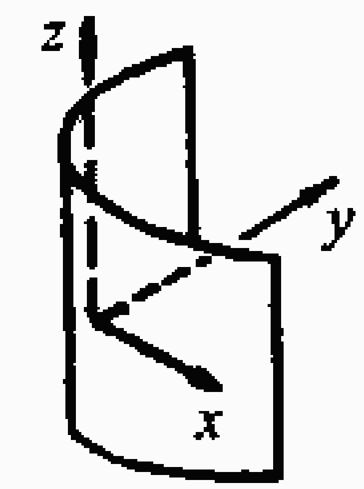

Рис. 50

Замечание 4.7. Поверхность определяемая уравнением вида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

называется мнимым эллиптическим цилиндром (уравнению этой поверхности не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства). Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, называется вырожденным эллиптическим цилиндром. Уравнению этой поверхности удовлетворяют только точки, лежащие на оси oz.

И, наконец, поверхность, определяемая уравнением вида $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, называется вырожденным гиперболическим цилиндром, или просто парой пересекающих, плоскостей.

§ 7. Общее уравнение поверхности второго порядка

Определение 4.3. Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению вида:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+ \\ +2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов a_{ik}, $i=1,2,3$; $k=1,2,3$ отличен от нуля. Коэффициенты a_{ik}, $i=1,2,3$; $k=1,2,3$ называются коэффициентами группы старших членов, коэффициенты a_{i4}, $i=1,2,3,4$ – коэффициентами линейной части уравнения (4.7). Коэффициент a_{44} называют также свободным членом уравнения (4.7).

Очевидно, это определение поверхности второго порядка инвариантно относительно выбора системы координат. Действительно, уравнение поверхности в любой другой системе координат $o'x'y'z'$ получается из уравнения (4.7) заменой x, y, z линейными выражениями (см. гл. 1, § 7) относительно x', y', z' и, следовательно, в координатах x', y', z' будет иметь вид, аналогичный уравнению (4.7).

Чтобы исследовать геометрические свойства поверхности второго порядка, естественно отнести ее к такой системе координат, в которой ее уравнение будет наиболее простым.

Покажем, что существует такая система координат, в которой коэффициенты при xy, xz и yz в уравнении поверхности (4.7) будут равны нулю.

Для этого рассмотрим функцию $F(\vec r)$ точки $P(\vec r)=P(x,y,z)$, определенную во всем пространстве, кроме начала координат, равенством:

$$F(\vec r)=\frac{a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz}{x^2+y^2+z^2}.$$

На единичной сфере $(|\vec r|=1)$ она ограничена и, следовательно, достигает абсолютного минимума в некоторой точке A_0. Кроме того, очевидно, $\vec F(\lambda\vec r)=F(\vec r)$ (т.е. $\vec F(\vec r)$) постоянна на каждом луче, исходящем из начала координат), и, следовательно, точка A_0 является точкой минимума во всем пространстве (а не только на единичной сфере).

Перейдем от первоначальной декартовой прямоугольной системы координат $oxyz$ к новой декартовой прямоугольной системе координат $ox'y'z'$ с тем же началом O, для которой вектор OA_0 совпадает с положительным направлением оси oz'. Известно, что (см. гл. 1, § 7) координаты x, y, z и x', y', z' одной и той же точки P в системах координат $oxyz$ и $ox'y'z'$ соответственно связаны формулами вида:

$$\begin{cases} x=t_{11}x'+t_{12}y'+t_{13}z', \\ y=t_{21}x'+t_{22}y'+t_{23}z' \\ z=t_{31}x'+t_{32}y'+t_{33}z'. \end{cases} \quad (4.8)$$

Как уже отмечалось выше, определение поверхности второго порядка инвариантно относительно выбора системы координат, и, следовательно, в нашей новой декартовой прямоугольной системе координат $ox'y'z'$ уравнение поверхности примет вид, аналогичный (4.7), а именно:

$$\begin{aligned} a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{12}x'y'+2a'_{13}x'z'+2a'_{23}y'z'+2a'_{14}x'+ \\ +2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a'_{44}=0, \end{aligned}$$

Функция F в новых координатах примет вид:

$$F(\vec r')=\frac{a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{12}x'y'+2a'_{13}x'z'+2a'_{23}y'z'}{x'^2+y'^2+z'^2}.$$

Она получается из старого представления для F заменой x, y, z на их выражения через x', y', z' по формуле (4.8). Знаменатель по форме не изменяется, так как представляет собой квадрат расстояния от точки P до начала координат, который в обеих системах координат выражается одинаково. Согласно выбору системы координат $ox'y'z'$ минимум функции F достигается при $x'=0$, $y'=0$,

$z'=1$. Поэтому, положив в выражении для F $x'=0$, $z'=1$ получим функцию

$$f(y')=\frac{a'_{22}y'^2+2a'_{23}y'+a'_{33}}{1+y'^2}$$

одной переменной, которая достигает минимума при $y'=0$. Следовательно,

$$\left.\frac{df(y')}{dy'}\right|_{y'=0}=2a'_{23}=0.$$

Таким образом, коэффициент при $y'z'$ в уравнении поверхности равен нулю. Аналогично показывается, что и коэффициент при $x'z'$ равен нулю.

Итак, в системе $ox'y'z'$ уравнение поверхности примет вид:

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{12}x'y'+2a'_{14}x'+$$
$$+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a'_{44}=0.$$

Если ввести новые координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ по формулам:

$$\begin{cases} x'=\bar{x}\cos\varphi-\bar{y}\sin\varphi, \\ y'=\bar{x}\sin\varphi+\bar{y}\cos\varphi. \\ z'=\bar{z}, \end{cases}$$

то так же, как при рассмотрении кривых второго порядка (см. гл. 3, § 4, п. 2), соответствующим выбором угла φ можно добиться того, что коэффициент при $\bar{x}\,\bar{y}$ тоже будет равен нулю. Итак, получаем следующий вывод.

<u>Вывод 4.1.</u> Существует такая декартовая прямоугольная система координат, в которой уравнение поверхности имеет вид:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0.$$

§ 8. Классификация поверхностей второго порядка

Как показано в предыдущем параграфе, переходом к некоторой новой декартовой прямоугольной системе координат уравнение поверхности (4.7) может быть приведено к следующему виду:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \qquad (4.9)$$

Будем различать три основных случая:

1. Все три коэффициента при квадратах координат в уравнении (4.9) отличны от нуля.

2. Два коэффициента отличны от нуля, а третий, например a_{33}, равен нулю.

3. Один коэффициент, например a_{11}, отличен от нуля, а два других равны нулю.

В случае 1 переходом к новой системе координат по формулам:

$$x'=x+\frac{a_{14}}{a_{11}},\qquad y'=y+\frac{a_{24}}{a_{22}},\qquad z'=z+\frac{a_{34}}{a_{33}}$$

(что соответствует переносу начала координат в точку $\left(-\frac{a_{14}}{a_{11}},\ -\frac{a_{24}}{a_{22}},\ -\frac{a_{34}}{a_{33}}\right)$) приведем уравнение поверхности к виду:

$$a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_{33}z'^2+a'_{44}=0. \qquad (4.10)$$

Здесь коэффициент a'_{44}, как легко видеть, вычисляется подстановкой в левую часть уравнения (4.9) координат нового начала $\left(-\frac{a_{14}}{a_{11}},\ -\frac{a_{24}}{a_{22}},\ -\frac{a_{34}}{a_{33}}\right)$ вместо текущих координат.

Теперь будем различать следующие возможности:

а) $I_1: a'_{44}=0$. В этом случае поверхность является конусом второго порядка (см. гл. 4, § 2). Если коэффициенты a_{11}, a_{22}, a_{33} одного знака, то уравнению (4.10) поверхности (при $a'_{44}=0$) удовлетворяют координаты только одной точки $x=y=z=0$. В этом случае поверхность называется мнимым конусом второго порядка. Если среди чисел a_{11}, a_{22}, a_{33} есть числа разных знаков, то поверхность, определяемая уравнением (4.10) (при $a'_{44}=0$), является вещественным конусом второго порядка. Уравнение вещественного конуса обычно записывают в следующем виде:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=0,$$

где $a^2=\frac{1}{a_{11}}$, $b^2=\frac{1}{a_{22}}$, $c^2=\frac{-1}{a_{33}}$. Здесь считаем ради определенности (это нисколько не ограничивает общности рассуждений), что

$a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} < 0$. Это уравнение называется каноническим уравнением вещественного конуса второго порядка (см. гл. 4, § 4, п. 3);

б) $I_2 : a'_{44} \neq 0$ и коэффициенты a_{11}, a_{22}, a_{33} – одного знака. В этом случае поверхность, определяемая уравнением (4.10), называется эллипсоидом. Если числа a_{11}, a_{22}, a_{33}, a'_{44} одного знака, то уравнению (4.10) поверхности не удовлетворяют координаты x, y, z ни одной точки $P(x, y, z)$. В этом случае поверхность называется мнимым эллипсоидом. Если знак коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{33} противоположен знаку a'_{44}, то поверхность, определяемая уравнением (4.10), называется вещественным эллипсоидом. Уравнение его можно записать в следующем виде:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1,$$

где

$$a^2 = -\frac{a'_{44}}{a_{11}}, \quad b^2 = -\frac{a'_{44}}{a_{22}}, \quad c^2 = -\frac{a'_{44}}{a_{33}}.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением эллипсоида (см. гл. 4, § 4, п. 1);

в) $I_3 : a'_{44} \neq 0$ и из четырех коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{33}, a'_{44} два коэффициента одного знака, а два других - противоположного. В этом случае поверхность называется однополостным гиперболоидом. Считая ради определенности $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} < 0$, $a'_{44} < 0$ уравнение его можно записать в виде:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1,$$

где

$$a^2 = -\frac{a'_{44}}{a_{11}}, \quad b^2 = -\frac{a'_{44}}{a_{22}}, \quad c^2 = \frac{a'_{44}}{a_{33}}.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением однополостного гиперболоида (см. гл. 4, § 4, п. 2);

г) $I_4 : a'_{44} \neq 0$ и один из четырех коэффициентов, но не a'_{44}, противоположен по знаку остальным. В этом случае поверхность, определяемая уравнением (4.10), называется двуполостным гиперболоидом. Пусть ради определенности $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$, $a_{33} > 0$, $a'_{44} < 0$, тогда уравнение двуполостного гиперболоида можно записать в виде:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = -1,$$

где

$$a^2 = \frac{a'_{44}}{a_{11}}, \quad b^2 = \frac{a'_{44}}{a_{22}}, \quad c^2 = \frac{-a'_{44}}{a_{33}}.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением двуполостного гиперболоида (см. гл. 4. § 4, п. 2).

В случае 2, переходя к новым координатам по формулам:

$$x' = x + \frac{a_{14}}{a_{11}}, \quad y' = y + \frac{a_{24}}{a_{22}}, \quad z' = z,$$

приведем уравнение (4.9) поверхности к виду:

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + 2a_{34}z' + a'_{44} = 0. \tag{4.11}$$

Здесь коэффициент a'_{44}, как легко видеть, вычисляется подстановкой в левую часть уравнения (4.9) координат точки $\left(-\frac{a_{14}}{a_{11}}, \frac{a_{24}}{a_{22}}, 0\right)$ вместо текущих координат. Будем далее различать следующие возможности:

а) $II_1 : a_{34} = a'_{44} = 0$. Поверхность распадается на пару плоскостей $x' \pm \sqrt{-\frac{a_{22}}{a_{11}}}\, y' = 0$ – мнимых, если a_{11} и a_{22} одного знака, и вещественных, если a_{11} и a_{22} противоположных знаков;

б) $II_2 : a_{34} = 0$, $a'_{44} \neq 0$. Уравнение (4.11) в этом случае определяет цилиндрическую поверхность (см. гл. 4, § 1). Если коэффициенты a_{11}, a_{22}, a'_{44} одного знака, то уравнению (4.11) (при $a_{34} = 0$) не удовлетворяют координаты никакой точки пространства. В этом случае поверхность называется мнимым цилиндром. Если среди чисел a_{11}, a_{22}, a'_{44} есть числа разных знаков, то поверхность, определяемая уравнением (4.11) (при $a_{34} = 0$), называется вещественным цилиндром. В частности, если a_{11} и a_{22} одного знака, то поверхность называется эллиптическим цилиндром, если же a_{11} и a_{22} разных знаков, то – гиперболическим цилиндром. Уравнения эллиптического и гиперболического цилиндров могут быть приведены соответственно к следующему виду:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \qquad (4.12)$$

где $a^2=-\frac{a'_{44}}{a_{11}}$, $b^2=-\frac{a'_{44}}{a_{22}}$

и

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1 \qquad (4.13)$$

где $a^2=-\frac{a'_{44}}{a_{11}}$, $b^2=\frac{a'_{44}}{a_{22}}$. Не ограничивая общности, здесь для определенности считаем, что $a_{11}>0$, $a_{22}<0$, $a'_{44}<0$. Уравнения (4.12) и (4.13) называются соответственно каноническим уравнением эллиптического и гиперболического цилиндров (см. гл. 4. § 6);

в) $II_3: a_{34}\neq 0$. Переходя в уравнении (4.11) к новым координатам $\bar{x}=x'$, $\bar{y}=y'$, $\bar{z}=z'+\frac{a'_{44}}{2a_{34}}$ приведем его к виду:

$$a_{11}\bar{x}^2+a_{22}\bar{y}^2+2a_{34}\bar{z}=0. \qquad (4.14)$$

Поверхность, определяемая этим уравнением, называется параболоидом. При этом, если a_{11} и a_{22} имеют одинаковый знак, то параболоид называется эллиптическим. Обычно его записывают в следующем каноническом виде:

$$\bar{z}=\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2},$$

которое легко получается из уравнения (4.14). Если же a_{11} и a_{22} разных знаков, то параболоид называется гиперболическим. Его уравнение может быть записано в следующем каноническом виде:

$$\bar{z}=\frac{\bar{x}^2}{a^2}-\frac{\bar{y}^2}{b^2},$$

которое также легко получается из (4.14).

В случае 3 перейдем в уравнении (4.9) к новым координатам:

$$\bar{x},\bar{y},\bar{z}: \bar{x}=x'+\frac{a_{14}}{a_{11}},\quad \bar{y}=y',\quad \bar{z}=z'.$$

Тогда уравнение (4.9) примет вид:

$$a_{11}x'^2+2a_{24}y'+2a_{34}z'+a'_{44}=0/ \qquad (4.15)$$

Здесь будем различать следующие возможности:

а) $III_1: a_{24}=a_{34}=0$. Поверхность распадается на пару параллельных плоскостей - мнимых, если a_{11} и a'_{44} одного знака, вещественных, если a_{11} и a'_{44} противоположных знаков. Если же $a'_{44}=0$, то плоскости совпадают;

б) III_2. Хотя бы один из коэффициентов a_{24}, a_{34} отличен от нуля. Сохраняя направление оси $o'x'$, возьмем плоскость $2a_{24}y'+$ $+2a_{34}z'+a'_{44}=0$ за плоскость $\bar{o}\,\bar{x}\,\bar{z}$. Тогда уравнение поверхности примет вид:

$$a_{11}\bar{x}^2+q\bar{y}=0$$

(q – некоторое число), которое является уравнением параболического цилиндра с образующей параллельной оси $\bar{o}\,\bar{z}$. Уравнение параболического цилиндра обычно записывают в следующем каноническом виде (см. гл. 4, § 6):

$$x^2=2py.$$

Итак, получаем следующий вывод.

<u>Вывод 4.2.</u> Общее уравнение поверхности 2-го порядка в пространстве определяет один из следующих геометрических образов:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ – эллипсоид;

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ – однополостный гиперболоид;

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ – двуполостный гиперболоид;

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ – мнимый эллипсоид;

5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ – конус;

6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ – мнимый конус (одна точка);

7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ – эллиптический параболоид;

8) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ – гиперболический параболоид;

9) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – эллиптический цилиндр;

10) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - гиперболический цилиндр;

11) $x^2=2py$ – параболический цилиндр;

12) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ – мнимый эллиптический цилиндр (пустое множество);

13) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ – одна прямая;

14) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ – две пересекающиеся плоскости;

15) $x^2-a^2=0$ – две параллельные плоскости;

16) $x^2+a^2=0$ – две мнимые параллельные плоскости (пустое множество);

17) $x^2=0$ – одна плоскость.

Определение центра поверхности. Напомним прежде всего, что точкой, симметричной точке $P(x, y, z)$ относительно точки $C(x_0, y_0, z_0)$, называется точка $P'(x', y', z')$, обладающая тем свойством, что точка C есть середина отрезка $\overline{PP'}$ (координаты x', y', z' точки P' однозначно определяются из условий $x_0=\frac{x+x'}{2}$, $y_0=\frac{y+y'}{2}$, $z_0=\frac{z+z'}{2}$ (см. гл. 1, § 6, п. 3)). Точка называется центром симметрии (или просто центром) данной поверхности, если, какова ни была точка P, лежащая на данной поверхности, точка P', симметричная точке P относительно точки C, также лежит на данной поверхности.

Поверхности, обладающие единственным центром, будем называть центральными.

Очевидно, если $P_0(x_0, y_0, z_0)$ является центром поверхности, определяемой уравнением (4.9), то параллельным переносом системы координат в точку P_0 можно добиться того, что новое начало координат O' будет центром поверхности, т.е. если точка $P'(x', y', z')$ удовлетворяет вновь полученному после параллельного переноса $x=x'+x_0$, $y=y'+y_0$, $z=z'+z_0$ уравнению поверхности, то и $P'(-x', -y', -z')$ также удовлетворяет этому уравнению. Следовательно, необходимым и достаточным условием существования центра у поверхности является существование такой декартовой прямоугольной системы координат, в которой уравнение поверхности не содержит членов первой степени. Совершая параллельный перенос $x=x'+x_0$, $y=y'+y_0$, $z=z'+z_0$ системы координат в точку P_0 получаем, что уравнение (4.9) примет вид:

$$a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_{33}z'^2+2(a_{11}x_0+a_{14})x'+2(a_{22}y_0+a_{24})y'+2(a_{33}z_0+$$
$$+a_{34})z'+(a_{11}x_0^2+a_{22}y_0^2+a_{33}z_0^2+2a_{14}x_0+2a_{24}y_0+2a_{34}x_0+a_{44}=0.$$

Следовательно, поверхность (4.9) является центральной тогда и только тогда, когда система уравнений $a_{11}x_0+a_{14}=0$, $a_{22}y_0+a_{24}=0$, $a_{33}z_0+a_{34}=0$ имеет единственное решение. Это, очевидно, имеет место в том и только в том случае, когда $a_{11}\neq 0$, $a_{22}\neq 0$, $a_{33}\neq 0$. (Если хотя бы один из этих коэффициентов равен нулю, то система или не имеет ни одного решения, или имеет их бесконечно много.) Итак, получаем следующий вывод.

Вывод 4.3. Центральными поверхностями являются только поверхности, отвечающие 1-му случаю, т.е. эллипсоиды, гиперболоиды и конусы (см. гл. 4, § 4). Остальные поверхности – нецентральные (см. гл. 4, § 5, § 6).

Задачи к Главе 4

1) Составить уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат, если он проходит через эллипс

$$z=0,\quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \text{ и через точку } M(1,\,2,\,\sqrt{23}).$$

2) Составить уравнение касательной плоскости к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{75}=1 \quad \text{в точке } M(3,\,2,\,5).$$

3) Показать, что нижеследующее уравнение определяет поверхность, распадающуюся на пару плоскостей, и найти эти плоскости

$$y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2y=0$$

4) Определить вид и расположение поверхностей:

а) $z=2x^2-4y^2-6x+8y+1$;

б) $x^2+2y^2-3z^2+2x+4y-6z=0$;

в) $x^2+2xy+y^2-z^2=0$;

г) $z^2=3x+4y+5$;

д) $2xy+z^2-2z+1=0$;

е) $x^2+y^2-z^2-2xy+2z-1=0$.

Глава 5
МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 1. Матрицы и действия над ними

Определение 5.1. Матрицей порядка $m\times n$ называют прямоугольную таблицу чисел (вещественных или комплексных), содержащую m строк и n столбцов. Обозначают матрицу обычно прописными латинскими буквами A, B, C и т.д. Элементы матрицы часто обозначают двойными индексами – a_{ij}, где первый индекс i означает номер строки, в которой стоит элемент a_{ij}, а второй индекс означает номер столбца, в котором стоит элемент a_{ij}. В символической записи матрицу обозначают

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ или } A=[a_{ij}]\ \ \begin{matrix} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n \end{matrix} \qquad (5.1)$$

Если $m=n$, то матрица называется квадратной, а число n ее порядком.

Матрица $[\,a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n\,]$, состоящая из одной строки, называется просто строкой, а матрица

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

состоящая из одного столбца, называется столбцом. При этом число элементов в строке (столбце) называется длиной строки (высотой столбца).

Каждую матрицу можно рассматривать как совокупность строк (столбцов). Например, если для матрицы (5.1) положить

$$\vec{a}_i=[a_{i1},\ a_{i2},\dots,\ a_{in}],\quad \underset{\downarrow}{a}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n \end{matrix}$$

то ее можно записать в виде:

$$A = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_m \end{bmatrix}, \text{ или } \quad A = [\, \underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{a_n} \,].$$

Определение 5.2. Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковые порядки и все их соответствующие элементы совпадают.

Замечание 5.1. Отметим следующие очевидные свойства отношения равенства между матрицами: 1) $A = A$ (рефлексивность); 2) если $A = B$, то $B = A$ (симметричность); 3) если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$ (транзитивность).

Определение 5.3. Суммой двух матриц A и B одинаковых порядков называется матрица C того же порядка, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B.

Таким образом, элементы c_{ij} матрицы $C = A + B$ определяются следующими формулами:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где a_{ij} и b_{ij} – элементы матриц A и B соответственно.

Очевидно, что сложение матриц подчиняется коммутативному и ассоциативному законам, т.е.

$$A + B = B + A;$$
$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Действие сложения матриц может быть распространено, очевидно, и на случай любого числа слагаемых. Вычитание для матриц, как и для чисел, определяется как действие, обратное сложению. Разностью $B - A$ матриц B и A одинаковых порядков называется такая матрица C, что $A + C = B$. Легко видеть, что матрица C, удовлетворяющая этому условию, всегда существует и притом только одна. Ее элементы c_{ij} определяются равенствами:

$$c_{ij} = b_{ij} - a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрица Φ, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей.

Очевидно, что $A + \Phi = A$, $A - A = \Phi$.

Разность $\Phi - A$ обозначается через $-A$, так что $A + (-A) = \Phi$. Матрица $(-A)$ называется противоположной матрице A.

Определение 5.4. Произведением матрицы A на число α называется матрица, получающаяся из A умножением всех ее элементов на α. Обозначается это произведение через αA или $A\alpha$.

При умножении матрицы на число ее порядок, как видно из определения, сохраняется.

Очевидно, что $1A = A$, $(-1)A = -A$, $0A = \Phi$.

Очевидны также следующие свойства:

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A; \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A; \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

Определение 5.5. Пусть даны две матрицы $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ порядков $m \times n$ и $n \times p$ соответственно, причем число столбцов матрица A равно числу строк матрицы B. Произведением матрицы A на матрицу B называется матрица $C = [c_{ij}]$ (обозначается через AB), элементы которой вычисляются по формулам:

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj},$$
$$i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Согласно определению не всякие матрицы можно перемножать. Произведение двух матриц имеет смысл тогда и только тогда, когда число столбцов первого множителя равно числу строк второго множителя. При этом в произведении получается матрица, число строк у которой равно числу строк у первого множителя, а число столбцов равно числу столбцов у второго множителя.

Правило для вычисления элементов в произведении двух матриц можно сформулировать следующим образом.

Элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $C = AB$, равен сумме попарных произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

Из определения произведения двух матриц A и B вытекает, что из того, что имеет смысл произведение AB, вообще говоря, не следует, что имеет смысл произведение BA.

Например, для матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

AB имеет смысл, BA не определено.

Если для двух матриц A и B имеем $AB = BA$, то говорят, что матрицы A и B коммутируют. Очевидно, что это может иметь место только в случае, когда A и B – квадратные матрицы одного и того же порядка. Примеры показывают, что произведение двух квадратных матриц одинакового порядка не обладает, вообще говоря, свойством коммутативности. В самом деле, если положить

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ то } AB=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad BA=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

и, следовательно, $AB \neq BA$.

Отметим, что произведение BA равно нулевой матрице, хотя ни один из сомножителей не равен Ф.

Замечание 5.2. Произведение строки на столбец имеет смысл, очевидно, только при условии, что длина строки равна высоте столбца. При этом в произведении получается квадратная матрица первого порядка, т.е. просто число. Произведение столбца на строчку имеет смысл всегда. При этом в произведении получается матрица, число строк у которой равно высоте столбца, а число столбцов – длине строки.

Операции сложения матриц и умножения на число связаны с операцией умножения матриц следующими свойствами:

$$(A+B)C = AC + BC; \qquad D(A+B) = DA + DB;$$
$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

При этом предполагается, что выражение слева или справа имеет смысл. Справедливость этих свойств немедленно следует из определений сложения, умножения на число, умножения и равенства матриц.

Как уже отмечалось выше, умножение матриц некоммутативно. Однако для матриц справедлив ассоциативный закон умножения, а именно имеет место

Утверждение 5.1. Если A, B и C – три матрицы, для которых имеют смысл произведения AB и BC, тогда произведения $(AB)\,C$ и $A\,(BC)$ также имеют смысл и имеет место равенство $(AB)\,C = A\,(BC)$.

Доказательство. Так как произведения AB и BC определены, то матрицы A, B и C будут иметь порядки $m \times n$, $n \times p$, $p \times s$, соответственно, где m, n, p и s – некоторые натуральные числа. Согласно определению произведения матриц $A\,B$ и $B\,C$ будут иметь соответственно порядки $m \times p$ и $n \times s$. Отсюда легко усматривается, что произведения $(AB)\,C$ и $A\,(BC)$ определены и имеют одинаковый порядок, который равен $m \times s$. Для доказательства равенства $(AB)\,C = A\,(BC)$ достаточно согласно определению равенства матриц доказать, что соответствующие элементы этих матриц равны. Прежде чем доказать это утверждение, отметим следующий простой факт, относящийся к двойным суммам, а именно:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} d_{ij}\right), \tag{5.2}$$

означающий, что в двойной сумме (индексы i и j пробегают независимо друг от друга значения $i = 1, 2,\ldots, m$; $j = 1, 2,\ldots, n$) можно изменить порядок суммирования. Справедливость этого факта нетрудно показать, если выписать элементы d_{ij} в виде матрицы из m строк и n столбцов. Тогда и правая и левая части доказываемого равенства (5.2) представляют собой сумму всех элементов матрицы: справа сначала сложены элементы каждой строки, а затем сложены полученные суммы, а слева наоборот сначала сложены элементы каждого столбца, и затем сложены полученные суммы.

Вернемся к доказательству нашего основного утверждения. Обозначим $A=[a_{i\alpha}]$, $B=[b_{\alpha\iota}]$, $C=[c_{\iota j}]$, $AB=[g_{i\iota}]$, $BC=[h_{\alpha j}]$ $(AB)C=[d_{ij}]$, $A(BC)=[d_{ij}^{|}]$. В силу отмеченного свойства двойных сумм равенство $d_{ij}=d_{ij}^{|}$ для любых i и j следует из цепочки равенств:

$$d_{ij} = \sum_{\iota=1}^{p} g_{i\iota}\, c_{\iota j} = \sum_{\iota=1}^{p}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}\, b_{\alpha\iota}\right) c_{\iota j} = \sum_{\iota=1}^{p}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}\, b_{\alpha\iota}\, c_{\iota j}\right) =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\sum_{\iota=1}^{p} a_{i\alpha}\, b_{\alpha\iota}\, c_{\iota j}\right) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}\left(\sum_{\iota=1}^{p} b_{\alpha\iota}\, c_{\iota j}\right) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}\, h_{\alpha j} = d_{ij}^{|}\ .\ \#$$

Замечание 5.3. Пусть последовательность матриц A_1, A_2,..., A_n такова, что произведение $A_k\,A_{k+1}$ любых двух соседних матриц имеет смысл. Тогда индуктивно можно определить произведение A_1, A_2,..., A_n. Действительно, считая, что для $(n-1)$-го сомножителя произведение уже определено, полагаем

$$A_1 A_2 \dots A_n = \left(A_1 A_2 \dots A_{n-1}\right) A_n .$$

Число строк в этом произведении равно числу строк в первом сомножителе A_1, а число столбцов равно числу столбцов последней матрицы A_n. Пользуясь ассоциативностью умножения матриц, индукцией по числу сомножителей n можно легко показать, что для любого $k = 1, 2, \dots, n-1$ имеет место равенство:

$$A_1 A_2 \dots A_n = \left(A_1 A_2 \dots A_k\right)\left(A_{k+1} \dots A_n\right).$$

Среди квадратных матриц n-го порядка особую роль играет матрица

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

которая называется единичной матрицей n-го порядка. Иногда для того, чтобы указать порядок единичной матрицы ее обозначают через E_n. Для прямоугольной матрицы порядка $m \times n$ справедливо следующее свойство: $E_m A = A E_n = A$.

Две квадратные матрицы одного и того же порядка всегда можно перемножить, при этом в произведении получится квадратная матрица того же порядка. В силу этого можно определить степени квадратных матриц. Пусть A – произвольная квадратная матрица порядка n. По определению полагаем $A^0 = E$, $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A \dots$. В силу ассоциативности умножения матриц произведение $\underbrace{A \cdot A \dots A}_{n-\text{раз}}$ не зависит от способа расстановки в нем скобок, поэтому степень A^n определена однозначно и, кроме того, легко показать, что справедливы равенства:

$$A^k A^l = A^{k+l}, \quad (A^k)^l = A^{kl}, \quad A^k A^l = A^l A^k.$$

<u>Определение 5.6.</u> Пусть дана матрица $A = [a_{ij}]$ порядка $m \times n$. Матрица A^{t}, получающаяся из A заменой строк на столбцы с сохранением порядка их следования, называется транспонированной с A. Операция замены матрицы A на A^{t} называется транспонированием.

При транспонировании, очевидно, меняется порядок матрицы (если $m \neq n$), а именно, если матрица A имеет порядок $m \times n$, то матрица A^{t} имеет порядок $n \times m$. При транспонировании строка превращается в столбец, а столбец в строку.

Связь между элементами матриц A и A^{t} следующая: $a^{\text{t}}_{ij} = a_{ji}$, где a^{t}_{ij} – элемент i-й строки и j-го столбца матрицы A^{t}.

Операция транспонирования матриц обладает следующими свойствами:

<u>Свойство 5.1.</u> Если операцию транспонирования применить дважды, то получим исходную матрицу, т.е. $A = (A^{\text{t}})^{\text{t}} = A$.

<u>Свойство 5.2.</u> $(\alpha A + \beta B)^{\text{t}} = \alpha A^{\text{t}} + \beta B^{\text{t}}$.

<u>Свойство 5.3.</u> Если произведение AB имеет смысл, то $(AB)^{\text{t}} = B^{\text{t}} A^{\text{t}}$. Иными словами, чтобы транспонировать произведение матриц, надо транспонировать сомножители и записать их в обратном порядке.

Доказательство. Свойства 5.1 и 5.2 непосредственно следуют из определения операции транспонирования матрицы. #

Для доказательства свойства 5.3 предположим, что матрица $A = [a_{ij}]$ имеет порядок $m \times n$, а матрица $B = [b_{jk}]$ – $n \times s$. Тогда B^{t} имеет порядок $s \times n$, A^{t} – $n \times m$. Следовательно, произведение $B^{\text{t}} A^{\text{t}}$ имеет смысл, причем порядок матрицы $B^{\text{t}} A^{\text{t}}$ равен $s \times m$. Далее, так как $AB = C$ имеет порядок $m \times s$, то $(AB)^{\text{t}} = C^{\text{t}}$ имеет порядок $s \times m$. Таким образом, матрицы $(AB)^{\text{t}} = C^{\text{t}}$ и $B^{\text{t}} A^{\text{t}} = U$ имеют одинаковые порядки. Для доказательства свойства 5.3 остается проверить, что соответствующие элементы матриц C^{t} и U совпадают. Обозначим элементы всех встречающихся здесь матриц соответствующими строчными буквами с двумя индексами, из которых первый обозначает номер строки, а второй номер столбца. Тогда будем иметь

$$u_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} b^{\text{t}}_{i\alpha} a^{\text{t}}_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{j\alpha} b_{\alpha i} = c_{ji} = c^{\text{t}}_{ij}.$$

Следовательно, $U = C^{\text{t}}$, а значит, и $(AB)^{\text{t}} = B^{\text{t}} A^{\text{t}}$. #

<u>Замечание 5.4.</u> Свойство 5.3 легко обобщить на случай произвольного числа сомножителей. А именно, если даны n матриц A_1, $A_2, \dots, A_n$, таких, что произведение $A_k A_{k+1}$ любых двух соседних матриц имеет смысл, то

$$\left(A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n\right)' = A_n' A_{n-1}' \ldots A_2' A_1'.$$

Замечание 5.5. Всюду выше рассматривались матрицы, элементы которых являлись вещественными или комплексными числами. На практике часто бывает полезно (например, для сокращения вычислений) рассматривать так называемые блочные матрицы, элементами которых являются не числа, а матрицы (блоки) меньших размеров, порядки которых определенным образом связаны между собой.

Блочная матрица может быть получена из произвольной матрицы $A=[a_{ij}]$ порядка $m \times n$ следующим образом:

Разобьем данную числовую матрицу A при помощи горизонтальных и вертикальных прямых на отдельные прямоугольные клетки (блоки матрицы). Блоки матрицы, получившиеся при этом, обозначим символами $A_{\alpha\beta}$. Здесь первый индекс α означает номер «блочной» строки, а второй индекс β – номер «блочного» столбца. В таком случае числовую матрицу $A=[a_{ij}]$ порядка $m \times n$ можно рассматривать как новую матрицу $A=[A_{\alpha\beta}]$ порядка $s \times p$, элементами которой являются указанные блоки.

Ценным свойством блочных матриц, обусловившим целесообразность их рассмотрения, является то, что основные операции с ними совершаются по тем же правилам, что и с обычными числовыми матрицами, т.е. если A и B – две матрицы одного порядка и одинаковым образом разбиты на блоки, то элементы матрицы $C = A + B$ получаются по формуле $C_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}$, элементы матрицы λA по формуле $\lambda A_{\alpha\beta}$.

Далее, пусть A и B – две блочные матрицы, такие, что число блочных столбцов в матрице A – равно числу блочных строк в матрице B и число строк каждого блока $B_{\beta\gamma}$ равно числу столбцов блока $A_{\alpha\beta}$, тогда «блочные» элементы $C_{\alpha\beta}$ матрицы $C = AB$ вычисляются по формуле:

$$C_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma}.$$

§ 2. Определители n-го порядка

1. Перестановки

Пусть даны n элементов $a_1,..., a_2,..., a_n$ (например, это могут быть числа 1, 2,..., n). Всевозможные расположения этих элементов называются перестановками из n элементов.

Всего из n различных между собой элементов можно составить $1 \cdot 2 ... n = n!$ различных перестановок.

Порядок элементов в одной из них, выбранной произвольно, принимается за нормальный, а сама перестановка называется главной. Если элементы обозначаются одной буквой с индексами, то нормальным порядком элементов будем считать тот, в котором индексы идут в порядке возрастания натуральных чисел. Во всех перестановках кроме главной – нормальный порядок элементов нарушен.

Сохранение нормального порядка двух элементов, независимо от того стоят ли эти два элемента рядом или отделены друг от друга другими элементами, называется порядком, а нарушение – инверсией. Например, в перестановке $a_2 a_1 a_5 a_3 a_4$ элементы a_2 и a_1, a_5 и a_4 образуют инверсию, если за главную взята перестановка $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$.

Перестановка с четным числом инверсий называется перестановкой четного типа или просто четной, а перестановка с нечетным числом инверсий – перестановкой нечетного типа или нечетной. Для того чтобы сосчитать число инверсий в данной перестановке, можно поступать следующим образом: найти число элементов, стоящих в данной перестановке, перед тем элементом, который в главной занимает первое место, затем, выбросив этот элемент, найти число элементов, стоящих в полученной перестановке перед тем, который в главной занимает второе место, и так далее до тех пор, пока не будут исчерпаны все элементы; сумма найденных таким образом чисел представляет число инверсий в данной перестановке.

Пример 5.1. Подсчитать число инверсий в перестановке 543162 (главная перестановка 123456).

Перед 1 стоят 3 элемента, составляющие 3 инверсии с элементом 1; в перестановке 54362 перед 2 стоит 4 элемента, составляющие 4 инверсии с элементом 2; в перестановке 5436 перед 3 стоит 2 элемента, составляющие 2 инверсии с элементом 3; в перестановке 546 перед 4 стоит 1 элемент, составляющий 1 инверсию с элементом 4; в перестановке 56 перед 5 нет элементов, т.е. нет инверсий с элементом 5. Число всех инверсий в данной перестановке равно $3+4+2+1=10$. Данная перестановка четная.

Пример 5.2. Найти число инверсий в перестановке *eacbd* (главная перестановка *abcde*).

В перестановке *eacbd* - 1 инверсия относительно *a*;
в перестановке *ecbd* - 2 инверсии относительно *b*;
в перестановке *ecd* - 1 инверсия относительно *c*;
в перестановке *ed* - 1 инверсия относительно *d*.

Число всех инверсий в данной перестановке равно $1+2+1+$ $+1=5$. Данная перестановка нечетная.

2. Транспозиции

Определение 5.7. Взаимное перемещение двух элементов, входящих в данную перестановку, называется транспозицией.

Будем теперь всюду ниже рассматривать в качестве элементов перестановки первые n чисел $1, 2, \dots, n$ натурального ряда.

Имеет место следующее

Утверждение 5.2. Все $n\,!$ перестановок из n символов можно расположить в таком порядке, что каждая следующая будет получаться из предыдущей одной транспозицией, причем начинать можно с любой перестановки.

Доказательство. Будем доказывать это утверждение, используя метод математической индукции.

При $n = 2$ это утверждение очевидно. Предположим, что наше утверждение уже доказано для $n-1$, и докажем его для n. Предположим, что мы начали с перестановки

$$i_1,\ i_2, \dots, i_n. \tag{5.3}$$

Рассмотрим все перестановки из n символов, у которых на первом месте стоит элемент i_1. Таких перестановок $(n-1)!$ и их можно упорядочить в согласии с требованиями теоремы, притом начиная с перестановки (5.3), так как это сводится на самом деле к упорядочению всех перестановок из $(n-1)$ элементов, которое по предположению индукции можно начать с любой перестановки, в частности с перестановки $i_2, \dots, i_n$. В последней перестановке из n элементов, полученных таких путем, совершаем транспозицию элемента i_1 с любым другим элементом, например с i_2, и, начиная с вновь полученной перестановки, упорядочиваем нужным образом все те перестановки, у которых на первом месте стоит i_2, и т.д. Этим путем, очевидно, можно перебрать все перестановки из n элементов. #

Следствие 5.1. От любой перестановки из n элементов можно перейти к любой другой перестановке из тех же элементов при помощи нескольких транспозиций.

Утверждение 5.3. Всякая транспозиция меняет четность перестановки.

Доказательство. Пусть k и l – транспонируемые элементы перестановки. Для доказательства этого утверждения рассмотрим сначала случай, когда эти элементы стоят рядом, т.е. когда перестановку можно представить символом $AklB$, где A – группа элементов, предшествующих элементам kl, а B – группа элементов, следующих за ними. После транспозиции элементов k и l получится перестановка $AlkB$. Рассмотрим инверсии, образуемые элементом k с элементами группы A или группы B. Легко видеть, что число их одинаково как в перестановке $AklB$, так и в перестановке $AlkB$, так как относительное положение элемента k с каждым из элементов групп A и B не изменилось. То же самое справедливо и относительно элемента l. Изменение в относительном положении элементов k и l вызывает или появление инверсии, если kl не содержит инверсии, или потерю инверсии, если kl содержит инверсию. Следовательно, в этом случае происходит изменение числа инверсий на ± 1, т.е. при совершении транспозиции рядом стоящих элементов четность перестановки меняется

Рассмотрим теперь тот случай, когда транспонируемые элементы k и l отделены группой элементов $i_1,\ i_2, \dots, i_p$. Перестановку в этом случае можно представить символом

$$Aki_1i_2\dots i_p lB, \tag{5.4}$$

где A и B обозначают соответствующие группы элементов, предшествующих k и l и следующих за ними. Транспозицию элементов k и l можно получить в результате последовательного выполнения

$2p+1$ транспозиций соседних элементов, а именно, это будут транспозиции, переставляющие элементы k и i_1, затем k (уже стоящее на месте i_1) и i_2 и так далее, пока k не займет место элемента i_p. За этими p транспозициями следует транспозиция, переставляющая элементы k и l, а затем p транспозиций элемента l со всеми элементами i_s, после чего l займет место k. Таким образом, нечетное число раз мы меняли четность перестановки. Следовательно, перестановка (5.4) и перестановка $Ali_1i_2 \ldots i_pkB$ имеют противоположные четности.

Следствие 5.2. Перестановка является четной (нечетной) тогда и только тогда, когда она может быть получена из главной перестановки посредством четного соответственно нечетного числа транспозиций.

Следствие 5.3. При $n \geq 2$ число четных перестановок из n элементов равно числу нечетных перестановок и равно $n!/2$.

Доказательство. Упорядочим на основании утверждения 5.1 все перестановки из n элементов так, что каждая получается из предыдущей одной транспозицией. Согласно утверждению 5.2 соседние перестановки будут иметь противоположные четности, т.е. перестановки расположены так, что четные и нечетные чередуются. Справедливость утверждения теперь следует из того, что число $n!$ при $n \geq 2$ четно.

3. Определение определителя и его свойства

Определение 5.8. Определителем n – го порядка, соответствующим квадратной матрице $A=[a_{ij}]$ порядка n, называется алгебраическая сумма $n!$ членов, составленная следующим образом: членами служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному в каждой строке и в каждом столбце, причем знак члена равен $(-1)^t$, где t – число инверсий в перестановке вторых индексов элементов члена, когда сами элементы члена расположены в порядке возрастания первых индексов. Иными словами, обозначив определитель n- го порядка матрицы A через $\det A$, получим

$$\det A = \sum_p (-1)^{t(p)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n},$$

где p пробегает все $n!$ перестановок чисел 1, 2,..., n, а $t(p)$ – число инверсий в перестановке $p = j_1, j_2 \ldots j_n$.

Для определителя матрицы A принято также обозначение

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Замечание 5.6. Из определения определителя n-го порядка имеем:

при $n=2$ $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

при $n=3$ $\det A = a_{12}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

Как нетрудно заметить, это определение совпадает с определением определителя второго и третьего порядков, данным ранее (см. гл. 1).

Лемма 5.1 (о знаке члена определителя). Произведение $a_{i_1k_1} a_{i_2k_2} \ldots a_{i_nk_n}$ входит в определитель n-го порядка со знаком, определяемым выражением $(-1)^{t[p(i)]+t[p(k)]}$, где $t[p(i)]$ – число инверсий в перестановке первых индексов $i_1, i_2 \ldots i_n$, а $t[p(k)]$ – число инверсий в перестановке вторыхиндексов $k_1, k_2 \ldots k_n$.

Доказательство. Отметим, прежде всего, что если поменять местами два множителя произведения $a_{i_1k_1} a_{i_2k_2} \ldots a_{i_nk_n}$, то как в первых, так и во вторых его индексах произойдет по одной транспозиции и, следовательно, четность каждого из чисел s и t изменится, а четность их суммы $s+t$ останется прежней.

Пусть нам дано произведение $a_{i_1k_1} a_{i_2k_2} \ldots a_{i_nk_n}$. С помощью нескольких транспозиций этих множителей расположим их так, чтобы первые индексы шли в порядке возрастания. Это можно сделать в силу следствия из утверждения 5.1. Предположим, что в конечном счете наше произведение представлено в виде $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$. Знак этого члена согласно определению определителя равен $(-1)^{t[p(j)]}$, где $t[p(j)]$ – число инверсий в перестановке вторых индексов $j_1, j_2 \ldots j_n$. Но так как четность суммы $t[p(i)]+t[p(k)]$

числа инверсий в первых и числа инверсий во вторых индексах при транспозиции множителей не менялась, то четность числа $t\,[p(i)]+t\,[p(k)]$ совпадает с четностью числа $t\,[p(j)]$ – числа инверсий в перестановке вторых индексов произведения $a_{1j_1}\dots a_{nj_n}$, так как первые индексы образуют в нем 0 инверсий. Следовательно,

$$(-1)^{t[p(i)]+t[p(k)]}=(-1)^{t[p(j)]},$$

что и доказывает наше утверждение.

Вычисление определителя матрицы n-го порядка, основанное на одном лишь определении, представляет собой в общем случае весьма трудоемкий процесс, так как число слагаемых, из которых составляется определитель, очень быстро растет с увеличением n. Свойства определителей, приведенные ниже, облегчают эту задачу.

Свойство 5.4. Определитель при транспонировании не меняется, т.е. $\det A=\det A^{|}$, где $A^{|}$ – матрица, транспонированная к A (см. гл. 5, п. 1).

Доказательство. Возьмем произвольное произведение

$$p=a_{i_1k_1}\,a_{i_2k_2}\dots a_{i_nk_n},$$

входящие в состав определителя $\det A$ (сомножители находятся по одному в каждой строке и столбце). Все сомножители в этом произведении являются также и элементами матрицы $A^{|}$, взятыми по одному из каждого столбца и каждой строки, а значит это произведение p входит и в состав определителя $\det A^{|}$. Аналогичным образом убеждаемся, что всякое произведение, принадлежащее $\det A^{|}$, входит и в $\det A$. Следовательно, определители $\det A$ и $\det A^{|}$ составляются из одних и тех же произведений. Различие заключается только в том, что в $\det A$ первые индексы – это номера строк, а вторые – номера столбцов, а в $\det A^{|}$ – наоборот. Для доказательства свойства 5.4 остается показать, что каждое произведение p входит в наши определители $\det A$ и $\det A^{|}$ с одним и тем же знаком. Но это непосредственно следует из леммы о знаке члена определителя, так как знак произведения p как в первом, так и во втором определителях совпадает со знаком числа $(-1)^{t[p(i)]+t[p(k)]}$. #

Замечание 5.7. Доказанное свойство 5.4 важно в том отношении, что если для строк (столбцов) определителя Δ n-го порядка доказано некоторое свойство E, то можно быть уверенным, что свойство

E верно и для столбцов (строк) определителя. В самом деле, в силу свойства 5.4 можно, не изменяя значения, транспонировать определитель Δ, после чего строки станут столбцами, а столбцы – строками. По этой причине свойство 5.4 называют иногда свойством равноправности строк и столбцов определителя.

Свойство 5.5. Если матрица B получается из квадратной матрицы A n-го порядка перестановкой двух строк (или столбцов), то $\det B=-\det A$.

Доказательство. Покажем это свойство, например, для строк определителя:

Предположим, что в матрице A меняются местами i-я и k-я строки. Возьмем произвольное произведение:

$$p=a_{1j_1}\,a_{2j_2}\dots a_{ij_i}\dots a_{kj_k}\dots a_{nj_n}, \qquad (5.5)$$

входящее в состав определителя $\det A$. Все сомножители в этом произведении являются также и элементами матрицы B, причем и в матрице B они принадлежат разным строкам и разным столбцам. Но это значит, что p входит и в состав определителя $\det B$. Ясно, что всякое произведение, входящее в $\det B$, будет входить также и в $\det A$. Следовательно, состав всех $n!$ произведений для обоих определителей один и тот же. Для доказательства свойства 5.5 остается показать, что произведение p входит в $\det A$ и $\det B$ с противоположными знаками. Для этого рассмотрим член (5.5) определителя $\det A$. Так как его множители расположены в порядке следования строк в $\det A$, то он входит в определитель $\det A$ со знаком

$$(-1)^{t\,[p\,(j_1\dots j_i\dots j_k\dots j_n)]}.$$

Для того чтобы найти знак этого же члена p в определителе $\det B$ расположим его множители в порядке следования строк в $\det B$:

$$a_{1j_1}\;\;a_{2j_2}\dots\;a_{kj_k}\dots\;a_{ij_i}\dots\;a_{nj_n}$$

(элемент a_{kj_k} содержится в i-й строке $\det B$, а a_{ij_i} – в k-й). Первые индексы в $\det B$, как и в $\det A$, указывают номера строк, поэтому рассматриваемое произведение в $\det B$ войдет со знаком

$$(-1)^{t\,[p\,(j_1\dots j_k\dots j_i\dots j_n)]}.$$

Но перестановка $j_1\,j_2\dots j_k\dots j_i\dots j_n$ получается из перестановки $j_1\,j_2\dots j_i\dots j_k\dots j_n$ посредством одной транспозиции, а значит числа

$t[p(j_1 \ldots j_i \ldots j_n)]$ и $t[p(j_1 \ldots j_k \ldots j_i \ldots j_n)]$ разной четности. Следовательно, каждый член определителя $\det A$ входит в определитель $\det B$ с противоположным знаком, и значит

$$\det B = -\det A.$$

Свойство 5.6. Определитель с двумя одинаковыми строками или с двумя одинаковыми столбцами) равен нулю.

Доказательство. Пусть определитель равен числу Δ и пусть элементы i-й и k-й строк ($i \neq k$) равны между собой. После перестановки этих двух строк определитель станет равен в силу свойства 5.5 числу $(-\Delta)$. Так как, однако, переставляются одинаковые строки, то определитель на самом деле не изменится, т.е. $\Delta = -\Delta$, откуда $\Delta = 0$.

Свойство 5.7. (линейное свойство определителя). Если в определителе Δn-го порядка k-я строка $\vec{a}_k$ является линейной комбинацией двух строк $\vec{b}_k$ и $\vec{c}_k$ с коэффициентами λ и μ, т.е. $\vec{a}_k = \lambda \vec{b}_k + \mu \vec{c}_k$, то

$$\Delta = \det\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \lambda \vec{b}_k + \mu \vec{c}_k \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} = \lambda \det\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_k \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} + \mu \det\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{c}_k \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} = \lambda \Delta_1 + \mu \Delta_2 .$$

Доказательство. Справедливость утверждения вытекает из равенства

$$\Delta = \sum_p (-1)^{t[p(j)]} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots (\lambda b_{kj_k} + \mu c_{kj_k}) \ldots a_{nj_n} =$$

$$= \lambda \sum_p (-1)^{t[p(j)]} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots b_{kj_k} \ldots a_{nj_n} + \mu \sum_p (-1)^{t[p(j)]} \times$$

$$\times a_{1j_1} \ldots c_{kj_k} \ldots a_{nj_n} = \lambda \Delta_1 + \mu \Delta_2 . \ \#$$

Замечание 5.8. Линейное свойство, очевидно, справедливо и для случая, когда k-я строка является линейной комбинацией не двух, а нескольких строк. Линейное свойство, конечно, справедливо и для столбцов определителя.

Свойство 5.8. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя умножить на некоторое число λ, то сам определитель умножится на λ; иначе, общий множитель всех элементов некоторой строки (столбца) можно выносить за знак определителя, т.е.

$$\det\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \lambda \vec{a}_k \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} = \lambda \det\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_k \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Доказательство следует из свойства 5.7 при $\mu = 0$. #

Свойство 5.9. Если определитель имеет нулевую строку (нулевой столбец), то он равен нулю.

Доказательство следует из свойства 5.7 при $\lambda = \mu = 0$. #

Свойство 5.10. Если определитель имеет две пропорциональные строки (два пропорциональных столбца), то он равен нулю.

Доказательство. Действительно, в силу свойства 5.8, множитель пропорциональности можно вынести за знак определителя, после чего получится определитель с двумя одинаковыми строками, который равен нулю в силу свойства 5.6. #

Свойство 5.11. Если к элементам некоторой строки или некоторого столбца определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (другого столбца), умноженные на произвольный множитель λ, то величина определителя не изменится, т.е.

$$\det\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix},$$

где $i \neq j$.

Доказательство следует из свойств 5.6 и 5.7. #

Свойство 5.12. Определитель Δ, у которого одна строка (столбец) является линейной комбинацией остальных строк (столбцов), равен нулю.

Доказательство. Из свойства 5.7 следует, что определитель Δ равен сумме $(n-1)$-го определителя $\Delta_1, \ldots, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$, каждый из которых имеет по две одинаковые строки. Следовательно, в силу свойства 5.6 $\Delta = 0$. #

4. Разложение определителя по элементам строки или столбца

Определение 5.9. Минором M_{ik} элемента a_{ik} определителя Δn-го порядка матрицы A называется определитель $(n-1)$-го порядка, получающийся из Δ вычеркиванием i-й строки и k-го столбца.

Алгебраическим дополнением данного элемента a_{ik} определителя Δn-го порядка матрицы A называется число, равное $(-1)^{i+k} M_{ik}$ и обозначаемое A_{ik}, т.е. $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

Лемма 5.2. Если все элементы i-й строки (столбца) определителя Δ, кроме, может быть, одного a_{ik}, равны нулю, то определитель Δ равен произведению a_{ik} на алгебраическое дополнение этого элемента, т.е.

$$\Delta = a_{ik} A_{ik}.$$

Доказательство. В силу свойства 5.4 определителей лемму достаточно доказать для строки. Рассмотрим сначала частный случай, когда в определителе Δ все элементы первой строки, кроме a_{11} равны нулю, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Так как $a_{1j_1} = 0$ при $j_1 \neq 1$, то Δ будет составлен только из произведений вида $a_{11} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$, где индексы $j_2, \dots, j_n$ образуют перестановку из чисел 2, 3,..., n. Определитель Δ, следовательно, можно записать в виде (см. определение 5.8):

$$\Delta = \sum_p (-1)^{t[p(1, j_2, \dots, j_n)]} a_{11} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

где суммирование идет по всевозможным перестановкам $j_2 \dots j_n$ чисел 2,..., n. Множитель a_{11} является общим для всех слагаемых, поэтому его можно вынести за знак суммы. С другой стороны, так как единица, стоящая на первом месте, не образует ни одной инверсии, то $t[p(1, j_1, \dots, j_n)] = t[p(j_2, \dots, j_n)]$ и поэтому

$$\Delta = a_{11} \sum_p (-1)^{t[p(j_2, \dots, j_n)]} a_{2j_2} \dots a_{nj_j}.$$

где суммирование происходит по всевозможным перестановкам $j_2, \dots, j_n$ чисел 2, 3,..., n. А так как сумма

$$\sum_p (-1)^{t[p(j_2, \dots, j_n)]} a_{2j_2} \dots a_{nj_j},$$

очевидно, равна определителю $(n-1)$-го порядка, получающемуся из Δ вычеркиванием первой строки и первого столбца, т.е. равна M_{11}, то $\Delta = a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}$.

Рассмотрим общий случай, когда все элементы i-й строки кроме элемента a_{ik} равны нулю, т.е., когда определитель имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{ik} & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Переместим k-й столбец определителя Δ на первое место, последовательно меняя его местами с $(k-1)$-м, $(k-2)$-м столбцами и т.д., пока он не окажется на месте первого столбца. В результате согласно свойству 5.5 определитель Δ умножится на $(-1)^{k-1}$. Затем переместим i-ю строку получившегося определителя на первое место, последовательно меняя ее местами с $(i-1)$-й, $(i-2)$-й и т.д., наконец, с первой строкой. В результате будет совершена $(i-1)$ перестановка строк определителя, при каждой из которых определитель умножается на (-1). В конечном счете мы получим определитель:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{ik} & 0 & \dots & 0 \\ a_{1k} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{nk} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

отличающийся от определителя Δ только знаком $(-1)^{k-1}(-1)^{i-1} = (-1)^{k+i}$. Но, как было показано выше, определитель Δ_1 равен произведению a_{ik} на определитель $(n-1)$-го порядка, получающийся из Δ_1 вычеркиванием первого столбца и первой строки, или, что то же самое, получающийся из Δ вычеркиванием i-й строки и k-го столбца, т.е. $\Delta_1 = a_{ik} M_{ik}$ и, следовательно, $\Delta = (-1)^{i+k}\Delta_1 = (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = a_{ik} A_{ik}$. #

Теорема 5.1. Каждый определитель Δ матрицы $A = [a_{\alpha\beta}]$ n-го порядка равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad \left(\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} A_{jk}\right).$$

Доказательство. В силу свойства 5.4 достаточно доказать теорему о разложении определителя по строке. Пусть i – произвольная $(1 \le i \le n)$ строка определителя Δ. Очевидно, что, в силу свойства 5.7, определитель Δ можно представить следующим образом:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k ,$$

где

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{ik} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, k = 1, 2, \dots, n.$$

Согласно предыдущей лемме $\Delta_k = a_{ik} A_{ik}$ и, следовательно,

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} . \#$$

Следствие 5.4. Сумма произведений элементов любой строки или столбца определителя Δ на алгебраические дополнения соответствующих элементов любой другой строки (другого столбца) равна нулю, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0 \text{ при } i \ne k \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{is} = 0 \text{ при } j \ne s\right).$$

Доказательство. В силу свойства 5.4 определителей достаточно доказать справедливость утверждения для строк. Согласно теореме 5.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj} . \tag{5.6}$$

В этой формуле, как нетрудно заметить, алгебраичеcкме дополнения $A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{kn}$ не зависят от элементов k-й строки $a_{k1}, \dots, a_{kn}$, т.е. равенство (5.6) является тождеством относительно $a_{k1}, \dots, a_{kn}$ и сохраняется при замене чисел $a_{k1}, \dots, a_{kn}$ любыми другими n числами. Подставив в (5.6) вместо чисел $a_{k1}, \dots, a_{kn}$ элементы i-й строки $(i \ne k)$ $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$, получим слева определитель с двумя одинаковыми строками, равный нулю, согласно свойству 5.6. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0 \quad (i \ne k) . \#$$

5. Формула Бине–Коши

Ранее было определено понятие минора порядка $n-1$ для квадратной матрицы порядка n. В более общем случае, если из $m \times n$ матрицы $A = [a_{ij}]$ выбросить все строки кроме строк $i_1, i_2, \dots, i_p$ и все столбцы кроме столбцов $k_1, k_2, \dots, k_p$, то определитель полученной в результате матрицы называется минором матрицы A порядка p. Обозначать этот минор будем символом $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix}$, т.е.

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} = \det\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} \dots a_{i_1k_p} \\ \dots \\ a_{i_pk_1} \dots a_{i_pk_p} \end{vmatrix}.$$

Отметим, что индексы i и k не обязательно расположены в возрастающем порядке. Мы допускаем, чтобы они принимали повторяющиеся значения с очевидной интерпретацией: получающиеся в результате миноры равны нулю (см. свойство 5.6).

Замечание 5.9. Если A – квадратная матрица порядка n, то в этих обозначениях имеем $\det A = A\begin{pmatrix} 12\dots n \\ 12\dots n \end{pmatrix}$ и алгебраическое дополнение

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & (i-1)(i+1) & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & (k-1)(k+1) & \dots & n \end{pmatrix}$$

Теорема 5.2 (Бине-Коши). Пусть квадратная матрица C порядка n равна произведению двух прямоугольных матриц A и B соответственно порядков $n \times m$ и $m \times n$, причем $m \ge n$. Тогда

$$C\begin{pmatrix} 12\dots n \\ 12\dots n \end{pmatrix} = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \dots < k_n \le m} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \qquad (5.7)$$

Доказательство. Пусть элементы матриц A, B и C равны соответственно a_{ij}, b_{ij} и c_{ij}. Так как $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, то можно написать

$$C\begin{pmatrix} 12\dots n \\ 12\dots n \end{pmatrix} = \det C = \begin{vmatrix} \sum_{\alpha_1=1}^{m} a_{1\alpha_1}b_{\alpha_1 1} & \dots & \sum_{\alpha_n=1}^{m} a_{1\alpha_n}b_{\alpha_n n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{\alpha_1=1}^{m} a_{n\alpha_1}b_{\alpha_1 1} & \dots & \sum_{\alpha_n=1}^{m} a_{n\alpha_n}b_{\alpha_n n} \end{vmatrix}.$$

Используя свойство линейности определителя по каждому из n столбцов определителя (свойство 5.7), получаем

$$C\begin{pmatrix} 12\dots n \\ 12\dots n \end{pmatrix} = \sum_{\alpha_1=1}^{m} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m} \det\begin{bmatrix} a_{1\alpha_1}b_{\alpha_1 1} \dots a_{1\alpha_n}b_{\alpha_n n} \\ a_{n\alpha_1}b_{\alpha_1 1} \dots a_{n\alpha_n}b_{\alpha_n n} \end{bmatrix} = \qquad (5.8)$$

$$= \sum_{\alpha_1=1}^{m} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m} b_{\alpha_1 1}b_{\alpha_2 2}\dots b_{\alpha_n n} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Каждый из индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ не зависит от других и может принимать любые значения от 1 до m, поэтому полученное выражение представляет собой сумму m^n слагаемых. В этой сумме будут равны нулю те слагаемые, у которых значения хотя бы двух индексов равны между собой, так как будут равны нулю соответствующие миноры матрицы A. Все остальные слагаемые можно разбить на группы по $n!$ слагаемых в каждой, объединяя в одну группу все те слагаемые, значение индексов которых образуют одну и ту же совокупность чисел.

Обозначим $k_1, k_2, \dots, k_n$ – упорядоченное в порядке возрастания расположение значений индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Пусть $\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (-1)^N$, где N – число транспозиций, необходимых для преобразования перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ к главной перестановки $k_1, k_2, \dots, k_n$. Тогда в пределах одной группы значений индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сумма соответствующих слагаемых из формулы (5.8) будет

$$\sum_{p(\alpha)} \varepsilon(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) b_{\alpha_1 1} b_{\alpha_2 2} \dots b_{\alpha_n n} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} =$$

$$= A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \left(\sum_{p(\alpha)} \varepsilon(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) b_{\alpha_1 1} b_{\alpha_2 2} \dots b_{\alpha_n n} \right) =$$

$$= A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \left(\sum_{p(\alpha)} (-1)^{t[p(\alpha)]} b_{\alpha_1 1} b_{\alpha_2 2} \dots b_{\alpha_n n} \right) =$$

$$= A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \left(\sum_{p(\alpha)} (-1)^{t[p(\alpha)]} b'_{1\alpha_1} b'_{2\alpha_2} \dots b'_{n\alpha_n} \right) =$$

$$= A\begin{pmatrix}1\ 2\ \dots\ n\\ k_1k_2\dots k_n\end{pmatrix}B^{|}\begin{pmatrix}1\ 2\ \dots\ n\\ k_1k_2\dots k_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\ 2\ \dots\ n\\ k_1k_2\dots k_n\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}k_1k_2\dots k_n\\ 1\ 2\ \dots\ n\end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Здесь использован тот очевидный факт, что числа ε (α_1, $\alpha_2,\dots,\ \alpha_n$), и $t[p(\alpha)]$, где $t[p(\alpha)]$ – число инверсий в перестановке α_1, $\alpha_2,\dots,\ \alpha_n$ чисел k_1, $k_2,\dots,\ k_n$ одной четности. Это следует из следствия 5.2 утверждения 5.3, и того, что k_1, $k_2,\dots,\ k_n$ – четная перестановка.

Из полученного соотношения (5.9) и вытекает утверждение теоремы 5.2. #

Следствие 5.5. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей сомножителей.

Доказательство. Сумма в формуле (5.7) при $m = n$ будет состоять из одного слагаемого

$$C\begin{pmatrix}1\,2\dots n\\ 1\,2\dots n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\,2\dots n\\ 1\,2\dots n\end{pmatrix}\cdot B\begin{pmatrix}1\,2\dots n\\ 1\,2\dots n\end{pmatrix}$$

или, что то же самое, $\det C = \det A \cdot \det B$. #

§ 3. Ранг матрицы

1. Линейная зависимость столбцов (строк) матрицы

Как отмечалось выше (см. гл. 5 п. 1), любую матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ . & . & . & .\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

порядка $m \times n$ можно записать в виде:

$$A = \left[\ \underset{\downarrow}{a_1},\ \underset{\downarrow}{a_2},\ \dots,\ \underset{\downarrow}{a_n}\ \right] = \begin{bmatrix}\vec a_1\\ \vec a_2\\ \vdots\\ \vec a_m\end{bmatrix},\ \text{где}\ \underset{\downarrow}{a_i} = \begin{bmatrix}a_{1i}\\ a_{2i}\\ \vdots\\ a_{mi}\end{bmatrix}$$

* $b_{k\alpha_k}$ – элементы, а $B^{|}\begin{pmatrix}1\dots n\\ k_1\dots k_n\end{pmatrix}$ – минор транспонированной к B матрицы.

обозначает i-й столбец матрицы A, а $\vec a_k = [a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}]$ k-ю строку. Введем для столбцов матрицы A следующие понятия.

Пусть $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\ \alpha_k$ – любые числа, тогда столбцы $\underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2}, \dots, \underset{\downarrow}{a_k}$ матрицы A называются линейно независимыми, если равенство

$$\alpha_1 \underset{\downarrow}{a_1} + \alpha_2 \underset{\downarrow}{a_2} + \dots + \alpha_k \underset{\downarrow}{a_k} = \underset{\downarrow}{0} \tag{5.10}$$

возможно лишь в случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ (здесь $\underset{\downarrow}{0}$ – столбец высоты m, все элементы которого равны нулю).

Столбцы $\underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2}, \dots, \underset{\downarrow}{a_k}$ матрицы A называются линейно зависимыми, если найдутся такие числа $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\ \alpha_k$, не все равные нулю ($|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_k|^2 \neq 0$), что справедливо равенство (5.10).

Равенство (5.10) эквивалентно следующему:

$$\alpha_1\begin{bmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}a_{12}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{bmatrix} + \dots + \alpha_k\begin{bmatrix}a_{1k}\\ \vdots\\ a_{mk}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}.$$

Это равенство в свою очередь согласно определению равенства двух матриц эквивалентно следующей системе линейных уравнений относительно $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\ \alpha_k$:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1k}\alpha_k = 0;\\ a_{21}\alpha_1 + \dots + a_{2k}\alpha_k = 0;\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ a_{m1}\alpha_1 + \dots + a_{mk}\alpha_k = 0.\end{cases} \tag{5.11}$$

Отсюда получаем важное следствие: столбцы $\underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2}, \dots, \underset{\downarrow}{a_k}$ матрицы A линейно независимы тогда и только тогда, когда система (5.11) имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, и столбцы $\underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2}, \dots, \underset{\downarrow}{a_k}$ матрицы A линейно зависимы тогда и только тогда, когда система (5.11) имеет хотя бы одно ненулевое решение.

Говорят, что столбец $\underset{\downarrow}{a_j}$ есть линейная комбинация столбцов $\underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{a_k}$ с коэффициентами $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, если

$$\underset{\downarrow}{a_j} = \beta_1 \underset{\downarrow}{a_1} + \beta_2 \underset{\downarrow}{a_2} + \ldots + \beta_k \underset{\downarrow}{a_k}.$$

Справедлив следующий критерий линейной зависимости столбцов.

Теорема 5.3. Столбцы $\underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{a_k}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из этих столбцов является линейной комбинацией остальных.

Доказательство. Необходимость. Пусть столбцы $\underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{a_k}$ линейно зависимы. Следовательно, в равенстве (5.10) не все коэффициенты α_i равны нулю. Допустим для определенности, что $\alpha_1 \neq 0$. Тогда из (5.10) находим, что

$$\underset{\downarrow}{a_1} = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \underset{\downarrow}{a_2} + \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) \underset{\downarrow}{a_3} + \ldots + \left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_1}\right) \underset{\downarrow}{a_k}.$$

Из этого равенства следует необходимость утверждения, сформулированного в теореме.

Достаточность. Пусть один из столбцов (для определенности $\underset{\downarrow}{a_1}$) есть линейная комбинация остальных, т.е. имеет место равенство:

$$\underset{\downarrow}{a_1} = \lambda_2 \underset{\downarrow}{a_2} + \lambda_3 \underset{\downarrow}{a_3} + \ldots + \lambda_k \underset{\downarrow}{a_k} \text{ или } (-1)\underset{\downarrow}{a_1} + \lambda_2 \underset{\downarrow}{a_2} + \ldots + \lambda_k \underset{\downarrow}{a_k} = \underset{\downarrow}{0}.$$

Так как среди чисел (-1), $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ по крайней мере одно отлично от нуля, то согласно определению столбцы $\underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{a_k}$ линейно зависимы. #

2. Достаточные условия линейной зависимости и линейной независимости столбцов

1. Если среди столбцов $\underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{a_k}$ имеется нулевой столбец, то столбцы $\underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{a_k}$ линейно зависимы.

2. Если в системе столбцов $\underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{a_k}$ некоторая подсистема столбцов линейно зависима, то и вся система a_1, $a_2, \ldots, a_k$ линейно зависима.

3. Если вся система столбцов линейно независима, то и любая подсистема столбцов линейно независима.

Доказательство. 1. Без ограничения общности можно считать, что $\underset{\downarrow}{a_1} = \underset{\downarrow}{0}$. Тогда равенство (5.10) справедливо при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots a_k = 0$.

2. Пусть для определенности столбцы $\underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{a_l}$ $(l < k)$ линейно зависимы, т.е. справедливо равенство

$$\alpha_1 \underset{\downarrow}{a_1} + \alpha_2 \underset{\downarrow}{a_2} + \ldots + \alpha_k \underset{\downarrow}{a_k} = \underset{\downarrow}{0}, \quad (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \ldots + |\alpha_k|^2 \neq 0).$$

Тогда с теми же числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ и $\alpha_{l+1} = \ldots = \alpha_k = 0$, очевидно, справедливо равенство (5.10).

3. Предполагая линейную зависимость подсистемы столбцов, согласно предыдущему свойству получаем, что и вся система столбцов линейно зависима, что противоречит условию 3. #

Замечание 5.10. Все указанные определения и свойства аналогично вводятся и переносятся для строк матрицы.

3. Определение ранга матрицы. Теорема о базисном миноре

Пусть k – любое натуральное число, $k \leq \min(m, n)$. Выберем в матрице $A = [a_{ij}]$ произвольным образом k строк с номерами $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m$ и k столбцов с номерами $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots$ $\ldots < j_k \leq n$. Из элементов матрицы A, лежащих на пересечении выбранных k строк и k столбцов, можно составить определитель:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \dots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}$$

Он называется минором k-го порядка матрицы A. При $k = 1$ под минором первого порядка понимается элемент a_{ij} матрицы A.

Из теоремы 5.1 немедленно следует

предложение 5.1. Если в матрице A все миноры k-го порядка равны нулю, то равны нулю и все миноры более высокого порядка, если таковые существуют.

Определение 5.10. Рангом матрицы A называется такое целое число r (обозначается $Rang\,A = r$), что среди миноров r-го порядка матрицы A существует хотя бы один, не равный нулю, а все миноры $(r + 1)$-го порядка, если только их можно составить, равны нулю. Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг такой матрицы считается равным нулю.

Пусть $Rang\,A = r$, тогда согласно предложению 5.1 в матрице A все миноры порядка выше r, если таковые существуют, равны нулю. Следовательно, ранг матрицы может быть определен как наивысший из порядков, не равных нулю миноров этой матрицы.

Минор M_r r-го порядка называется базисным, если он не равен нулю, а все миноры $r + 1$-го порядка равны нулю. Очевидно, что у матрицы A может быть несколько базисных миноров.

Если базисный минор фиксирован, то строки и столбцы, на пересечении которых стоит базисный минор, назовем соответственно базисными строками и базисными столбцами.

Имеет место следующая

теорема 5.4 (о базисном миноре). Для любой матрицы базисные строки (базисные столбцы) линейно независимы и всякая строка (всякий столбец) матрицы линейно выражается через базисные строки (базисные столбцы).

Доказательство. В силу свойства 5.4 достаточно доказать теорему для столбцов матрицы. Если бы базисные столбцы были линейно зависимы, то по критерию линейной зависимости один из столбцов являлся бы линейной комбинацией остальных и по свойству 5.12 определителей базисный минор был бы равен нулю, что

противоречило бы определению базисного минора. Следовательно, базисные столбцы линейно независимы.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Без ограничения общности можно считать, что отличный от нуля минор r-го порядка (базисный минор) расположен в левом верхнем углу. Тогда рассмотрим минор

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & i \\ 1 & 2 & \dots & r & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}. \qquad (5.12)$$

Если $i \le r$ или $j \le r$, то минор равен нулю, так как в нем имеется повторяющаяся строка или столбец. Если же $i > r$ и $j > r$, то минор равен нулю, так как $Rang\,A = r$. Таким образом, минор $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & i \\ 1 & 2 & \dots & r & j \end{pmatrix} = 0$ для любых индексов i и j.

Обозначим $C_1, C_2, \dots, C_r, C_{r+1}$ – алгебраические дополнения элементов $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}, a_{ij}$ соответственно. Разлагая определитель (5.12) по элементам последней строки, получаем

$$a_{i1}C_1 + a_{i2}C_2 + \dots + a_{ir}C_r + a_{ij}C_{r+1} = 0 \text{ для любого } 1 \le i \le m.$$

Заметим теперь, что коэффициенты $C_1, C_2, \dots, C_r, C_{r+1}$ не зависят от выбора i. Это означает, что

$$C_1\underset{\downarrow}{a_1} + C_2\underset{\downarrow}{a_2} + \dots + C_r\underset{\downarrow}{a_r} + C_{r+1}\underset{\downarrow}{a_j} = \underset{\downarrow}{0}, \text{ где } \underset{\downarrow}{a_k} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}.$$

Но $C_{r+1} = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ 1 & 2 & \dots & r \end{pmatrix} \ne 0$ и поэтому $\underset{\downarrow}{a_j}$ – является линейной комбинацией столбцов $\underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2}, \dots, \underset{\downarrow}{a_r}$. Это верно для любого $1 \le j \le n$. Следовательно, теорема доказана.

Следствие 5.6 (критерий равенства нулю определителя). Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы (строки) линейно зависимы.

Доказательство. Необходимость. Если $\det A = 0$, то $Rang\, A < n$. Тогда по теореме о базисном миноре существует небазисный столбец, являющийся линейной комбинацией базисных столбцов. В эту линейную комбинацию можно включить и все оставшиеся столбцы, поставив перед ними нули. Итак, один столбец является линейной комбинацией остальных. Следовательно, по критерию линейной зависимости столбцы линейно зависимы.

Достаточность. Если столбцы $\det A$ линейно зависимы, то по критерию линейной зависимости один столбец $\det A$ является линейной комбинацией остальных столбцов и, следовательно, по свойству 5.12 определителей $\det A = 0$.

<u>Теорема 5.5 (о ранге матрицы).</u> Максимальное число линейно независимых строк матрицы A равно максимальному числу линейно независимых столбцов и равно рангу матрицы.

Доказательство. Пусть $Rang\, A = r$. Тогда, в силу теоремы о базисном миноре, r базисных столбцов линейно независимы, а любые $(r + 1)$, а, следовательно, и любые $p > r$ столбцов линейно зависимы. Итак, максимальное число линейно независимых столбцов равно r. Аналогично доказывается, что максимальное число линейно независимых строк также равно r.

4. Методы вычисления ранга матрицы

Метод нахождения ранга матрицы, основанный на определении ранга матрицы, требует вычисления хотя и конечного, но может оказаться при больших порядках матрицы достаточно большого числа миноров этой матрицы. Следующее замечание позволит значительно сократить количество вычисляемых миноров. Отметим, что при доказательстве теоремы о базисном миноре не используется равенство нулю всех миноров $(r + 1)$-го порядка матрицы A – в действительности употреблялись только те миноры $(r + 1)$-го порядка, которые окаймляют данный не равный нулю минор M_r r-го порядка, т.е. которые содержат его целиком внутри себя, и поэтому из равенства нулю лишь этих миноров вытекает, что ранг матрицы равен r. Приходим к следующему правилу вычисления ранга матрицы. При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если же найден минор k-го порядка M_k отличный от нуля, то требуют вычисления лишь минора $(k + 1)$-го порядка, окаймляющего минор M_k: если все они равны нулю (или минор $(k + 1)$-го порядка не существует), то ранг матрицы равен k. Этот метод вычисления ранга матрицы называется методом окаймляющих миноров.

Другой метод вычисления ранга матрицы основан на использовании элементарных преобразований матриц.

<u>Определение 5.11.</u> Под элементарными преобразованиями матрицы понимаются следующие операции:

1) умножение какого-либо столбца матрицы на число, отличное от нуля;

2) прибавление к элементам одного столбца матрицы соответствующих элементов другого столбца;

3) перемена местами двух столбцов;

4)–6) аналогичны операциям 1)–3), произведенным над строками.

Применяя к матрице A элементарное преобразование, получим новую матрицу B. Этот факт символически обозначим $A \to B$. Очевидно, элементарные преобразования обратимы, т.е. если матрица B получена из A при помощи какого-либо элементарного преобразования, то и матрица A может быть получена из B при помощи некоторого элементарного преобразования, называемого обратным к первому.

Имеет место следующее важное

<u>Утверждение 5.4.</u> При элементарном преобразовании ранг матрицы не меняется. Другими словами, если $A \to B$, то $Rang\, A = Rang\, B$.

Доказательство. Справедливость утверждения для преобразований вида – 1), 3), 4), 6) - немедленно следует из теоремы 5.5 о ранге матрицы, так как преобразования такого вида, очевидно, не меняют максимального числа линейно независимых строк (столбцов). Докажем справедливость утверждения для преобразования 2) (для 6) показывается аналогично). Пусть ранг исходной матрицы равен r_A, а ранг матрицы B, полученной из A прибавлением к i-му столбцу элементов j-го столбца, равен r_B. Так как $Rang\, A = r_A$, то все миноры $r_A + 1$-го порядка матрицы A равны нулю. Покажем, что сложение столбцов не сделает ни один из этих миноров отличным от нуля. Действительно, если i-й толбец не входит в минор $r_A + 1$-го порядка матрицы B, то это очевидно. Если же i-й столбец входит в минор M_B r_A+1-го порядка матрицы B, то этот минор равен или сумме двух миноров r_A+1-го порядка исходной матрицы A (в случае, если j-й столбец матрицы A не входит в минор M_B), или он равен сумме минора r_A+1-го порядка матрицы A и определителя с двумя одинаковыми столбцами (в случае, если j-й столбец входит в минор M_B). Из этих соображений следует, что $r_B \le r_A$. В силу обратимости элементарного преобразования 2), в нашем рассуждении матрицы A и B можно поменять местами. В результате получим также неравенство $r_A \le r_B$, которое вместе с предыдущим дает равенство $r_A = r_B$. #

Утверждение может быть с пользой применено к вычислению ранга матрицы, а именно, если при помощи нескольких последовательно выполненных элементарных преобразований от матрицы A перешли к некоторой другой матрице C, то согласно утверждению $Rang\, C = Rang\, A$. Вычислив $Rang\, C$, будем знать и $Rang\, A$. Оказывается, что, отправляясь от любой матрицы A, всегда можно прийти к такой матрице C, вычисление ранга которой не представляет затруднений. В качестве такой матрицы C будет фигурировать трапециевидная матрица, т.е. матрица вида:

$$\begin{bmatrix} 1 & C_{12} & C_{13} & . & . & . & . & C_{1n} \\ 0 & 1 & C_{23} & . & . & . & . & C_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 & C_{rr+1} & . & C_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \end{bmatrix}. \qquad (5.13)$$

Имеет место следующее

<u>Утверждение 5.5.</u> Любая матрица при помощи элементарных преобразований над строками и при помощи перестановки столбцов может быть преобразована в трапециевидную матрицу.

Доказательство. Если матрица A нулевая, то она уже является трапециевидной (число единиц на главной диагонали равно нулю).

Допустим, что не все элементы матрицы A – нули. Тогда, переставляя строки и столбцы, можно элемент, не равный нулю, поместить в левый верхний угол. Поэтому можно считать, что $a_{11} \ne 0$. Разделив первую строку на a_{11}, получим матрицу, у которой $a_{11} = 1$. Вычтем теперь первую строку, умноженную соответственно на a_{21}, $a_{31}, \dots, a_{n1}$ из всех последующих строк. В результате получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & a^{|}_{22} & a^{|}_{23} & \dots & a^{|}_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & a^{|}_{m2} & a^{|}_{m3} & \dots & a^{|}_{mn} \end{bmatrix}.$$

Если все элементы $a^{|}_{ij}$ $(i = 2,\dots, m; j = 2,\dots, n)$ равны нулю, то полученная матрица – трапециевидная и утверждение доказано. Если же не все a_{ij} равны нулю, то, переставляя строки и столбцы, добьемся того, чтобы $a^{|}_{22} \ne 0$. Затем, так же как и выше, при помощи элементарных преобразований 1) и 2), приходим к матрице:

$$\begin{bmatrix} 1 & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ 0 & 1 & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ 0 & 0 & a^{||}_{33} & \dots & a^{||}_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & a^{||}_{m3} & \dots & a^{||}_{mn} \end{bmatrix}.$$

Продолжая этот процесс, через конечное число шагов придем к матрице (5.13). #

§ 4. Обратная матрица

1. Определение и свойства обратной матрицы

<u>Определение 5.12.</u> Пусть A – квадратная матрица n-го порядка. Квадратная матрица X того же порядка n называется обратной для A, если

$$AX = XA = E.$$

По поводу данного определения следует сделать следующее пояснение. Поскольку умножение матриц в общем случае некоммутативно, мы должны учитывать возможность того, что $AX \ne XA$.

В нашем определении на матрицу X наложено два условия: $AX = E$ и $XA = E$. Ввиду этого матрицу X можно было бы назвать двусторонней обратной для A. Если же о некоторых матрицах Y и Z известно только, что $AY = E$ и $ZA = E$, то Y естественно назвать правой обратной, а Z – левой обратной для A. Однако из теоремы об определителе произведения двух квадратных матриц и теоремы, следующей ниже, видно, что разнообразие обратных матриц фактически отсутствует: либо обратной матрицы вообще нет ни правой, ни левой, если $\det A = 0$, либо она только одна и притом двустороняя, если $\det A \neq 0$.

Теорема 5.6. Для того чтобы у матрицы A существовала обратная матрица необходимо и достаточно, чтобы $\det A \neq 0$; если $\det A \neq 0$, то $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ и

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A; если $\det A \neq 0$, то A имеет единственную обратную матрицу и притом двустороннюю.

Доказательство. Необходимость. Пусть у матрицы A существует хотя бы одна обратная матрица, например, правая обратная матрица B. Тогда из соотношения $AB = E$ следует $\det A \cdot \det B = 1$ и, следовательно, $\det A \neq 0$.

Достаточность. Пусть $\det A = \Delta \neq 0$. Рассмотрим матрицу

$$X = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (5.15)$$

Покажем, что матрица X является как правой, так и левой обратной для A. Для этого составим произведение AX. Элемент C_{ij}, стоящий в i-й строке и j-м столбце ($i, j = 1, 2,\dots, n$) этого произведения имеет вид:

$$C_{ij} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}.$$

Но по теореме 5.1 о разложении определителя по строке и следствию 5.4 имеем, что

$$C_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases}.$$

Следовательно, AX – единичная матрица. Точно так же доказывается, что $XA = E$. Таким образом, матрица X действительно является двусторонней обратной для матрицы A. Равенство $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ немедленно следует из определения обратной матрицы и теоремы об определителе произведения двух квадратных матриц (см. следствие 5.5). Остается показать единственность обратной матрицы. Пусть Y – какая-нибудь правая (в частности, двусторонняя) обратная для A, т.е. $AY = E$. Умножив это равенство слева на матрицу (5.15), получим $X(AY) = XE = X$. С другой стороны, $X(AY) = (XA)\,Y = EY = Y$. Следовательно, $Y = X$. Аналогично показывается, что если Z – левая обратная для A, то $Z = X$. Таким образом, для невырожденной матрицы A ($\det A \neq 0$) существует только одна правая обратная и только одна левая обратная матрица, причем они совпадают между собой и совпадают с единственной двусторонней матрицей (5.15). #

Свойства обратной матрицы. Если A и B – невырожденные матрицы одного и того же порядка, то имеют место следующие равенства:

Свойство 5.13. $(A^{-1})^{-1} = A$;

Свойство 5.14. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

Свойство 5.15. $(A')^{-1} = (A^{-1})'$, где A' – транспонированная к A матрица.

Доказательство. Свойство 5.13. Матрица A, очевидно, удовлетворяет матричному уравнению $A^{-1}X = XA^{-1} = E$, поэтому она является в силу единственности обратной матрицей для A^{-1}.

Свойство 5.14. Проверим, что матрица $B^{-1}A^{-1}$ удовлетворяет матричному уравнению $(AB)\,X = E$. Действительно,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E.$$

Таким образом, произведение $B^{-1}A^{-1}$ является правой обратной матрицей для AB и, следовательно, в силу единственности обратной матрицы, оно совпадает с $(AB)^{-1}$.

Свойство 5.15. Транспонируя равенство $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, очевидно, получим $(A^{-1})'\,A'=A'\,(A^{-1})'=E$. Откуда, согласно определению следует, что $(A^{-1})'$ является обратной к A', т.е.

$$(A^{-1})'=(A')^{-1}.\ \#$$

Замечание 5.11. Свойство 5.14, очевидно, справедливо и в случае произвольного числа сомножителей. Например, если A_1, $A_2,\dots,A_k$ – невырожденные квадратные матрицы n-го порядка, то

$$(A_1A_2\dots A_k)^{-1}=A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\dots A_1^{-1}.$$

2. Нахождение обратной матрицы методом элементарных преобразований

Лемма 5.3. Каждое элементарное преобразование строк матрицы A, т.е. преобразование одного из следующих типов: а) перестановка двух строк; б) умножение строки на число $\lambda\neq 0$; в) прибавление к одной строке другой может быть получено умножением матрицы A слева на некоторую невырожденную матрицу P.

Доказательство. Обозначим через B_{ij} матрицу порядка n, у которой элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен 1, а все остальные элементы равны нулю. Легко проверить, для того чтобы переставить местами i-ю и j-ю строки матрицы A, достаточно умножить эту матрицу слева на невырожденную матрицу

$$P=E-B_{ii}-B_{jj}+B_{ij}+B_{ji};$$

умножить i-ю строку на число $\lambda\neq 0$, достаточно умножить матрицу A слева на невырожденную матрицу

$$P=E-(1-\lambda)B_{ii};$$

прибавить к i-й строке j-ю, достаточно умножить матрицу A слева на невырожденную матрицу $P=E+B_{ij}$.

Теорема 5.7. Любую невырожденную матрицу A элементарными преобразованиями только строк можно привести к единичной матрице E. Если совершенные над A элементарные преобразования в том же порядке применить к единичной матрице E, то в результате получится матрица A^{-1}, обратная для A.

Доказательство. A – невырожденная матрица. Поэтому элементарными преобразованиями только строк она приводится к треугольной матрице, причем все ее диагональные элементы равны 1. Действительно, так как $\det A\neq 0$, то в первом столбце матрицы A хотя бы один элемент отличен от нуля. Без ограничения общности можно считать, что $a_{11}\neq 0$. Умножим элементы первой строки матрицы A на число $\frac{1}{a_{11}}$. Далее, к строке с номером $i>1$ прибавим полученную первую строку, умноженную на $(-a_{i1})$. Сделав это для всех $i=2,3,\dots,n$, получим матрицу вида:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right],$$

где через A_1 обозначена некоторая квадратная матрица порядка $n-1$. Значения элементов первой строки несущественны. Очевидно, что $\det A_1\neq 0$ (если это не так, т.е. $\det A_1=0$, то и $\det A=0$). К матрице A_1 применим тот же процесс и так далее. Через конечное число шагов придем к треугольной матрице вида:

$$C=\begin{bmatrix} 1 & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Эта треугольная матрица элементарными преобразованиями только строк может быть приведена к единичной матрице. Для доказательства к каждой строке матрицы C с номером $k=1,2,\dots,n-1$ прибавим последнюю строку, умноженную на $(-C_{kn})$. В результате получим матрицу вида:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & C_1 & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right],$$

где C_1 – квадратная матрица порядка $n-1$, получающаяся из C вычеркиванием последней строки и последнего столбца, и, следовательно, имеющая структуру, аналогичную C. К матрице C_1 применим тот же процесс и так далее. Через конечное число шагов, очевидно, придем к единичной матрице. Первое утверждение теоремы доказано. Для доказательства второго утверждения заметим, что согласно предыдущей лемме каждое элементарное преобразование строк матрицы A можно выполнить, умножая ее слева на соответствующие матрицы P_k, $k = 1, 2, \dots, s$. Поэтому получаем

$$P_s P_{s-1} \dots P_2 P_1 A = E.$$

Значит, согласно определению

$$P_s P_{s-1} \dots P_2 P_1 = A^{-1}$$

или

$$P_s P_{s-1} \dots P_2 P_1 E = A^{-1}. \ \#$$

Доказанная теорема дает нам еще один метод нахождения обратной матрицы. Удобно совершать элементарные преобразования над A и E одновременно, приписав к матрице A справа через черту единичную матрицу E. Тогда, совершая элементарные преобразования строк, приводящие A к E, над строками всей расширенной матрицы, справа от черты получаем матрицу A^{-1}, обратную A.

Пример 5.3. Методом элементарных преобразований найти матрицу A^{-1}, обратную для

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Припишем к данной матрице справа через вертикальную черту единичную матрицу того же порядка

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Будем совершать элементарные преобразования над строками расширенной матрицы таким образом, чтобы слева от черты получилась единичная матрица. Переход от одной матрицы к другой будем соединять знаком эквивалентности ~.

Поменяв местами первую и вторую строки матрицы, из полученной второй строки вычтем элементы первой, умноженной на 2

$$A \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

(из первой строки вычтем вторую, к третьей строке прибавим вторую и в полученной матрице поменяем местами вторую и третью строки)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim$$

(к первой строке прибавим удвоенную вторую)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right].$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задачи к главе №5

1) Вычислить число инверсий в перестановках (за исходное расположение принимается расположение 1, 2, 3,..., в возрастающем порядке)

а) 2, 3, 5, 4, 1; б) 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8, 2.

2) В какой перестановке чисел 1, 2, 3,..., n число инверсий наибольшее и чему оно равно?

3) Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих номеров и с какими знаками:

а) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$;

б) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$;

в) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$.

4) Выбрать значения l и k так, чтобы произведение $a_{62}a_{l5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ входило в определитель 6-го порядка со знаком минус.

5) Как изменится определитель порядка n, если первый столбец поставить на последнее место, а остальные столбцы подвинуть влево, сохраняя их расположение?

6) Как изменится определитель, если его строки написать в обратном порядке?

7) Найти все матрицы, коммутирующие с матрицей $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ (матрицы A и B коммутируемы, если $AB = BA$)

8) Доказать, что если две симметричные матрицы коммутируемы, то их произведение также есть симметричная матрица (матрица симметрична, если она совпадает со своей транспонированной).

9) Пусть A – квадратная матрица. Показать, что AA' – симметричная матрица. (A' – транспонированная матрица).

10) Пусть $A=\begin{bmatrix}a1 & a2\\ a3 & a4\end{bmatrix}$ – квадратная матрица 2-ого порядка не равна произведению единичной матрицы E на скаляр. Показать, что всякая матрица $X=\begin{bmatrix}x1 & x2\\ x3 & x4\end{bmatrix}$, коммутирующая с A, имеет вид $X=\lambda A+\mu E$, где μ и λ – некоторые числа.

11) Пусть A и B две прямоугольные матрицы такие, что AB и BA определены (очевидно, AB и BA квадратные матрицы, но вообще говоря, разных порядков). Показать, что $tr(AB)=tr(BA)$ (следом квадратной матрицы A называется сумма диагональных элементов, т.е. $trA=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$).

12) Вычислить определитель Вандермонда, т.е. определитель вида

$$\Delta(\lambda1,\lambda2,\ldots,\lambda n)=\begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{n-1}\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \ldots & \lambda_3^{n-1}\\ . & . & . & . & .\\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

13) Пусть $A=\begin{bmatrix}a1 & a2\\ -a2 & a1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}b1 & b2\\ -b2 & b1\end{bmatrix}$. Показать, что матрица AB – матрица того же типа, и что $AB=BA$.

14) Пусть матрица A – треугольная, (т.е. такая, что $a_{ij}=0$ для $j>i$) и пусть B – матрица того же типа. Показать, что AB – снова треугольная матрица, но что вообще говоря, $AB\neq BA$.

15) Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю.