ГЛАВА 6
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Общие понятия. Теорема Крамера

1. Основные понятия

Рассмотрим систему из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{6.1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные числа, а коэффициенты a_{ij} и свободные члены b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ являются заданными действительными или комплексными числами. Матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$ порядка $m \times n$,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1n}\, b_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn}\, b_m \end{bmatrix}$$ порядка $m \times (n+1)$

называются соответственно основной и расширенной матрицами системы (6.1). Введем вектор-столбцы высоты m

$$\underset{\downarrow}{a_1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \underset{\downarrow}{a_n} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

и вектор $\underset{\downarrow}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ высоты n.

Тогда систему (6.1) можно записать в виде:

$$x_1 \underset{\downarrow}{a_1} + x_2 \underset{\downarrow}{a_2} + \ldots + x_n \underset{\downarrow}{a_n} = \underset{\downarrow}{b} \tag{6.2}$$

или

$$A \underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}. \tag{6.3}$$

Определение 6.1. Решением системы (6.1) называется набор из n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, обращающих каждое уравнение системы (6.1) в верное числовое равенство.

Определение 6.2. Система (6.1) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Определение 6.3. Система (6.1) называется определенной, если она имеет единственное решение и неопределенной, если она имеет более одного решения.

Определение 6.4. Если $\underset{\downarrow}{b} \neq \underset{\downarrow}{0}$, то система (6.1) называется неоднородной, если $\underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{0}$, то – однородной. Однородная система имеет вид $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}$.

Определение 6.5. Частным решением системы (6.1) называется любое фиксированное решение этой системы.

Общим решением системы (6.1) называется решение, зависящее от нескольких произвольных постоянных (параметров) и такое, что любое частное решение системы (6.1) получается из общего при специальном выборе этих параметров.

Определение 6.6. Решить какую-либо систему (6.1) – это значит или установить ее несовместность, или в случае ее совместности найти все ее решения.

Замечание 6.1. Если в совместной системе (6.1) все коэффициенты a_{ij} и свободные члены b_i – действительны (комплексны), то любое решение этой системы – действительно (комплексно).

2. Решение системы линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера

Теорема 6.1 (Крамера). Пусть в системе (6.1) число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$) и матрица системы A невырождена, т.е. $\det A \neq 0$. Тогда система $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ имеет и притом единственное решение, которое может быть найдено по формулам:

$$x_k = \frac{\det D_k}{\det A}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.4}$$

где матрица D_k имеет вид:

$$D_k = \left[\underset{\downarrow}{a_1}, \dots, \underset{\downarrow}{a_{k-1}}, \underset{\downarrow}{b}, \underset{\downarrow}{a_{k+1}}, \dots, \underset{\downarrow}{a_n}\right].$$

Доказательство. Так как $\det A \neq 0$, то существует единственная обратная матрица A^{-1}. Покажем, что вектор-столбец $\underset{\downarrow}{x} = A^{-1}\underset{\downarrow}{b}$ есть решение системы $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$. Действительно, в силу ассоциативности умножения матриц имеем

$$A\,(A^{-1}\underset{\downarrow}{b}) = (A \cdot A^{-1})\underset{\downarrow}{b} = E\,\underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{b}.$$

Единственность указанного решения следует из единственности обратной матрицы A^{-1}. Для доказательства теоремы остается показать справедливость формул (6.4). Развертывая равенство $\underset{\downarrow}{x} = A^{-1}\underset{\downarrow}{b}$, получаем

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1k} & A_{2k} & \dots & A_{nk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} \sum\limits_{s=1}^{n} A_{s1}b_s \\ \dots \\ \sum\limits_{s=1}^{n} A_{sk}b_s \\ \dots \\ \sum\limits_{s=1}^{n} A_{sn}b_s \end{bmatrix}$$

Из теоремы 5.1 и последнего равенства и следуют формулы (6.4). #

§ 2. Эквивалентные системы. Метод Гаусса решения систем. Теорема Кронекера–Капелли

Определение 6.7. Элементарными преобразованиями системы (6.1) называются следующие преобразования: 1) перестановка двух уравнений местами; 2) умножение обеих частей одного из уравнений на любое число, отличное от нуля; 3) прибавление к обеим частям одного из уравнений соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое число.

Ясно, что элементарные преобразования переводят любую систему (6.1) в другую систему, ей эквивалентную в том смысле, что

любое решение исходной системы является решением преобразованной системы и, наоборот, любое решение преобразованной системы является решением исходной системы.

Замечание 6.2. Отметим, что при элементарных преобразованиях ранги основной и расширенной матриц не изменяются, т.е. $RangA = RangA'$ и $Rang\tilde{A} = Rang\tilde{A}'$, где A' и $\tilde{A}'$ – соответственно основная и расширенная матрицы преобразованной системы. Справедливость этого замечания следует из утверждения 5.4.

Метод Гаусса. Пусть у системы (6.1) $RangA = r \neq 0$, $m > 1$ – первый шаг. Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Этого всегда можно достичь перестановкой уравнений и переобозначением коэффициентов. Умножим первое уравнение на $\frac{1}{a_{11}}$, и полученное уравнение запишем первым в новой системе. Далее, умножив первое уравнение исходной системы на $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, где $i = 2, 3, \dots, m$, и вычтем результат из i-го уравнения. Полученное новое уравнение запишем i-м в новой системе. Итак, на 1-м шаге получим новую систему:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{cases} \tag{6.5}$$

или кратко:

$$A^{(1)}\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}^{(1)}.$$

Если $RangA = r > 1$, $m > 2$, то осуществляем второй шаг. Первое уравнение системы (6.5) не меняя запишем первым в новой системе. Будем считать, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (этого всегда можно добиться перестановкой уравнений и переобозначением коэффициентов). Умножаем второе уравнение на $\frac{1}{a_{22}^{(1)}}$ и результат запишем вторым уравнением в новой системе. Далее умножим второе уравнение системы (6.5) на $\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ и вычтем результат из i-ого уравнения, где

$i = 3,\dots, m$. Полученное в результате этого уравнение запишем в новой системе i-м уравнением, и так далее. На r-ом шаге, где $r = RangA \le m$, окончательно получим систему

$$A^{(r)} \underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}^{(r)},$$

где

$$A^{(r)} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(r)} & .. & a_{1r}^{(r)} & a_{1(r+1)}^{(r)} & \dots & a_{1n}^{(r)} \\ 0 & 1 & .. & a_{2r}^{(r)} & a_{2(r+1)}^{(r)} & \dots & a_{2n}^{(r)} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 & a_{r(r+1)}^{(r)} & \dots & a_{rn}^{(r)} \\ 0 & 0 & .. & 0 & 0 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{b}^{(r)} = \begin{bmatrix} b_1^{(r)} \\ \vdots \\ b_r^{(r)} \\ b_{r+1}^{(r)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m^{(r)} \end{bmatrix},$$

Причем $RangA^{(r)} = RangA = r$ в силу замечания 6.2. Запишем последнюю систему в виде:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(r)} x_2 + \dots + \dots + a_{1n}^{(r)} x_n = b_1^{(r)} \\ x_2 + a_{23}^{(r)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(r)} x_n = b_2^{(r)} \\ .. \;.. \;.. \;\dots \;.. \;.. \;\dots \;.. \;.. \\ x_r + a_{r(r+1)}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{(r)} x_n = b_r^{(r)} \\ 0 \cdot x_{r+1} + \dots + 0 \cdot x_n = b_{r+1}^{(r)} \\ .. \;.. \;.. \;\dots \;.. \;.. \;\dots \;.. \;.. \\ 0 \cdot x_{r+1} + \dots + 0 \cdot x_n = b_m^{(r)} \end{cases} \tag{6.6}$$

Система (6.6) совместна тогда и только тогда, когда $b_{r+1}^{(r)} = \dots = b_m^{(r)} = 0$, т.е. когда ранги ее основной и расширенной матриц совпадают. Если система (6.6) совместна, то последние ее $m-r$ уравнений можно отбросить и тогда с учетом всех, может быть, допущенных переобозначений неизвестных, система (6.1) эквивалентна системе:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(r)} x_2 + \dots + a_{1r}^{(r)} x_r = b_1^{(r)} - \left(a_{1(r+1)}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{1n}^{(r)} x_n\right) \\ x_2 + \dots + a_{2r}^{(r)} x_r = b_2^{(r)} - \left(a_{2(r+1)}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{2n}^{(r)} x_n\right) \\ .. \;.. \;.. \;.. \;\;.. \;.. \;\dots \;.. \;.. \;.. \\ x_r = b_r^{(r)} - \left(a_{r(r+1)}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{(r)} x_n\right) \end{cases} \tag{6.7}$$

Назовем в системе (6.7) все неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$ – главными, а $x_{r+1}, \dots, x_n$ – свободными. Получим общее решение системы (6.7), а следовательно, и (6.1), полагая $x_{r+1} = c_1, x_{r+2} = c_2, \dots, x_n = c_{n-r}$, где $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ – произвольные действительные или комплексные постоянные (параметры) и последовательно находя неизвестные x_r, $x_{r-1}, \dots,$ x_2, x_1, начиная с последнего уравнения в направлении снизу вверх.

В случае $n = r$ также последовательно определяя значения неизвестных $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ снизу вверх, найдем лишь единственное решение системы.

Теорема 6.2 (Кронекера–Капелли). Система (6.1) совместна тогда и только тогда, когда $RangA = Rang\widetilde{A}$.

Доказательство. Из метода Гаусса следует, что система (6.1) эквивалента системе (6.6), а система (6.6) совместна тогда и только тогда, когда $RangA^{(r)} = Rang\widetilde{A}^{(r)}$. Но при элементарных преобразованиях, как уже отмечалось выше, ранги матриц не меняются. Следовательно, система (6.1) совместна тогда и только тогда, когда $RangA = Rang\widetilde{A}$.

§ 3. Однородные системы

Однородная система из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n = 0 \\ .. \;\;.. \;\;.. \;\;.. \;\;.. \;\;.. \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases} \tag{6.8}$$

или
$$\underset{\downarrow}{A x} = \underset{\downarrow}{0} \tag{6.9}$$

где $A = [a_{ij}]$ – матрица порядка $m \times n$.

Однородная система всегда совместна: у нее всегда существует решение $\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}$, называемое тривиальным. Любое решение $\underset{\downarrow}{x} \neq \underset{\downarrow}{0}$ системы (6.8) называется нетривиальным.

<u>Утверждение 6.1</u>. Если $\underset{\downarrow}{x}^{(1)}$ и $\underset{\downarrow}{x}^{(2)}$ – два произвольных решения системы (6.8), то для любых чисел λ и μ их линейная комбинация $\lambda \underset{\downarrow}{x}^{(1)} + \mu \underset{\downarrow}{x}^{(2)}$ также является решением системы (6.8).

Доказательство. Справедливость утверждения следует из цепочки равенств
$$A(\lambda \underset{\downarrow}{x}^{(1)} + \mu \underset{\downarrow}{x}^{(2)}) = \lambda A \underset{\downarrow}{x}^{(1)} + \mu A \underset{\downarrow}{x}^{(2)} = \underset{\downarrow}{0}.$$

<u>Замечание 6.3</u>. Только что отмеченное утверждение, очевидно, справедливо для любого конечного числа решений системы (6.8), т.е. если $\underset{\downarrow}{x}^{(1)}, \underset{\downarrow}{x}^{(2)}, \dots, \underset{\downarrow}{x}^{(k)}$ – решения системы (6.8), то и любая их линейная комбинация $\alpha_1 \underset{\downarrow}{x}^{(1)} + \dots + \alpha_k \underset{\downarrow}{x}^{(k)}$ также является решением этой системы.

<u>Следствие 6.1.</u> Если однородная система имеет хотя бы одно нетривиальное решение, то она имеет их бесконечно много.

Имеет место следующая основная для однородных систем

<u>теорема 6.3</u>. Если $RangA = n$, то система (6.8) имеет только тривиальное решение, если же $RangA = r < n$, то – $n - r$ линейно независимых решений $\underset{\downarrow}{x}^{(1)}, \dots, \underset{\downarrow}{x}^{(n-r)}$, причем общее решение (6.8) имеет вид:
$$\underset{\downarrow}{x} = C_1 \underset{\downarrow}{x}^{(1)} + C_2 \underset{\downarrow}{x}^{(2)} + \dots + C_{n-r} \underset{\downarrow}{x}^{(n-r)},$$
где $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ – произвольные действительные или комплексные числа.

Доказательство. Методом Гаусса система (6.8) может быть сведена к эквивалентной системе (см. гл. 6 п. 2):

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(r)} x_2 + \dots + a_{1r}^{(r)} x_r = -\left(a_{1(r+1)}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{1n}^{(r)} x_n\right) \\ \quad x_2 + \dots + a_{2r}^{(r)} x_r = -\left(a_{2(r+1)}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{2n}^{(r)} x_n\right) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \qquad x_r = -\left(a_{r(r+1)}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{(r)} x_n\right) \end{cases} \tag{6.10}$$

где $r = RangA$. Из системы (6.10) следует, что при $r = n$ она, а следовательно, и эквивалентная ей система (6.8) имеют только тривиальное решение. Если же $RangA = r < n$, то присвоим свободным неизвестным $x_{r+1}, \dots, x_n$ в системе (6.10) следующие специальные значения:
$$x_{r+j} = 1, \ x_{r+1} = \dots = x_{r+j-1} = x_{r+j+1} = \dots = x_n = 0$$
для $j = 1, 2, \dots, n - r$.

Для каждого $j = 1, 2, \dots, n - r$ по указанным свободным неизвестным найдем единственное решение системы (6.10). В результате получим следующую совокупность решений системы:
$$\underset{\downarrow}{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_r^{(1)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \underset{\downarrow}{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ \vdots \\ x_r^{(2)} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \underset{\downarrow}{x}^{(n-r)} = \begin{bmatrix} x_1^{(n-r)} \\ \vdots \\ x_r^{(n-r)} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

Очевидно, ранг матрицы $\left[\underset{\downarrow}{x}^{(1)}, \underset{\downarrow}{x}^{(2)}, \dots, \underset{\downarrow}{x}^{(n-r)}\right]$, составленной из столбцов этих решений, равен $n - r$. Поэтому все столбцы $\underset{\downarrow}{x}^{(1)}$, $\underset{\downarrow}{x}^{(2)}, \dots, \underset{\downarrow}{x}^{(n-r)}$ являются базисными и, следовательно, по теореме о базисном миноре решения $\underset{\downarrow}{x}^{(1)}, \underset{\downarrow}{x}^{(2)}, \dots, \underset{\downarrow}{x}^{(n-r)}$ линейно независимы. Покажем, что общее решение системы (6.8) имеет вид:

$$\underset{\downarrow}{x} = \sum_{i=1}^{n-r} C_i \underset{\downarrow}{x}^{(i)}$$

Действительно, пусть $\underset{\downarrow}{x}$ – произвольное решение системы (6.8).

Тогда

$$\underset{\downarrow}{y} = \underset{\downarrow}{x} - \left[C_1 \underset{\downarrow}{x}^{(1)} + C_2 \underset{\downarrow}{x}^{(2)} + \ldots + C_{n-r} \underset{\downarrow}{x}^{(n-r)}\right] \qquad (6.12)$$

также есть решение системы (6.8) при любых постоянных числах $C_1, \ldots, C_{n-r}$ (см. замечание 6.3). Так как $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ – произвольные числа, то положим

$$C_1 = x_{r+1}, C_2 = x_{r+2}, \ldots, C_{n-r} = x_n.$$

Тогда из (6.12) получим

$$y_{r+1} = y_{r+2} = \ldots = y_n = 0 \qquad (6.13)$$

Итак,

$$\underset{\downarrow}{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

есть решение системы (6.8).

Учитывая (6.13), получаем из (6.10), что $y_1 = y_2 = \ldots = y_r = 0$.

Таким образом, $\underset{\downarrow}{x} = \sum_{i=1}^{n-r} C_i \underset{\downarrow}{x}^{(i)}$.

Определение 6.8. Так построенные решения $\underset{\downarrow}{x}^{(1)}, \underset{\downarrow}{x}^{(2)}, \ldots, \underset{\downarrow}{x}^{(n-r)}$ системы (6.8) при $RangA = r < n$ называются нормальной фундаментальной системой решений однородной системы уравнений.

Из теоремы 6.3. сразу вытекает важное

следствие 6.2. Однородная система (6.8) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $RangA < n$.

В частности,

всякая система линейных однородных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, имеет ненулевое решение;

система, состоящая из n однородных уравнений с n неизвестными, тогда и только тогда имеет ненулевое решение, когда детерминант системы равен нулю.

Замечание 6.4. Нормальную фундаментальную систему решений можно получить и методом Крамера. Действительно, пусть $RangA = r < n$. Не ограничивая общности, можно предположить, что базисный минор основной матрицы A системы (6.8) находится в левом верхнем углу этой матрицы. Тогда система (6.8), очевидно, эквивалентна системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = -\left(a_{1(r+1)}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n\right) \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r = -\left(a_{2(r+1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n\right) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = -\left(a_{r(r+1)}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n\right) \end{cases} \qquad (6.14)$$

причем

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Полагая в этой системе свободные неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ поочередно равными $x_{r+j} = 1$, $x_{r+1} = \ldots = x_{r+j-1} = x_{r+j+1} = \ldots = x_n = 0$ для $j = 1, 2, \ldots, n-r$, получаем нормальную фундаментальную систему решений (6.11).

Определение 6.9. Любая совокупность из $(n-r)$ – линейно независимых решений $\underset{\downarrow}{y}^{(1)}, \underset{\downarrow}{y}^{(2)}, \ldots, \underset{\downarrow}{y}^{(n-r)}$ системы (6.8) (здесь $r = RangA < n$) называется фундаментальной системой решений однородной системы (6.8).

Замечание 6.5. Пусть у однородной системы (6.8) $RangA = r < n$. Чтобы построить некоторую фундаментальную систему решений однородной системы (6.8) можно поступить следующим образом: зафиксировать некоторый определитель порядка $(n-r)$, отличный от нуля, а затем в системе (6.10), эквивалентной (6.8), полагать значения $x_{r+1}, \ldots, x_n$ свободных неизвестных равными соответственно элементам i-ого столбца $(i = 1, 2, \ldots, n-r)$ данного фиксированного определителя. В результате получим решение $\underset{\downarrow}{x}^{(i)}$, $i=1,\ 2,\ldots,\ n-r$. Совокупность всех таких решений $\underset{\downarrow}{x}^{(1)},\underset{\downarrow}{x}^{(2)},\ldots,$ $\underset{\downarrow}{x}^{(n\text{-}r)}$ ввиду их явной линейной независимости и будет фундаментальной системой решений системы (6.8). Если фиксированный определитель есть определитель единичной матрицы, то получим нормальную фундаментальную систему решений системы (6.8).

Теорема 6.4. Если у однородной системы (6.8) $RangA=r<n$, а $\underset{\downarrow}{y}^{(1)},\underset{\downarrow}{y}^{(2)},\ldots,\underset{\downarrow}{y}^{(n-r)}$ – фундаментальная система решений, то общее решение системы (6.8) имеет вид:

$$\underset{\downarrow}{x}=C_1\underset{\downarrow}{y}^{(1)}+C_2\underset{\downarrow}{y}^{(2)}+\ldots+C_{n-r}\underset{\downarrow}{y}^{(n-r)}$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$B=\left[\underset{\downarrow}{x},\underset{\downarrow}{y}^{(1)},\ldots,\underset{\downarrow}{y}^{(n-r)}\right]$$

порядка $n\times(n-r+1)$.

Очевидно,

$$RangB\geq n-r \tag{6.15}$$

так как $\underset{\downarrow}{y}^{(1)},\ldots,\underset{\downarrow}{y}^{(n-r)}$ линейно независимы. С другой стороны столбцы

$$\underset{\downarrow}{x},\underset{\downarrow}{y}^{(1)},\ldots,\underset{\downarrow}{y}^{(n-r)}$$

есть решения системы (6.8), а следовательно, и (6.10). Поэтому в матрице B первые r строк есть линейная комбинация остальных. Следовательно, $RangB\leq n-r$. Вместе с (6.15) это дает $RangB=n-r$. Базисный минор матрицы B находится в столбцах $\underset{\downarrow}{y}^{(1)},\underset{\downarrow}{y}^{(2)},\ldots,\underset{\downarrow}{y}^{(n-r)}$. Из теоремы 5.4 о базисном миноре следует, что столбец $\underset{\downarrow}{x}$ есть линейная комбинация базисных, т.е.

$$\underset{\downarrow}{x}=C_1\underset{\downarrow}{y}^{(1)}+C_2\underset{\downarrow}{y}^{(2)}+\ldots+C_{n-r}\underset{\downarrow}{y}^{(n-r)}$$

§ 4. Неоднородные системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим неоднородную систему (6.1), записанную в матричном виде

$$A\underset{\downarrow}{x}=\underset{\downarrow}{b} \tag{6.16}$$

Теорема 6.5. Общее решение неоднородной совместной системы (6.16) есть сумма какого-нибудь частного решения системы (6.16) и общего решения однородной системы (6.8), т.е.

$$\underset{\downarrow}{x}^{(OH)}=\underset{\downarrow}{x}^{(ЧН)}+\underset{\downarrow}{x}^{(OO)} \tag{6.17}$$

Здесь $\underset{\downarrow}{x}^{(OH)}$ и $\underset{\downarrow}{x}^{(ЧН)}$ – соответственно общее и частное решения неоднородной системы (6.16), а $\underset{\downarrow}{x}^{(OO)}$ – общее решение однородной системы (6.8).

Доказательство. Очевидно, что столбец $\underset{\downarrow}{x}^{(OH)}$, определяемый формулой (6.17), является решением неоднородной системы (6.16). Действительно,

$$A\underset{\downarrow}{x}^{(OH)}=A\left(\underset{\downarrow}{x}^{(ЧН)}+\underset{\downarrow}{x}^{(OO)}\right)=A\underset{\downarrow}{x}^{(ЧН)}+A\underset{\downarrow}{x}^{(OO)}=\underset{\downarrow}{b}+\underset{\downarrow}{0}=\underset{\downarrow}{b}$$

Обратно любое решение неоднородной системы (6.16) представимо в виде (6.17). Действительно, пусть $\underset{\downarrow}{x}$ – произвольное решение системы (6.16), а $\underset{\downarrow}{x}^{(ЧН)}$ – частное решение неоднородной системы (6.16). Тогда $A\left(\underset{\downarrow}{x}-\underset{\downarrow}{x}^{(ЧН)}\right)=A\underset{\downarrow}{x}-A\underset{\downarrow}{x}^{(ЧН)}=\underset{\downarrow}{b}-\underset{\downarrow}{b}=\underset{\downarrow}{0}$. Следовательно, $\underset{\downarrow}{x}-\underset{\downarrow}{x}^{(ЧН)}$ – есть решение однородной системы (6.8), т.е. $\underset{\downarrow}{x}=\underset{\downarrow}{x}^{(ЧН)}+\underset{\downarrow}{x}^{(OO)}$.

Следствие 6.3. Если у неоднородной системы (6.16) $RangA=r<n$, а $\underset{\downarrow}{y}^{(1)},\underset{\downarrow}{y}^{(2)},\ldots,\underset{\downarrow}{y}^{(n-r)}$ – фундаментальная система решений соответствующей однородной системы (6.8), то общее решение $\underset{\downarrow}{x}^{(OH)}$ неоднородной системы имеет вид:

$$\underset{\downarrow}{x}^{(OH)} = \underset{\downarrow}{x}^{(ЧН)} + \sum_{i=1}^{n-r} C_i \underset{\downarrow}{y}^{(i)},$$

где $\underset{\downarrow}{x}^{(ЧН)}$ – какое-нибудь частное решение системы (6.16).

Замечание 6.6. Чтобы построить частное решение системы (6.16) можно свести ее методом Гаусса к системе (6.7) и, положив свободные неизвестные $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$, найти $\underset{\downarrow}{x}^{(ЧН)}$.

Задачи к главе № 6

1) Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$, используя теорему Крамера.

2) Решить систему $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$ методом Гаусса.

3) Найти общее решение и ФСР системы

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

4) Исследовать совместность и найти общее решение неоднородной системы (указав ФСР соответствующей однородной системы и частное решение неоднородной системы)

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

5) Решить в зависимости от параметра λ следующую однородную систему уравнений (указав ФСР).

$$\begin{cases} -4x_1 + (2+2\lambda)x_2 + 2\lambda x_3 + 2\lambda x_4 = 0 \\ \lambda x_1 + (1+\lambda)x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ \lambda x_1 + (1+\lambda)x_2 - 2x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ -\lambda x_1 - (1+\lambda)x_2 - \lambda x_3 - (2+2\lambda)x_4 = 0 \end{cases}$$

ГЛАВА 7 ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Определение и примеры линейных пространств

1. Определение линейного вещественного (комплексного) пространства

Определение 7.1. Пусть V – произвольное непустое множество. Будем говорить, что в множестве V определена операция сложения элементов, если указан закон, по которому любой паре элементов $x, y \in V$, взятых в определенном порядке, однозначным образом ставится в соответствие некоторый третий элемент этого множества, называемый суммой элементов x, y и обозначаемый $x+y$.

Аналогично будем говорить, что в множестве V определена операция умножения на вещественные (комплексные) числа, если указан закон, по которому каждому элементу $x \in V$ и каждому $\lambda \in R$ $(\lambda \in C)$ ставится в соответствие однозначным образом некоторый третий элемент этого множества, называемый произведением λ на x и обозначаемый λx.

Определение 7.2. Непустое множество V элементов произвольной природы называется вещественным (комплексным) линейным пространством, если для элементов этого множества определены операции сложения и умножения на вещественные (комплексные) числа и обладающие для любых $x, y, z \in V$ и любых $\lambda, \mu \in R$ $(\lambda, \mu \in C)$ следующими свойствами (аксиомами):

Свойство 7.1. $x + y = y + x$ (коммутативность).

Свойство 7.2. $(x+y)+z = x+(y+z)$ (ассоциативность).

Свойство 7.3. Существует нулевой элемент θ, такой что $x + \theta = x$.

Свойство 7.4. Для любого элемента $x \in V$ существует противоположный элемент $x' \in V$, такой, что $x + x' = \theta$

Свойство 7.5. Для любого $x \in V$ $1 \cdot x = x$ (унитарность)

Свойство 7.6. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

Свойство 7.7. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$.

Свойство 7.8. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$.

Замечание 7.1. Элементы линейного пространства принято называть также векторами, а само линейное пространство называют иногда абстрактным векторным пространством.

Утверждение 7.1. В произвольном линейном пространстве V: 1) существует единственный нулевой элемент; 2) для любого элемента $x \in V$ существует единственный противоположный элемент; 3) нулевой элемент θ равен произведению произвольного элемента $x \in V$ на вещественное число 0, т.е. $\theta = 0 \cdot x$; 4) для любого элемента $x \in V$ противоположный элемент равен произведению этого элемента на вещественное число (-1).

Доказательство. 1) Предположим, что существуют два нулевых элемента θ_1 и θ_2 (существование хотя бы одного нулевого элемента утверждается в свойстве 7.3: определения линейного пространства). Единственность нулевого элемента следует тогда из цепочки равенств:

$$\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$$

2) предположим, что для некоторого элемента $x \in V$ существуют два противоположных элемента x' и x'' (существование хотя бы одного противоположного элемента утверждается в свойстве 7.4.) Тогда $x + x' = \theta$ и $x + x'' = \theta$. Единственность противоположного элемента следует из цепочки равенств:

$$x' = x' + \theta = x' + (x + x'') = (x' + x) + x'' = \theta + x'' = x''$$

3) пусть x – произвольный элемент, а x' – противоположный ему элемент, т.е. $x + x' = \theta$. Утверждение о представлении нулевого элемента следует тогда из цепочки равенств:

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + \theta = 0 \cdot x + (x + x') = (0 \cdot x + x) + x' =$$
$$= (0 \cdot x + 1 \cdot x) + x' = (0 + 1)x + x' = 1 \cdot x + x' = x + x' = \theta;$$

4) если $x \in V$ – произвольный элемент, то утверждение о представлении противоположного элемента следует из цепочки равенств:

$$x + (-1)x = 1 \cdot x + (-1)x = [1 + (-1)]x = 0 \cdot x = \theta. \#$$

Замечание 7.2. Разностью двух элементов $x, y \in V$ называется элемент z, удовлетворяющий условию $z + y = x$.

Из 4) (см. утверждение 7.1) следует, что $z = x + (-1)y$. Разность элементов x и y обозначается символом $x - y$.

Упражнение 7.1. Показать, что для любого $\lambda : \lambda \cdot \theta = \theta$;
из равенства $\lambda x = \theta$, $\lambda \neq 0$ следует, что $x = \theta$;
из равенства $\lambda x = \theta$, $x \neq 0$ следует, что $\lambda = 0$.

2. Примеры линейных пространств

Пример 7.1. Линейные пространства свободных векторов V_3, V_2 и V_1 (см. глава 1), очевидно, являются линейными пространствами.

Пример 7.2. Рассмотрим множество A^n, элементами которого являются упорядоченные совокупности n произвольных комплексных (вещественных) чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Элементы этого множества обозначим одним символом x, т.е. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В множестве A^n операции сложения элементов и умножения элементов на комплексные (вещественные) числа определим правилами:

$$x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Очевидно, что нулевым элементом рассматриваемого множества является элемент $\theta = (0, \ldots, 0)$, а противоположным для элемента $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является элемент $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$. Нетрудно проверить справедливость всех остальных аксиом линейного пространства.

Пример 7.3. Множество M_{mn} всех матриц порядка $m \times n$ с введенными ранее операциями сложения матриц и умножения матрицы на число (см. гл. 5 п. 1) является линейным пространством. (Справедливость свойств 7.1 – 7.8 доказана в гл. 5 п. 1).

Пример 7.4. Рассмотрим множество $C[a, b]$ всех непрерывных на отрезке $a \le t \le b$ функций. Операции сложения и умножения на число определим обычными правилами математического анализа. Без труда проверяется справедливость свойств 7.1 – 7.8. Следовательно, $C[a, b]$ – линейное пространство.

Замечание 7.3. Очевидно, также, что множество $C^n[a, b]$ всех функций, имеющих непрерывную на отрезке $a \le t \le b$ производную n-го порядка и с такими же операциями сложения и умножения на число, как в $C[a, b]$, образует линейное пространство.

Пример 7.5. Совокупность всех многочленов $P_n(t)$ степени, не превышающей натурального числа n, с обычными операциями сложения многочленов и умножения на число образует линейное пространство.

Пример 7.6. Совокупность всех решений однородной системы образует линейное пространство (см. гл. 6 п. 3).

Пример 7.7. Произведение линейных пространств. Пусть X и Y – два комплексных (вещественных) линейных пространства. Рассмотрим множество $X \times Y$, элементами которого являются упорядоченные наборы (x, y), где $x \in X$, а $y \in Y$. В этом множестве $X \times Y$ введем операции сложения элементов и умножения на число по правилам:

$$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2);$$
$$\lambda(x, y)=(\lambda x, \lambda y).$$

Множество $X \times Y$ с так введенными операциями, очевидно, является линейным пространством, которое называется прямым произведением (или просто произведением) линейных пространств X и Y.

Укажем некоторые примеры множеств, по той или иной причине не являющиеся линейными пространствами.

Все векторы линейного пространства свободных векторов V_3, координаты которых – целые числа, не образуют линейного пространства, так как в этом множестве не определена операция умножения на дробные числа.

Пример 7.8. Множество всех многочленов степени большей некоторого натурального числа n не является линейным пространством, так как элементы этого множества нельзя умножать на число 0.

Пример 7.9. Рассмотрим множество A^n, элементами которого являются упорядоченные совокупности n чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Операции сложения и умножения на число определим правилами:

$$x+y=(x_1, x_2, \dots, x_n)+(y_1, y_2, \dots, y_n)=(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$$
$$\lambda x=\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)=(\lambda x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Тогда с одной стороны имеем $2x=(2x_1, x_2, \dots, x_n)$, а с другой $x+x=(2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n)$ и, следовательно, свойство 7.7 не выполняется. Таким образом, множество с так введенными операциями сложения и умножения на число не является линейным пространством.

§ 2. Линейная зависимость. Базис и размерность линейного пространства

1. Линейная зависимость и размерность

Определение 7.3. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ - любые числа, тогда элементы $x_1, x_2, \dots, x_k$ линейного пространства V называются линейно независимыми, если из равенства

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\dots+\lambda_k x_k=\theta \qquad (7.1)$$

следует, что $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_k=0$.

Элементы $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ называются линейно зависимыми, если найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ не все равные нулю $\left(|\lambda_1|+|\lambda_2|+\dots+|\lambda_k| \neq 0\right)$, такие, что справедливо равенство (7.1).

Определение 7.4. Элемент x пространства V есть линейная комбинация элементов $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$, если существуют числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, такие, что

$$x=\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\dots+\beta_k x_k.$$

Справедлив следующий критерий линейной зависимости элементов линейного пространства.

Теорема 7.1. Элементы $x_1, x_2, \dots, x_k$ линейного пространства V линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из элементов является линейной комбинацией остальных.

Доказательство. Необходимость. Пусть элементы $x_1, x_2, \dots, x_k$ линейно зависимы. Следовательно, в равенстве (7.1) не все коэффициенты λ_i равны нулю. Предположим для определенности, что $\lambda_1 \neq 0$. Тогда из равенства (7.1) получим, что

$$x_1=\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)x_2+\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)x_3+\dots+\left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)x_k.$$

Из этого равенства следует необходимость утверждения, сформулированного в теореме.

Достаточность. Пусть один из элементов (для определенности x_1) – линейная комбинация остальных, т.е. имеет место равенство

$$x_1 = \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \ldots + \beta_k x_k$$

или
$$(-1)x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \ldots + \beta_k x_k = \theta$$

Так как среди чисел (-1), $\beta_2, \ldots, \beta_k$ по крайней мере одно отлично от нуля, то согласно определению элементы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ линейно зависимы. #

Отметим еще некоторые достаточные условия линейной зависимости и линейной независимости элементов.

1. Если среди элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеется нулевой, то элементы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ линейно зависимы.

2. Если в системе элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ некоторая подсистема элементов линейно зависима, то и вся система $x_1, x_2, \ldots, x_k$ линейно зависима.

3. Если вся система элементов линейно независима, то и любая подсистема элементов линейно независима.

Доказательство. 1. Без ограничения общности можно считать, что $x_1 = \theta$. Тогда равенство (7.1) справедливо при

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

2. Пусть для определенности элементы $x_1, x_2, \ldots, x_l$ $(l < k)$ линейно зависимы, т.е. справедливы равенства:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_l x_l = \theta \quad \left(|\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_l| \neq 0\right)$$

Тогда с теми же числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ и $\lambda_{l+1} = \ldots = \lambda_k = 0$, очевидно, справедливо равенство (7.1).

3. Предполагая линейную зависимость подсистемы элементов, согласно предыдущему свойству получаем, что и вся система элементов линейно зависима, что противоречит условию 3. #

Утверждение 7.2. Если система элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейного пространства V линейно зависима, а система $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ линейно независима, то элемент x_n равен линейной комбинации элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Доказательство. Так как элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно зависимы, то существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n = \theta$. Очевидно, $\lambda_n \neq 0$, так как в противном случае элементы $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ были бы линейно зависимы. Следовательно,

$$x_n = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_{n-1} x_{n-1}, \text{ где } \beta_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_n},\quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \ \#$$

Пример 7.10. 1) В пространстве A^n элементы

$$e_1 = (1,\ 0,\ 0, \ldots,\ 0),$$
$$e_2 = (0,\ 1,\ 0, \ldots,\ 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_n = (0,\ 0,\ 0, \ldots,\ 1).$$

линейно независимы. Действительно, линейная комбинация элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ с числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ представляет собой элемент $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, который является нулевым только при условии $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. А это и означает линейную независимость элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Пример 7.11. В пространстве $\{P_n(t)\}$ многочленов степени, не превышающей натурального числа n, элементы $1, t, t^2, \ldots, t^n$ линейно независимы. Действительно, то, что линейная комбинация этих элементов с коэффициентами $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ равна нулевому элементу, означает, что многочлен

$$\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \ldots + \lambda_n t^n$$

тождественно равен нулю, т.е. $\lambda_0 + \lambda_1 t + \ldots + \lambda_n t^n \equiv 0$. Для любого $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, дифференцируя последнее равенство по t k раз и подставляя $t = 0$, получаем $k!\ \lambda_k = 0$, т.е. $\lambda_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Но это и означает, что $1,\ t,\ t^2, \ldots,\ t^n$ линейно независимы.

Пример 7.12. В пространстве M_{mn} всех матриц порядка $m \times n$ матрицы E_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (E_{ij} матрица, у которой элемент, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца равен 1, а все остальные элементы равны нулю) линейно независимы.

Действительно, линейная комбинация элементов E_{ij} с числами λ_{ij} ($i=1, 2,..., m$, $j=1, 2,..., n$) представляет собой матрицу:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix}$$

которая является нулевой только при условии $\lambda_{ij}=0$, $i=1, 2,..., m$, $j=1, 2,..., n$.

Определение 7.5. Линейное пространство V называется n-мерным, если в нем существует n линейно независимых элементов, а любые $n+1$ элементов линейно зависимы. При этом n называется размерностью пространства V. Тот факт, что пространство V имеет размерность n, символически записывает следующим образом: $\dim V = n$.

Линейное пространство V называется бесконечномерным, если для любого целого числа $N>0$ в нем найдется линейно независимая система, состоящая из N элементов.

Замечание 7.4. Пространство $C[0, 1]$ является бесконечномерным, так как для любого целого $n>0$ n элементов $1, t, t^2,..., t^n$, принадлежащих $C[0, 1]$, линейно независимы.

В дальнейшем будут рассматриваться в основном только линейные пространства конечной размерности*.

2. Базис и координаты в n-мерном пространстве

Определение 7.6. Упорядоченная совокупность элементов $e_1, e_2,..., e_n$ линейного пространства V называется базисом в пространстве V, если она линейно независима и для любого элемента $x \in \mathrm{V}$ найдутся числа $\xi_1, \xi_2,..., \xi_n$, такие, что справедливо равенство:

* Размерность конечномерного пространства будет указываться индексом внизу (V_n – n-мерное пространство). Если индекс не указан, то пространство не обязательно конечномерное.

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n. \qquad (7.2)$$

При этом представление (7.2) называется разложением элемента x по базису $e_1, e_2,..., e_n$, а числа $\xi_1, \xi_2,..., \xi_n$ называются компонентами или координатами элемента x в данном базисе $e_1, e_2,..., e_n$.

Лемма 7.1. Для любого элемента x линейного пространства V разложение по базису единственно, т.е. координаты элемента x в данном базисе определяются единственным способом.

Доказательство. Допустим, что в пространстве V для элемента x существуют два разложения: $x=\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+...+\xi_n e_n$ и $x=\xi_1' e_1+\xi_2' e_2+...+\xi_n' e_n$ по базису $e_1, e_2,..., e_n$. Вычитая из первого второе разложение, получаем:

$$(\xi_1-\xi_1')e_1+(\xi_2-\xi_2')e_2+...+(\xi_n-\xi_n')e_n=\theta.$$

Так как $e_1, e_2,..., e_n$ линейно независимы, то из последнего равенства следует $\xi_1-\xi_1'=\xi_2-\xi_2'=...=\xi_n-\xi_n'=0$, т.е. $\xi_1=\xi_1'$, $\xi_2=\xi_2'$,..., $\xi_n=\xi_n'$. #

Можно ввести второе определение базиса.

Определение 7.7. Упорядоченная совокупность элементов e_1, $e_2,..., e_n$ линейного пространства V называется базисом в пространстве V, если для любого элемента $x \in \mathrm{V}$ найдутся числа ξ_1, $\xi_2,..., \xi_n$, такие, что справедливо равенство (7.2) и это разложение единственно для любого x.

Справедливо следующее

Утверждение 7.3. Определение 7.6 базиса и определение 7.7 эквивалентны.

Доказательство. Согласно предыдущей лемме из определения 7.6 немедленно следует определение 7.7.

Пусть $e_1, e_2,..., e_n$, есть базис пространства по второму определению. Для того чтобы показать, что элементы $e_1, e_2,..., e_n$ являются базисом пространства V и по первому определению, достаточно показать линейную независимость элементов $e_1, e_2,..., e_n$. Для этого рассмотрим равенство:

$$\theta=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+...+\lambda_n e_n, \qquad (7.3)$$

которое можно считать разложением нулевого элемента θ по базису. Очевидно, что равенство справедливо при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. В силу единственности разложения любого элемента по базису (определение 7.7) равенство (7.3) имеет место только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Следовательно, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимы. #

Теорема 7.2. Пусть в конечномерном пространстве V задан некоторый базис. Тогда при сложении любых элементов пространства V координаты их (относительно этого базиса) складываются; при умножении любого элемента из V на произвольное число λ все координаты этого элемента умножаются на λ.

Доказательство. Утверждение теоремы немедленно следует из аксиом линейного пространства и второго определения базиса. #

3. Связь между понятиями базиса и размерности линейного пространства

Теорема 7.3. а) Если V – конечномерное пространство размерности n, то всякие n линейно независимых элементов пространства образуют базис этого пространства;

б) если в линейном пространстве V имеется базис, состоящий из n элементов, то размерность пространства V равна n.

Доказательство. а) Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – произвольная линейно независимая система элементов пространства V (существование хотя бы одной такой системы следует из определения размерности линейного пространства). Если x – произвольный элемент пространства V, то согласно определению размерности линейного пространства элементы $e_1, e_2, \ldots, e_n, x$ линейно зависимы, т.е. существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n + \lambda_{n+1} x = \theta$. Из утверждения 7.2 следует, что $\lambda_{n+1} \neq 0$ и, следовательно, $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$, где $\xi_k = -\dfrac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Так как x – произвольный элемент пространства V, то последнее равенство доказывает первую часть теоремы;

б) пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис пространства V. Для завершения доказательства данной теоремы достаточно показать, что любые $n+1$ элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ линейного пространства V линейно зависимы. Чтобы показать это, разложим каждый элемент из системы $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_{11} e_1 + \xi_{12} e_2 + \ldots + \xi_{1n} e_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{1k} e_k, \\ x_2 &= \xi_{21} e_1 + \xi_{22} e_2 + \ldots + \xi_{2n} e_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{2k} e_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+1} &= \xi_{(n+1)1} e_1 + \xi_{(n+1)2} e_2 + \ldots + \xi_{(n+1)n} e_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{(n+1)k} e_k, \end{aligned} \tag{7.4}$$

где ξ_{ki}, $i = 1, 2, \ldots, n$ – координаты вектора x_k $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Рассмотрим матрицу:

$$A = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \ldots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \ldots & \xi_{21} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{(n+1)1} & \xi_{(n+1)2} & \ldots & \xi_{(n+1)n} \end{bmatrix}$$

Очевидно, $Rang\,A \le n$. Следовательно, по теореме 5.4 о базисном миноре строки данной матрицы линейно зависимы, т.е. существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$, $\sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i| \neq 0$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \overrightarrow{a_i} = \vec{0}, \tag{7.5}$$

где $\overline{a_i} = \{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Умножая каждое x_i из (7.4) на λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ и суммируя по i, получаем

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_{ik} e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \xi_{ik} \right) e_k.$$

Учитывая равенство (7.5), получаем

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \theta ,$$

причем
$$\sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i| \neq 0 .$$

Следовательно, $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ линейно зависимы. #

Следствие 7.1. Если в линейном пространстве существует базис из n элементов, то любой другой базис в этом пространстве состоит из того же числа элементов и n равно размерности линейного пространства.

Пример 7.13. В пространстве A^n элементы $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ...,$ $e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$ линейно независимы (см. пример 7.10). Кроме того, для любого $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, очевидно, $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$. Следовательно, элементы $e_1, e_2, ..., e_n$ являются базисом по определению 7.6 пространства A^n, $\dim A_n = n$.

Пример 7.14. В пространстве $\{P_n(t)\}$ – многочленов степени, не превышающей натурального числа n элементы $e_1 = 1$, $e_2 = t, ..., e_{n+1} = t^n$ линейно независимы (см. пример 7.11). Кроме того, для любого многочлена $P_n(t) = a_0 e_1 + a_1 e_2 + ... + a_n e_{n+1}$. Следовательно, многочлены $e_1 = 1$, $e_2 = t, ..., e_{n+1} = t^n$ образуют в пространстве $\{P_n(t)\}$ базис и $\dim\{P_n(t)\} = n + 1$.

Пример 7.15. В пространстве M_{mn} всех матриц порядка $m \times n$ матрицы E_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ образуют базис, так как они линейно независимы (см. пример 7.12) и для любой матрицы $A = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ имеет место разложение $A = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$. Следовательно, $\dim M_{mn} = mn$.

Пример 7.16. В пространстве H_0 – решений однородной системы линейных алгебраических уравнений $A \underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}$, где A – матрица порядка $m \times n$, $Rang A = r$, фундаментальная система решений

$\underset{\downarrow}{y_1}, \underset{\downarrow}{y_2}, ..., \underset{\downarrow}{y_{n-r}}$ является базисом, так как они линейно независимы и любое решение однородной системы линейно выражается через них, следовательно, $\dim H_0 = n - r$.

§ 3. Изоморфизм линейных пространств

Определение 7.8. Два комплексных (вещественных) линейных пространства V и V' называются изоморфными, если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором сумме векторов пространства V будет отвечать сумма соответствующих векторов пространства V', а произведению какого – либо числа $\lambda \in C$ ($\lambda \in R$) на вектор пространства V будет отвечать произведение того же числа на соответствующий вектор пространства V'.

Взаимно – однозначное соответствие, обладающее указанными свойствами, называется изоморфным или изоморфизмом.

Изоморфные отображения обладают следующими свойствами:

Свойство 7.9. При изоморфном соответствии нулевой вектор переходит в нулевой.

Свойство 7.10. При изоморфизме линейно независимые векторы переходят в линейно независимые.

Доказательство. Свойство 7.9. Пусть при изоморфном отображении пространства V на пространство V' элемент $x \in V$ переходит в $x' \in V'$. Тогда согласно определению изоморфизма произведение $0 \cdot x$ должно переходить в произведение $0 \cdot x'$, т.е. нулевой вектор первого пространства должен переходить в нулевой вектор второго.

Свойство 7.10. Пусть линейно независимые векторы x_1, $x_2, ..., x_k$ пространства V переходят в векторы x_1', $x_2', ..., x_k'$ пространства V'.

Допустим, что между последними векторами существует соотношение $\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + ... + \lambda_k x_k' = \theta'$. Согласно определению изоморфизма левой части этого равенства соответствует в пространстве V вектор $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$, нулевому вектору $\theta' \in V'$ – согласно свойству 7.9 в пространстве V – нулевой вектор θ. Следовательно,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k = \theta.$$

Так как векторы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ линейно независимы, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, т.е. векторы $x_1', x_2', \ldots, x_k'$ линейно независимы.

Имеет место следующий критерий изоморфности линейных пространств конечной размерности.

Теорема 7.4. Для того чтобы два линейных пространства V и V' конечной размерности были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковую размерность.

Доказательство. Необходимость. Пусть пространства V и V' изоморфны. Предположим, что размерность пространства V равна n. Выберем в пространстве V базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Соответствующие им в пространстве V' элементы $e_1', e_2', \ldots, e_n'$, в силу свойства 7.10, изоморфных отображений линейны независимы. Выберем в пространстве V' произвольный элемент x' и рассмотрим отвечающий ему в пространстве V вектор x. Так как $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис, то вектор x можно представить в виде:

$$x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n.$$

По определению изоморфного отображения сумма $\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$ перейдет в сумму $\beta_1 e_1' + \beta_2 e_2' + \ldots + \beta_n e_n'$. Следовательно, вектор x' должен совпадать с суммой $\beta_1 e_1' + \beta_2 e_2' + \ldots + \beta_n e_n'$, т.е.

$$x' = \beta_1 e_1' + \beta_2 e_2' + \ldots + \beta_n e_n'. \tag{7.6}$$

Так как векторы $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ линейно независимы и для любого x' справедливо представление (7.6), то они образуют базис. Из теоремы 7.3 следует $\dim V' = n$. Таким образом

$$\dim V' = \dim V.$$

Достаточность. Выберем в пространствах V и V' базисы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ соответственно. Поставим в соответствие друг другу такие векторы $x \in V$ и $x' \in V'$, которые имеют относительно выбранных базисов одинаковые координаты, т.е.

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n \leftrightarrow x' = \xi_1 e_1' + \xi_2 e_2' + \ldots + \xi_n e_n'.$$

Из единственности разложения по базису следует, что установленное соответствие взаимно – однозначное. Из теоремы 7.2 получим, что $x + y \in V \leftrightarrow x' + y' \in V'$; $\lambda x \in V \leftrightarrow \lambda x' \in V'$. Следовательно, пространства V и V' изоморфны. #

§ 4. Линейные подпространства

Определение 7.9. Множество L элементов линейного пространства V называется линейным подпространством пространства V, если выполняется следующее условие: для любых чисел $\lambda, \mu \in R(C)$ и любых элементов x и y из L элемент $\lambda x + \mu y$ также принадлежит L.

Следствие 7.2. Множество $L \subset V$, удовлетворяющее предыдущему определению, само является линейным пространством.

Доказательство. Из определения непосредственно следует, что если вектор $x \in L$, то L содержит и вектор $0x = \theta$ и $(-1)x = -x$. Следовательно, множество L содержит нулевой элемент пространства V и вместе со всяким своим элементом x содержит противоположный ему вектор $(-x)$. Далее, что касается остальных аксиом линейного пространства, то они выполняются во всем пространстве V, а поэтому будут выполняться и во множестве L. #

Утверждение 7.4. 1. Если $L \subseteq V$ – подпространство пространства V, то $\dim L \leq \dim V$.

2. Если подпространство L не совпадает со всем пространством $\dim V = n$, то $\dim L < \dim V$.

Доказательство. 1. Следует из того, что любая линейно независимая система элементов из L является линейно независимой системой элементов всего пространства V.

2. Предположим противное, т.е. $\dim L = \dim V$. Тогда, если элементы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ являются базисом подпространства L, то эти же элементы образуют базис и всего пространства V, и, следовательно, по определению базиса любой элемент $x \in V$ есть линейная ком-

бинация базисных элементов из L. Отсюда следует, что $V \subseteq L$. Так как L подпространство V, то $L \subseteq V$. Из последних двух соотношений имеем $V = L$, что противоречит условию. Полученное противоречие доказывает утверждение. #

Следствие 7.3. Если подпространство L конечномерного линейного пространства V имеет ту же размерность, что и V, то оно совпадает со всем V.

1. Примеры подпространств

Пример 7.17. В V_3 – линейном пространстве свободных векторов множество всех векторов, параллельных некоторой фиксированной плоскости, образуют линейное подпространство.

Пример 7.18. В V_3 множество всех векторов, параллельных некоторой фиксированной прямой, образуют линейное подпространство.

Пример 7.19. В произвольном линейном пространстве V подмножество, состоящее из одного нулевого элемента θ, образует линейное подпространство, которое принято называть нулевым. Очевидно, что само пространство V также можно рассматривать как подпространство. Оба эти подпространства называются несобственными или тривиальными.

Пример 7.20. В пространстве $C\,[a,b]$ всех непрерывных функций, заданных на отрезке $a \le t \le b$, совокупность многочленов $P_n(t)$ степени, не превышающей натурального числа n, является подпространством.

Пример 7.21. В пространстве A^n – упорядоченных совокупностей n чисел множество решений однородной системы $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}$ образуют линейное подпространство (см. гл. 6 п. 3).

2. Линейные оболочки

Определение 7.10. Пусть $x_1, x_2, ..., x_m$ – совокупность элементов линейного пространства V. Множество всевозможных линейных комбинаций вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m$ $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ – произвольные числа) называется линейной оболочкой данной системы элементов и обозначается символом $L(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Утверждение 7.5. Линейная оболочка любой системы векторов $x_1, x_2, ..., x_m \in V$ является линейный подпространством пространства V.

Доказательство. Пусть x и y – произвольные элементы из линейной оболочки $L(x_1, x_2, ..., x_m)$, т.е. их можно представить в виде $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m$; $y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_m x_m$. Тогда $x + y = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + ... + (\alpha_m + \beta_m)x_m \in L(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Кроме того, для любого числа $\lambda \in R(C)$

$$\lambda x = (\lambda\alpha_1)x_1 + (\lambda\alpha_2)x_2 + ... + (\lambda\alpha_m)x_m \in L(x_1, x_2, ..., x_m).\ \#$$

Теорема 7.5. Размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, ..., x_m)$ равна максимальному числу линейно независимых элементов в системе $x_1, x_2, ..., x_m$.

Доказательство. Пусть максимальное число линейно независимых элементов в системе $x_1, x_2, ..., x_m$ равно $k(k \le m)$. Без ограничения общности можно считать, что элементы $x_1, x_2, ..., x_k$ линейно независимы. Тогда любой из элементов $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_m$ представляет собой некоторую линейную комбинацию элементов $x_1, x_2, ..., x_k$ ($x_1, x_2, ..., x_k$ – максимальная линейно независимая система). Так как любой элемент h линейной оболочки $L(x_1, x_2, ..., x_m)$ по определению представляет собой некоторую линейную комбинацию элементов $x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_m$, то в силу только что отмеченного свойства элементов $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_m$ указанный элемент h является линейной комбинацией одних только элементов $x_1, x_2, ..., x_k$. Но это означает, что система линейно независимых элементов $x_1, x_2, ..., x_k$ образует базис подпространства $L(x_1, x_2, ..., x_m)$ и справедливость теоремы следует из теоремы 7.3 о связи между понятиями базиса и размерности линейного пространства. #

Теорема 7.6 (о неполном базисе). Пусть система $e_1, e_2, ..., e_k\ (k \le n)$ n-мерного линейного пространства V линейно независима. Тогда существуют элементы $e_{k+1}, ..., e_n$ пространства V, такие, что система элементов $e_1, e_2, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n$ образуют базис пространства V.

Доказательство. При $k=n$ утверждение теоремы очевидно. Пусть $k<n$, тогда $\dim L(x_1,x_2,...,x_k)<\dim V$ и, следовательно, $L(x_1, x_2,..., x_k)\neq V$. Тогда существует элемент e_{k+1} пространства V, не принадлежащий линейной оболочке $L(x_1, x_2,..., x_k)$. Из утверждения 7.2 следует, что элементы $e_1, e_2,...,e_k, e_{k+1}$ линейно независимы. Если $k+1=n$, то теорема доказана. Если же $k+1\neq n$, то, повторяя рассуждение, получаем e_{k+2} для которого e_1, $e_2,..., e_{k+2}$ линейно независимы. Продолжая процесс через $n-k$ шагов, построим все элементы $e_{k+1},..., e_n$, такие, что $e_1, e_2,..., e_k$, $e_{k+1},..., e_n$ образуют базис всего пространства V. #

§ 5. Прямая сумма подпространств

Определение 7.11. Пусть в линейном пространстве V заданы два подпространства U_1 и U_2. Пересечением подпространств U_1 и U_2 пространства V (операция пересечения обозначается знаком $\cap$) называется совокупность $U_0=U_1\cap U_2$ элементов, входящих одновременно в U_1 и U_2. Суммой подпространств U_1 и U_2 (операция суммы обозначается знаком $+$) называется совокупность $\hat{U}=U_1+U_2$ элементов, представимых в виде:

$$x=x_1+x_2$$

где x_i – какой-нибудь элемент из $U_i\,(i=1, 2)$. Из определения 7.11 следует, что $U_0\subseteq U_1$, $U_0\subseteq U_2$ и $U_1\subseteq \hat{U}, U_2\subseteq \hat{U}$.

Очевидно следующее

утверждение 7.6. Пересечение U_0 и сумма $\hat{U}$ подпространств U_1 и U_2 пространства V сами являются подпространствами пространства V. #

Теорема 7.7. Если U_1 и U_2 – подпространства пространства V, то $\dim(U_1+U_2)=\dim U_1+\dim U_2-\dim(U_1\cap U_2)$, иначе, размерность суммы двух линейных подпространств пространства V равна сумме размерностей этих подпространств минус размерность их пересечения.

Доказательство. В подпространстве $U_0=U_1\cap U_2$ выберем какой нибудь базис $e_1, e_2,..., e_k$ (считаем, что $\dim U_0=k$). Так как $U_0\subseteq U_i$, $i=1, 2$, то по теореме 7.6 о неполном базисе система элементов $e_1, e_2,..., e_k$ может быть дополнена до базиса U_1:

$$e_1, e_2,..., e_k,\ f_1,..., f_p \tag{7.7}$$

с одной стороны, и до базиса U_2:

$$e_1, e_2,..., e_k,\ g_1,..., g_s \tag{7.8}$$

с другой. Покажем, что элементы

$$e_1, e_2,..., e_k,\ f_1,..., f_p,\ g_1,..., g_s \tag{7.9}$$

линейно независимы. Тогда согласно определению они образуют базис подпространства $\hat{U}$, так как если элемент $x\in\hat{U}$, то $x=x_1+x_2$, где $x_1\in U_1$, $x_2\in U_2$ и значит x_1 линейно выражается через элементы (7.7),а x_2 – через элементы (7.8). Но тогда элемент x линейно выражается через элементы (7.9).

Предположим, что некоторая линейная комбинация элементов (7.9) представляет собой нулевой элемент, т.е. справедливо равенство:

$$\alpha_1e_1+...+\alpha_ke_k+\lambda_1f_1+...+\lambda_pf_p+\mu_1g_1+...+\mu_sg_s=\theta \tag{7.10}$$

Тогда элемент $c=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+...+\alpha_ke_k+\lambda_1f_1+...+\lambda_pf_p$ равный $-(\mu_1g_1+...+\mu_sg_s)$ принадлежит одновременно подпространствам U_1 и U_2, а следовательно, и их пересечению U_0. Но в таком случае он должен линейно выражаться через базисные элементы $e_1, e_2,..., e_k$ подпространства U_0. Пусть $c=\beta_1e_1+...+\beta_ke_k$.

Отсюда в силу единственности разложения элемента c по базису пространства U_1, имеем

$$\alpha_i=\beta_i;\ i=1,2,...,k;\ \lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_p=0.$$

Из равенства (7.10) тогда следует, что

$$\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+...+\alpha_ke_k+\mu_1g_1+...+\mu_sg_s=\theta.$$

В силу линейно независимости элементов $e_1,..., e_k,\ g_1,..., g_s$

$$\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_k=\mu_1=...=\mu_s=0.$$

подпространство L' есть совокупность векторов из A^n, определяемых формулой:

$$\underset{\downarrow}{y'} = (\underset{\downarrow}{x_0} - \underset{\downarrow}{x'_0}) + \underset{\downarrow}{y}.$$

Так как нулевой вектор принадлежит L', то из последней формулы следует, что $\underset{\downarrow}{x_0} - \underset{\downarrow}{x'_0} \in L$. Но это означает, что L' состоит из тех же векторов, что и подпространство L. Что же касается вектора сдвига $\underset{\downarrow}{x_0}$, то он не единственный, если $\underset{\downarrow}{y_0} \in L$ – фиксированный вектор, то $\underset{\downarrow}{x_0} + \underset{\downarrow}{y_0}$ также есть вектор сдвига.

Если $e_1, e_2, \ldots, e_r$, $r \le n$ – базис подпространства L, то гиперплоскость H определяется параметрическим уравнением:

$$\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{x_0} + \lambda_1 \underset{\downarrow}{e_1} + \lambda_2 \underset{\downarrow}{e_2} + \ldots + \lambda_r \underset{\downarrow}{e_r}, \qquad (7.11)$$

где λ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ – произвольные постоянные, принимающие действительные (комплексные) значения, если A^n – действительное (комплексное) пространство. Если $\dim L = 0$, т.е. если L состоит только из нулевого вектора, то и $\dim H = 0$, гиперплоскость H в этом случае состоит лишь из одного вектора сдвига $\underset{\downarrow}{x_0}$.

Две гиперплоскости $H_1 = \underset{\downarrow}{x_1} + L_1$ и $H_2 = \underset{\downarrow}{x_2} + L_2$ называются коллинеарными, если $L_1 \subseteq L_2$ или $L_2 \subseteq L_1$. Как и в случае подпространств, множество векторов, принадлежащих одновременно гиперплоскостям $H_1 = \underset{\downarrow}{x_1} + L_1$ и $H_2 = \underset{\downarrow}{x_2} + L_2$, назовем пересечением гиперплоскостей и обозначим его символом $H_1 \cap H_2$.

<u>Теорема 7.11</u>. Непустое пересечение двух гиперплоскостей $H_1 = \underset{\downarrow}{x_1} + L_1$ и $H_2 = \underset{\downarrow}{x_2} + L_2$ является гиперплоскостью с направляющим подпространством $L_1 \cap L_2$.

Доказательство. Так как $H_1 \cap H_2 \ne \varnothing$, то существует $\underset{\downarrow}{x_0} \in H_1 \cap H_2$. Предположим, что существует еще некоторый вектор $\underset{\downarrow}{z} \in H_1 \cap H_2$. Представим его в таком виде

$$\underset{\downarrow}{z} = \underset{\downarrow}{x_0} + (\underset{\downarrow}{z} - \underset{\downarrow}{x_0}) \qquad (7.12)$$

Так как $\underset{\downarrow}{z}$ и $\underset{\downarrow}{x_0}$ принадлежит $H_1 \cap H_2$, то эти векторы принадлежат как H_1, так и H_2. Следовательно, $\underset{\downarrow}{z} - \underset{\downarrow}{x_0} \in L_1$ и $\underset{\downarrow}{z} - \underset{\downarrow}{x_0} \in L_2$, т.е. $\underset{\downarrow}{z} - \underset{\downarrow}{x_0} \in L_1 \cap L_2$. Таким образом, из (7.12) заключаем, что любой вектор пересечения $H_1 \cap H_2$ может быть представлен как сумма вектора $\underset{\downarrow}{x_0}$ и некоторого вектора из пересечения $L_1 \cap L_2$. #

<u>Теорема 7.12</u>. Множество $M = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ всех решений совместной системы (6.1) есть гиперплоскость n-мерного пространства, имеющая размерность $p = n - r$, где $r = RangA$.

Доказательство. Согласно теореме 6.5 общее решение $\underset{\downarrow}{x}^{(OH)}$ неоднородной системы (6.11) равно сумме какого-нибудь частного решения $\underset{\downarrow}{x}^{(ЧН)}$ этой системы и общего решения $\underset{\downarrow}{x}^{(OO)}$ соответствующей однородной системы (6.8), т.е.

$$\underset{\downarrow}{x}^{(OH)} = \underset{\downarrow}{x}^{(ЧН)} + \underset{\downarrow}{x}^{(OO)} \qquad (7.13)$$

С другой стороны согласно примеру 7.16 $\underset{\downarrow}{x}^{(OO)}$ образует линейное пространство размерности $p = n - r$, что вместе с (7.13) и доказывает справедливость теоремы. #

<u>Замечание 7.7</u> Отметим без доказательства, что имеет место и обратное утверждение. Всякая p-мерная плоскость n-мерного пространства есть множество всех решений некоторой линейной системы, состоящей из $r = n - p$ уравнений первой степени с n неизвестными.

Задачи к главе № 7

1) Найти размерность и базис линейного пространства V, элементами которого являются матрицы вида $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta-\alpha \\ 0 & \beta & \alpha \\ \gamma & 0 & \beta+\gamma \end{bmatrix}$.

2) Доказать линейную независимость системы функций $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – попарно различные действительные числа.

3) Доказать, что каждая из двух систем векторов является базисом пространства A^3 и найти связь координат одного и того же вектора в этих двух базисах: $e_1=(1, 0, 1)$, $e_2=(0, -1, -1)$, $e_3=(1, -1, -1)$; $f_1=(1, -1, 0)$, $f_2=(0, 1, 1)$, $f_3=(0, 0, 1)$.

4) Дополнить вектора $a_1=(0, 1, 1, 2)$ и $a_2=(1, 2, -1, 1)$ до базиса пространства A^4.

5) Найти базис линейной оболочки натянутый на векторы $a_1=(1, 0, 0, -1)$, $a_2=(1, 2, 1, -1)$, $a_3=(0, 1, 1, 0)$, $a_4=(0, 1, 0, 0)$, $a_5=(0, 2, 1, 0)$. Найти систему линейных уравнений, задающую эту линейную оболочку.

6) Найти разложение вектора $x=(4; -1; -8; 4)$ по векторам ортогонального базиса $e_1=(1, 2, 2, -1)$, $e_2=(2, 3, -3, 2)$, $e_3=(2, -1, -1, -2)$, $e_4=(-3, 2, -2, -3)$.

7) Доказать, что если вектора $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно выражаются через вектора $b_1, b_2, \ldots, b_m$, то ранг первой системы не превышает ранга второй.(максимальное число линейно независимых элементов в системе $a_1, a_2, \ldots, a_k$, иначе $\dim L(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, называется рангом данной системы $a_1, a_2, \ldots, a_k$).

8) Доказать, что вектор $\bar{b}$ тогда и только тогда выражается через вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ когда ранг последней системы не изменяется от присоединения к ней вектора $\bar{b}$.

ГЛАВА 8
ВЕЩЕСТВЕННЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ (УНИТАРНЫЕ) ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Определение и примеры унитарных пространств

Определение 8.1. Комплексное линейное пространство V называется комплексным евклидовым пространством (или унитарным пространством), если любой паре элементов $x, y \in V$ поставлено в соответствие комплексное число (x, y), называемое скалярным произведением этих элементов, и это соответствие удовлетворяет следующим аксиомам:

Аксиома 8.1. $(x, y)=\overline{(y, x)}$

(черта сверху означает всюду комплексное сопряжение);

Аксиома 8.2. $(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x, z)+\beta(y, z)$ – линейность;

Аксиома 8.3. (x, x) – вещественное число, $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x)=0 \Leftrightarrow x=\theta$;

Замечание 8.1. Имеет место равенство $(x, \lambda y)=\bar{\lambda}(x, y)$.

Вещественное линейное пространство V называется вещественным евклидовым пространством, если любой паре элементов $x, y \in V$ поставлено в соответствие вещественное число (x, y), называемое скалярным произведением этих элементов, и это соответствие удовлетворяет следующим аксиомам:

Аксиома 8.1. $(x, y)=(y, x)$ – (коммутативность);

Аксиома 8.2. $(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x, z)+\beta(y, z)$ – линейность;

Аксиома 8.3. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x)=0 \Leftrightarrow x=\theta$;

Замечание 8.2. Всюду ниже, где это особо не оговорено, под евклидовым пространством понимаем вещественное евклидово пространство.

Пример 8.1. Рассмотрим линейное пространство A^n (см. пример 7.2). Скалярное произведение элементов $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ можно определить равенством $(x, y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ в вещественном (или $(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ в комплексном) пространстве. Все аксиомы скалярного произведения легко проверяются. Рассмотренное евклидово пространство обозначают символом $\mathbb{R}^n$.

Пример 8.2. В пространстве $C[a,b]$ вещественных непрерывных заданных на отрезке $[a,b]$ функций (комплексно–значных непрерывных функций действительного переменного, изменяющегося на отрезке $[a,b]$) скалярное произведение можно определить следующим образом:

$$(f,g)=\int_a^b f(t)g(t)\,dt, \quad \left((f,g)=\int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt\right) \tag{8.1}$$

Введенное скалярное произведение, очевидно, удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Полученное евклидово (унитарное) пространство обозначим $CL_2[a,b]$.

Отметим, что в любом линейном пространстве V скалярное произведение можно ввести, как правило, не единственным способом. Тогда из линейного пространства V получаются различные евклидовы пространства. В качестве примера в том же самом линейном пространстве A^n (вещественном) введем для любых элементов $x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ и $y=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)$ скалярное произведение формулой

$$(x,y)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,\xi_i\,\eta_k, \tag{8.2}$$

где a_{ik} такие, что квадратная матрица $A=[a_{ik}]$ n-го порядка симметрична и, кроме того, для любого $x\neq\theta$; $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,\xi_i\,\xi_k>0$. С помощью нашей матрицы $A=[a_{ij}]$, удовлетворяющей отмеченным выше условиям, введем скалярное произведение для любых двух элементов $x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ и $y=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)$ пространства A^n соотношением (8.2).

Для так определенного скалярного произведения легко проверить справедливость аксиом 8.1 – 8.3. Таким образом, пространство

A^n со скалярным произведением, определяемым равенством (8.2) при помощи матрицы $A=[a_{ij}]$, удовлетворяющей перечисленным выше условиям, является евклидовым пространством, отличным от $\mathbb{R}^n$. Обозначим его $\mathbb{R}^n_A$. Если же в качестве A взять единичную матрицу, то получим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, рассмотренное в примере 8.1.

§ 2. Неравенство Коши–Буняковского

Утверждение 8.1. Если V – унитарное пространство, то для любых элементов $x,y\in V$ справедливо неравенство Коши–Буняковского

$$|(x,y)|\le (x,x)^{\frac{1}{2}}\cdot(y,y)^{\frac{1}{2}}. \tag{8.3}$$

Доказательство. Пусть λ – произвольное комплексное число $(\lambda\in C)$. Тогда согласно аксиомам скалярного произведения имеем:

$$\begin{aligned}0&\le(x-\lambda y,\,x-\lambda y)=(x,x)-(x,\lambda y)-(\lambda y,x)+(\lambda y,\lambda y)=\\&=(x,x)-\overline{\lambda}(x,y)-\lambda\overline{(x,y)}+\lambda\overline{\lambda}(y,y)=(x,x)-\overline{\lambda}(x,y)-\\&-\overline{\overline{\lambda}(x,y)}+|\lambda|^2(y,y)=(x,x)-2\,\mathrm{Re}\left[\overline{\lambda}(x,y)\right]+|\lambda|^2(y,y);\end{aligned}$$

Возьмем $\lambda=\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$, $y\neq0$. (Для $y=\theta$, утверждение очевидно).

Тогда $0\le(x,x)-\dfrac{|(x,y)|^2}{(y,y)}$ откуда следует (8.3). #

Замечание 8.3. Под символом $|(x,y)|$ здесь понимается модуль комплексного числа (x,y).

Определение 8.2. Линейное комплексное пространство V называется линейным нормированным пространством, если любому элементу x пространства V ставится в соответствие вещественное число $\|x\|$, называемое нормой, указанного элемента, при этом норма для любых $x,y\in V$ и любого $\lambda\in\mathbb{R}$ удовлетворяет следующим трем аксиомам:

Аксиома 8.1. $\|x\|\ge0$, причем $\|x\|=0\Leftrightarrow x=\theta$.

Аксиома 8.2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ – однородность нормы.

Аксиома 8.3. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ – неравенство треугольника.

Пример 8.3. В V_3 – трехмерном пространстве свободных векторов положим $\|\vec{a}\| = |\vec{a}|$, где $|\vec{a}|$ – длина вектора $\vec{a}$. Тогда пространство V_3 с так введенной нормой, очевидно, является нормированным.

Пример 8.4. В линейном пространстве $C[a,b]$ непрерывных функций, заданных на отрезке $[a,b]$ для любой $f(x) \in C[a,b]$, определим норму равенством $\|f(x)\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Пространство $C[a,b]$ с так введенной нормой, как нетрудно убедиться, является нормированным пространством.

Утверждение 8.2. Всякое унитарное пространство является нормированным, если в нем норму любого элемента x определить равенством

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \tag{8.4}$$

Для доказательства утверждения достаточно показать, что для нормы, определенной соотношением (8.4), справедливы аксиомы 8.1 – 8.3 из определения линейного нормированного пространства. Справедливость аксиом 8.1 – 8.2 непосредственно следует из аксиом 8.1 – 8.3 скалярного произведения. Остается показать справедливость аксиомы 8.3 (неравенства треугольника). Будем опираться на неравенство Коши – Буняковского. Тогда

$$\|x+y\| = \sqrt{(x+y,x+y)} = \sqrt{(x,x)+(x,y)+\overline{(x,y)}+(y,y)} =$$

$$= \sqrt{(x,x)+2\operatorname{Re}(x,y)+(y,y)} \le \sqrt{(x,x)+2|(x,y)|+(y,y)} \le$$

$$\le \sqrt{(x,x)+2(x,x)^{\frac{1}{2}}\cdot(y,y)^{\frac{1}{2}}+(y,y)} = \sqrt{\left[(x,x)^{\frac{1}{2}}+(y,y)^{\frac{1}{2}}\right]^2} =$$

$$= (x,x)^{\frac{1}{2}}+(y,y)^{\frac{1}{2}} = \|x\|+\|y\|.\#$$

Замечание 8.4. В терминах нормы неравенство Коши – Буняковского примет вид:

$$|(x,y)| \le \|x\|\cdot\|y\|.$$

Замечание 8.5. Введем функцию $\rho(x,y) = \|x-y\|$ (ее можно трактовать как расстояние от x до y). Из аксиом линейного нормированного пространства непосредственного следует, что функция расстояния $\rho(x,y)$ удовлетворяет для любых x, y, z следующим свойствам:

а) $\rho(x,y) \ge 0$ $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

б) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

в) $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Упражнение 8.1. Доказать неравенства $\big|\|x\|-\|y\|\big| \le \|x-y\| \le$ $\le \|x\|+\|y\|$.

Указание. Использовать неравенство треугольника.

Неравенство Коши–Буняковского и неравенство треугольника справедливы в любом унитарном пространстве. Посмотрим, как выглядят эти неравенства в некоторых конкретных евклидовых пространствах.

Так, в пространстве $\mathbb{R}^n$ примера 8.1 неравенство (8.3) задается формулой:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\right) \text{ (неравенство Коши)},$$

а неравенство треугольника формулой

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В евклидовом пространстве примера 8.2 неравенство (8.3) имеет вид:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \le \int_a^b f^2(t)dt\int_a^b g^2(t)dt \text{ (неравенство Буняковского)}$$

а неравенство треугольника

$$\left(\int_a^b [f(t)+g(t)]^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n_A$ со скалярным произведением (8.2) неравенство (8.3) и неравенство треугольника задаются соответственно формулами:

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\eta_j\right)^2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j\right)$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\xi_i+\eta_i)(\xi_j+\eta_j)\right] \le \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Замечание 8.6. Вводя в евклидовых пространствах разными способами скалярное произведение, можно из (8.3) и неравенства треугольника получить много других интересных неравенств.

§ 3. Общий вид скалярного произведения в унитарном пространстве

Пусть $[e]=[e_1, e_2,..., e_n]$ – базис унитарного пространства V_n. Для любого x и y, принадлежащих V_n, имеем

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j.$$

Тогда в силу свойств скалярного произведения имеем

$$(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(e_k, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_k \overline{y_j}(e_k, e_j) = \sum_{k,j=1}^{n} g_{kj} x_k \overline{y_j},$$

где $g_{kj} = (e_k, e_j)$.

Итак,
$$(x,y) = \sum_{k,j=1}^{n} g_{kj}\, x_k\, \overline{y_j}, \qquad (8.5)$$

причем
$$g_{kj} = (e_k, e_j) = \overline{(e_j, e_k)} = \overline{g}_{jk}.$$

Квадратная матрица $A = [g_{kj}]$, удовлетворяющая условию $g_{kj} = \overline{g}_{jk}$, называется эрмитовой.

Выражение (8.5) для скалярного произведения (x,y) можно записать в другом виде:

$$(x, y) = [x_1,..., x_n]\, A \begin{bmatrix} \overline{y}_1 \\ \vdots \\ \overline{y}_n \end{bmatrix},$$

где A – эрмитова матрица.

§ 4. Ортонормированная система, ортонормированный базис

Элементы x и y унитарного пространства V называются ортогональными (обозначение $x \perp y$), если их скалярное произведение равно нулю $(x \perp y \Leftrightarrow (x,y)=0)$.

Система элементов $e_1, e_2,..., e_m$ унитарного пространства V называется ортонормированной системой (ОНС), если

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, j = k, \\ 0, j \ne k. \end{cases}$$

Утверждение 8.3. Любая ОНС $e_1, e_2,..., e_m$ унитарного пространства V линейно независима.

Доказательство. Достаточно показать, что равенство

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_m e_m = \theta \qquad (8.6)$$

возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$. Для произвольного k, $k = 1, 2,..., m$ умножим обе части равенства (8.6) на e_k. Получим

$$\alpha_1(e_1, e_k) + \alpha_2(e_2, e_k) + ... + \alpha_m(e_m, e_k) = 0.$$

По определению ортонормированной системы $(e_k, e_k) = 1$, $(e_k, e_j) = 0$ при $j \ne k$. Следовательно, $\alpha_k = 0$. Так как k – произвольное ($k = 1, 2,..., m$), то утверждение доказано. #

Ортонормированным базисом (ОНБ) унитарного пространства V_n называется ортонормированная система, которая является базисом V_n.

Утверждение 8.4. Ортонормированный базис $e_1, e_2,..., e_n$ унитарного пространства V_n обладает следующими свойствами:

для любых $x, y \in V_n$ разложение $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ единственно и $x_k = (x, e_k)$, $k = 1,..., n$;

$$(x, y)=\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}. \tag{8.7}$$

Доказательство. Справедливость утверждения следует из определения ОНБ и равенства (8.5).

§ 5. Существование ортонормированного базиса

Существование ОНБ в унитарном пространстве вытекает из следующей теоремы, которая дает также конструктивный метод построения ОНБ.

Теорема 8.1. Шмидта об ортогонализации. Пусть в унитарном пространстве V_n задан произвольный базис $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Тогда в пространстве V_n существует ОНБ $e_1, e_2, \ldots, e_n$, который можно построить следующим образом:

$$e_k=\frac{g_k}{\|g_k\|}, \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

где g_k является линейной комбинацией векторов $f_1, f_2, \ldots, f_k$ и задается формулой:

$$g_k=f_k-(f_k, e_{k-1}) e_{k-1}-\ldots-(f_k, e_1) e_1. \tag{8.8}$$

Доказательство. Построение ОНБ будем вести методом математической индукции.

При $n=1$ положим $e_1=\dfrac{f_1}{\|f_1\|}$ ($\|f_1\| \neq 0$, так как система элементов $\{f_i\}$ линейно независима). Очевидно, e_1 – ОНБ из одного вектора, удовлетворяющего всем условиям теоремы.

Предположим, что в унитарном пространстве размерности k существует ОНБ $e_1, e_2, \ldots, e_k$, причем для любого i, $1 \leq i \leq k$, вектор e_i является линейной комбинацией векторов $f_1, f_2, \ldots, f_i$ и $e_i=\dfrac{g_i}{\|g_i\|}$, где g_i определяется по формуле (8.8).

Покажем, что в унитарном пространстве размерности $k+1$ также существует ОНБ, удовлетворяющий условиям теоремы. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k, f_{k+1}$ – произвольный базис в пространстве V_{k+1}. Линейная оболочка $L(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ элементов $f_1, f_2, \ldots, f_k$ представляет собой, очевидно, k-мерное унитарное пространство и по предположению индукции в нем существует ортонормированная система $e_1, e_2, \ldots, e_k$, удовлетворяющая условиям теоремы. Рассмотрим вектор $g_{k+1}=f_{k+1}+\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\ldots+\alpha_k e_k$. Он, очевидно, является линейной комбинацией векторов $f_1, f_2, \ldots, f_k, f_{k+1}$ и в силу линейной независимости системы $\{f_i\}$ $g_{k+1} \neq \theta$ ни при каких α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ подберем так, чтобы g_{k+1} был ортогонален векторам $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Умножая g_{k+1} скалярно на e_j $(j=1, 2, \ldots, k)$, видно, что для этого необходимо, чтобы $\alpha_j=-(f_{k+1}, e_j)$. Следовательно, $g_{k+1}=f_{k+1}-(f_{k+1}, e_k) e_k-\ldots-$ $\ldots-(f_{k+1}, e_1) e_1$.

Положим $e_k=\dfrac{g_{k+1}}{\|g_{k+1}\|}$. Тогда, очевидно, векторы $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}$ образуют ОНБ пространства V_{k+1}, удовлетворяющий всем условиям теоремы. #

Следствие 8.1. Из определения размерности пространства V_n и предыдущей теоремы следует, что во всяком n-мерном пространстве существует ОНБ.

Замечание 8.7. Нетрудно видеть, что таких ОНБ существует много. Действительно, из данного базиса $f_1, f_2, \ldots, f_n$ можно построить разные ОНБ, если, например, начинать построение с разных векторов f_k.

§ 6. Изоморфизм унитарных пространств

Определение 8.3. Унитарные пространства V и V' называются изоморфными, если между элементами этих пространств можно установить такое взаимно – однозначное соответствие, что выполняются следующие два требования:

1) это соответствие является изоморфным соответствием между V и V' рассматриваемыми как линейные пространства.

2) при этом соответствии сохраняется скалярное произведение; т.е. если образами элементов x и y из V являются соответственно x' и y' из V' то $(x, y)=(x', y')$.

Имеет место следующий критерий изоморфности унитарных пространств.

Теорема 8.2. Для того, чтобы два унитарных пространства V и $V^{/}$ конечной размерности были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковую размерность.

Доказательство. Необходимость. Если два унитарных пространства V и $V^{/}$ изоморфны, то они будут изоморфны и как линейные пространства и, следовательно, будут иметь одинаковую размерность.

Достаточность. Пусть $\dim V = \dim V^{/} = n$. Выберем в V и $V^{/}$ произвольные ортонормированные базисы $e_1, e_2, ..., e_n$; $e_1^{/}, e_2^{/}, ..., e_n^{/}$. Соответствие между элементами пространств V и $V^{/}$ зададим следующим образом: сопоставим друг другу векторы, имеющие одинаковые координаты в выбранных ортонормированных базисах, т.е.

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n \leftrightarrow x^{/} = x_1 e_1^{/} + x_2 e_2^{/} + ... + x_n e_n^{/}.$$

Очевидно, это соответствии взаимно однозначно и в силу теоремы 7.4 при нем сумма двух элементов из V переходит в сумму соответствующих элементов из $V^{/}$, произведение числа $\lambda (\lambda \in \mathbb{R})$ на вектор из V переходит в произведение того же числа λ на соответствующий вектор из $V^{/}$. Следовательно, V и $V^{/}$, рассматриваемые как линейные пространства, изоморфны. Остается показать, что при этом соответствии сохраняется скалярное произведение. Пусть $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$ и $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + ... + y_n e_n$ – два произвольных вектора из V, $x^{/} = x_1 e_1^{/} + x_2 e_2^{/} + ... + x_n e_n^{/}$ и $y^{/} = y_1 e_1^{/} + y_2 e_2^{/} + ... + y_n e_n^{/}$ – соответствующие им векторы из $V^{/}$. Так как $e_1, e_2, ..., e_n, e_1^{/}, e_2^{/}, ..., e_n^{/}$ ОНБ, то согласно свойствам ОНБ (8.7)

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k = (x^{/}, y^{/}). \#$$

§ 7. Ортогональные суммы. Проекции

Определение 8.4. Два множества элементов M и B унитарного пространства V называются ортогональными, если каждый вектор первого множества ортогонален к каждому вектору второго множества. Ортогональность M и B символически записывают в виде $M \perp B$.

Утверждение 8.5. Если множества M и B ортогональны, то их пересечение либо пусто, либо состоит только из нулевого элемента.

Доказательство. В самом деле, пусть $a \in M \cap B$. Следовательно, $a \in M$ и $a \in B$ и поэтому $(a, a) = 0$ (так как $M \perp B$). Откуда $a = \theta$.

Определение 8.5. Пусть G – произвольное непустое подмножество унитарного пространства V. Совокупность всех векторов пространства V, ортогональных к G, называется ортогональным дополнением G до пространства V и обозначается $G^{\perp}$. Иными словами, $G^{\perp} = \{y \in V; (x, y) = 0 \text{ для } \forall x \in G\}$.

Утверждение 8.6. Ортогональное дополнение $G^{\perp}$ любого непустого множества $G \in V$ является линейным подпространством пространства V.

Доказательство. Действительно, если $x, y \in G^{\perp}$, а z произвольный элемент G, то $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) = 0$. Следовательно, для $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\forall x, y \in G^{\perp}$ элемент $\alpha x + \beta y \in G^{\perp}$. Следовательно, $G^{\perp}$ является линейным подпространством. #

Если G – подпространство унитарного пространства V, то G и $G^{\perp}$ связаны между собой следующим утверждением.

Теорема 8.3. Унитарное пространство V_n есть прямая сумма любого своего линейного подпространства G и его ортогонального дополнения $G^{\perp}$, т.е. $V_n = G \oplus G^{\perp}$.

Доказательство. Пусть G ($\dim G = k$) есть произвольное подпространство пространства V_n. Выберем в G некоторый ОНБ $e_1, e_2, ..., e_k$. Согласно теореме 7.6 о неполном базисе (см. гл. 7 п. 4) его можно дополнить элементами $g_{k+1}, ..., g_n$ до базиса всего пространства V_n. Оставляя векторы $e_1, e_2, ..., e_k$ неизменными, всю систему векторов $e_1, e_2, ..., e_k$, $g_{k+1}, ..., g_n$ ортонормируем (методом Шмидта). Получим ОНБ $e_1, e_2, ..., e_k$, $e_{k+1}, ..., e_n$ всего пространства V_n, причем $e_1, e_2, ..., e_k$ – ОНБ подпространства G. Очевидно, что линейная оболочка $L(e_{k+1}, ..., e_n)$ элементов $e_{k+1}, ..., e_n$ совпадает с $G^{\perp}$.

Для любого $x \in V_n$ имеем

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i = x^{/} + x^{//}, \tag{8.9}$$

где $x^{/} \in G$; $x^{//} \in L(e_{k+1}, ..., e_n) = G^{\perp}$.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что для любого $x \in V_n$ представление (8.9) единственно. Пусть существует другое представление: $x = \tilde{x}^{/} + \tilde{x}^{//}$, где $\tilde{x}^{/} \in G$, а $\tilde{x}^{//} \in G^{\perp}$. Вычитая это равенство из представления (8.9), получаем: $\tilde{x}^{/} - x^{/} = x^{//} - \tilde{x}^{//}$. Так как левая часть этого равенства является элементом G, а правая часть – элементом $G^{\perp}$, то как $\tilde{x}^{/} - x^{/}$, так и $x^{//} - \tilde{x}^{//}$ принадлежат пересечению $G \cap G^{\perp}$ подпространств G и $G^{\perp}$. Пересечение же подпространств G и $G^{\perp}$ состоит в силу утверждения 7.5 только из нулевого элемента. Следовательно, $\tilde{x}^{/} = x^{/}$ и $x^{//} = \tilde{x}^{//}$. #

<u>Следствие 8.2</u>. Ортогональное дополнение $G^{\perp}$ k-мерного подпространства G унитарного пространства V_n есть подпространство размерности $n-k$. Справедливость следствия вытекает из равенства:

$$G^{\perp} = L(e_{k+1}, ..., e_n).$$

<u>Следствие 8.3</u>. $V_n = L(e_1) \oplus L(e_2) \oplus ... + L(e_n)$, где $e_1, e_2, ..., e_n$ – ОНБ унитарного пространства V_n, а $L(e_k)$ – линейная оболочка элемента e_k.

<u>Следствие 8.4</u>. Для любого подпространства G унитарного пространства V_n справедливо равенство $G^{\perp\perp} = G$.

Доказательство. Очевидно, $G \subseteq G^{\perp\perp}$. С другой стороны, согласно теореме 8.3 для любого $x \in G^{\perp\perp}$ имеем

$$x = x^{/} + x^{//}, \text{ где } x^{/} \in G;\ x^{//} \in G^{\perp}.$$

Умножая это равенство скалярно на $x^{//}$, получаем $(x^{//}, x^{//}) = 0$, т.е. $x^{//} = \theta, x = x^{/}$. Следовательно, $G^{\perp\perp} = G$. #

1. Ортогональная проекция вектора на линейное подпространство

Пусть G – некоторое линейное подпространство унитарного пространства V. Согласно теореме предыдущего пункта V_n есть прямая сумма подпространства G и его ортогонального дополнения $G^{\perp}$. Следовательно, любой элемент $x \in V_n$ может быть единственным образом представлен в виде

$$x = x^{/} + x^{//}, \tag{8.10}$$

где $x^{/} \in G$; $x^{//} \in G^{\perp}$.

Слагаемое $x^{/}$ называется проекцией вектора x на подпространство G, а слагаемое $x^{//}$ – ортогональной составляющей вектора x на это подпространство.

<u>Замечание 8.8</u>. Так как G является ортогональным дополнением к $G^{\perp}$ (см. следствие 8.4), то в равенстве (8.10) слагаемое $x^{//}$ будет проекцией вектора x на подпространство $G^{\perp}$.

<u>Утверждение 8.7</u>. Пусть G – некоторое подпространство унитарного пространства V_n. Тогда проекция суммы любых векторов на подпространство G равна сумме проекций слагаемых на это подпространство, а проекция произведения числа $\lambda (\lambda \in \mathbb{R})$ на произвольный вектор равна произведению этого числа на проекцию данного вектора.

Доказательство. Пусть x, y – любые два элемента пространства V_n. Согласно (8.10) их можно представить в виде $x = x^{/} + x^{//}$, $y = y^{/} + y^{//}$, где $x^{/}$ и $y^{/}$ – проекции на подпространство G векторов x и y соответственно. Из последних двух равенств получим

$$x + y = (x^{/} + y^{/}) + (x^{//} + y^{//}), \quad (x^{/} + y^{/} \in G, x^{//} + y^{//} \in G^{\perp});$$

$$\lambda x = \lambda x^{/} + \lambda x^{//}, \quad (\lambda x^{/} \in G, \lambda x^{//} \in G^{\perp}).$$

Из единственности представления (8.10) следует справедливость нашего утверждения. #

1) Доказать неравенство $\left|\|x\|-\|y\|\right| \le \|x-y\| \le \|x\|+\|y\|$.

2) Доказать неравенство $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\beta_i^2\right)$.

3) Найти ортогональный базис в пространстве многочленов степени не выше 4, определенных на отрезке $[-1,1]$, со скалярным произведением, определенным по формуле

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)\,dt.$$

4) В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^4$ даны два ортогональных вектора $\overline{a_1}=(0,-2,2,-3)$, $\overline{a_2}=(2,-8,-2,4)$. Дополнить их до ортогонального базиса в $\mathbf{R}^4$.

5) Пусть $y\in\mathbf{R}^4$, где $\vec{y}=(4,-1,-3,4)$, а L – подпространство, натянутое на вектора $\overline{a_1}=(1,1,1,1)$, $\overline{a_2}=(1,2,2,-1)$, $\overline{a_3}=(1,0,0,3)$. Найти ортогональную проекцию p вектора y на подпространство L и ортогональную составляющую r вектора y на это подпространство.

6) Пусть $y\in\mathbf{R}^4$, где $\bar{y}=(7,-4,-1,2)$, а подпространство $L\subset\mathbf{R}^4$ задано системой уравнений

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+3x_4=0\\3x_1+2x_2+2x_3+x_4=0\\x_1+2x_2+2x_3-9x_4=0\end{cases}$$

Найти ортогональную проекцию p вектора y на подпространство L и ортогональную составляющую r вектора у на подпространство L.

Глава 9
ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Понятие линейного оператора и основные операции над ними

Определение 9.1. Пусть X и Y – линейные пространства (вещественные или комплексные). Оператором A, действующим из X в Y, называется правило (закон), ставящее каждому элементу $x\in X$ единственный элемент y пространства Y. Результат применения оператора A к элементу x обозначается символом $y=Ax$ или $y=A(x)$. Элемент x называется прообразом элемента $y=Ax$.

Оператор A, действующий из X в Y, называется линейным, если для любых элементов x_1 и x_2 пространства X и любых комплексных чисел α_1 и α_2 (вещественных в вещественном пространстве) выполняется соотношение:

$$A(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1Ax_1+\alpha_2Ax_2. \tag{9.1}$$

Некоторые операторы имеют специальные названия. Так, линейный оператор A, действующий из X в комплексную плоскость $\mathbf{C}$ (в действительную прямую $\mathbf{R}$), называется линейной формой или линейным функционалом. Линейный оператор A, действующий из X в X, называют также линейным преобразованием пространства X.

Очевидно, что действие линейного оператора A на любой вектор пространства X определяется единственным образом, если известны образы $Al_1, Al_2,\ldots, Al_n$ векторов $l_1, l_2,\ldots, l_n$, составляющих базис пространства X.

Утверждение 9.1. Линейный оператор A, действующий из пространства X в пространство Y, нулевой элемент θ_x пространства X переводит в нулевой элемент θ_y пространства Y, т.е. $A\theta_x=\theta_y$.

Доказательство. В самом деле, $\theta_x=0\cdot x$, где x – произвольный элемент пространства X. Значит,

$$A\theta_x=A(0\cdot x)=0\cdot Ax=\theta_y.$$

Отсюда следует

Утверждение 9.2. Если векторы $x_1, x_2,\ldots, x_n$ пространства X линейно зависимы, то их образы $y_1=Ax_1$, $y_2=Ax_2,\ldots$, $y_n=Ax_n$ также линейно зависимы, т.е. любой линейный оператор линейно зависимую систему векторов переводит снова в линейно зависимую систему.

Доказательство. Действительно, если $x_1, x_2, \dots, x_n$ из X линейно зависимы, то существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, не все равные нулю, что $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \theta_x$. Тогда согласно предыдущему утверждению

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 A x_1 + \dots + \lambda_n A x_n = \theta_y .$$

Следовательно, векторы $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n$ линейно зависимы.

Определение 9.2. Два линейных оператора A и B, действующие из X в Y, называются равными, если для любого $x \in X$

$$Ax = Bx. \qquad (9.2)$$

Суммой двух линейных операторов A и B, действующих из X в Y, называется оператор $A + B$, такой, что для любого $x \in X$:

$$(A + B)\, x = Ax + Bx. \qquad (9.3)$$

Произведением линейного оператора A на число λ называется оператор λA, такой, что для любого $x \in X$:

$$(\lambda A)\, x = \lambda\, (Ax). \qquad (9.4)$$

Нетрудно заметить, что если операторы A и B линейные, то операторы $A + B$ и λA также будут линейными.

Оператор, который каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие нулевой элемент пространства Y, называется нулевым оператором и обозначается символом **О**, т.е. для любого $x \in X$: $\mathbf{O}x = \theta_y$, где θ_y – нулевой элемент пространства Y. Очевидно, нулевой оператор всегда линеен и $\mathbf{O} = 0 \cdot A$, где A – произвольный оператор, действующий из X в Y.

Пусть A – линейный оператор, действующий из пространства X в пространство Y. Оператор $B = (-1)\, A$ называется оператором, противоположным оператору A. Оператор, противоположный оператору A, принято обозначать $-A$.

Обозначим $L\,(X, Y)$ множество всех линейных операторов, действующих из линейного пространства X в линейное пространство Y. $L\,(X, X)$ будем обозначать $L\,(X)$.

Справедливо следующее

Утверждение 9.3. Множество $L\,(X, Y)$ есть линейное пространство.

Доказательство. Как уже отмечалось выше, операции сложения и умножения на число, определенные во множестве $L\,(X, Y)$, не выводят из этого множества. Кроме того, в этом множестве определен нулевой оператор и для всякого оператора A существует противоположный оператор. Нетрудно убедиться также, что операции сложения операторов и умножения на число удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства.

Ниже будем иметь дело с операторами из пространства $L\,(X)$. Оператор I называется тождественным или единичным, если он каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие этот же элемент x, т.е. по определению

$$Ix = x$$

для всякого $x \in X$.

Пусть A и B – линейные операторы, определенные в пространстве X. Тогда по определению произведением операторов A и B является такой оператор AB, который действует по правилу

$$(AB)\, x = A\, (Bx) \text{ для любого } x \in X. \qquad (9.5)$$

Иными словами, преобразование AB есть результат последовательного выполнения преобразований B и A.

Если операторы A и B линейные, то оператор AB также линеен. Действительно, для любых $x, y \in X$ и любых чисел α и β имеем:

$$(AB)\,(\alpha x + \beta y) = A\,[B\,(\alpha x + \beta y)] = A\,[\alpha Bx + \beta By] =$$
$$= \alpha A\,(Bx) + \beta A\,(By) = \alpha\,(AB)\,x + \beta\,(AB)\,y.$$

Отметим, что в общем случае $AB \neq BA$ (см. пример 9.8).

Справедливы следующие свойства операторов из $L\,(X)$.

Свойство 9.1. $\lambda\,(AB) = (\lambda A)\,B$.

Свойство 9.2. $(A + B)\,C = AC + BC$.

Свойство 9.3. $A\,(B + C) = AB + AC$.

Свойство 9.4. $(AB)\,C = A\,(BC)$.

Доказательство. Свойство 9.1 следует из определения умножения операторов (см. формулы (9.4), (9.5)).

Свойство 9.2. Согласно формулам (9.3), (9.5) имеем для любого $x \in X$

$$((A + B)C)\,x = (A + B)(Cx) = A(Cx) + B(Cx) = (AC)\,x + (BC)\,x =$$
$$= (AC + BC)\,x, \quad \text{т.е. } ((AC + B)C)\,x = (AC + BC)\,x.$$

Так как это равенство справедливо для любого $x \in X$, то согласно формуле (9.2) $(A + B)\,C = AC + BC$.

Свойство 9.3. Доказывается так же, как свойство 9.2.

Свойство 9.4. Согласно формуле (9.5) имеем для любого $x \in X$

$$((AB)\,C)\,x = (AB)\,(Cx) = A\,(B\,(Cx)) = A\,((BC)\,x) = (A\,(BC))\,x,$$

$$\text{т.е.}\ \ ((AB)\,C)\,x = (A\,(BC))\,x.$$

Так как это равенство справедливо для любого $x \in X$, то согласно формуле (9.2) $(AB)\,C = A\,(BC)$.

Следствие 9.1. Свойство 9.4 дает возможность определить произведение любого числа операторов из $L\,(X)$.

Примеры линейных операторов.

Пример 9.1. Рассмотрим линейное пространство V_2 векторов на плоскости, выходящих из некоторой точки О. Оператор A зададим следующим условием: каждому вектору $\vec{x} \in V_2$ ставится в соответствие вектор $A\vec{x} \in V_2$, получающийся из $\vec{x}$ поворотом на угол φ вокруг точки O. Нетрудно проверить, что так определенный оператор линеен. Этот оператор называется оператором поворота плоскости на угол φ.

Пример 9.2. В пространстве V_3 свободных векторов оператор A зададим равенством:

$$A\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}] \text{ для любого } \vec{x} \in V_3,$$

где $\vec{a}$ – фиксированный вектор пространства V_3. Линейность этого оператора следует из свойств векторного произведения.

Пример 9.3. В пространстве M_n многочленов степени $\le n-1$ оператор A зададим равенством:

$$AP(t) = \frac{d}{dt}(P(t))$$

для любого $P(t) \in M_n$.

Линейность этого оператора (оператора дифференцирования) следует из линейности операции дифференцирования.

Пример 9.4. Рассмотрим пространство $C\,[a, b]$, векторами которого являются непрерывные функции $f(t)$, определенные на отрезке $[a, b]$. Оператор A зададим равенством:

$$Af(t) = \int_a^b h(\tau) f(\tau)\, d\tau$$

для любой $f(t) \in C\,[a, b]$, где $h(t)$ – некоторая фиксированная функция из $C\,[a, b]$. Линейность так определенного оператора следует из линейного свойства интеграла Римана.

Пример 9.5. В произвольном линейном пространстве X оператор A зададим равенством: $Ax = \lambda x$ для любого $x \in X$ (при $\lambda = 1$ получим единичный оператор I, а при $\lambda = 0$ нулевой оператор $\mathbf{O}$). Очевидно, это – линейный оператор, который называется оператором «растяжения» (в широком смысле). Он растягивает все векторы в одинаковое число раз.

Пример 9.6. Пусть линейное пространство X есть прямая сумма своих подпространств X' и X'', т.е. $X = X' \oplus X''$. Тогда любой элемент $x \in X$ можно единственным образом представить в виде: $x = x' + x''$, где $x' \in X'$, $x'' \in X''$. Оператор A определим равенством:

$$Ax = \lambda x' + \mu x''$$

для любого $x \in X$, где λ и μ – некоторые фиксированные числа. Линейность так определенного оператора очевидна. Этот оператор по аналогии с предыдущим примером можно назвать оператором «растяжения» с коэффициентом «растяжения» λ в подпространстве X' и с коэффициентом «растяжения» μ в подпространстве X''.

Пример 9.7. Положив в предыдущем примере $\lambda = 1$, а $\mu = 0$, получим оператор, который называется оператором проектирования пространства X на подпространство X' в направлении подпространства X''. Оператор проектирования, следовательно, определяется следующим образом: если $X = X' \oplus X''$, то для любого $x = x' + x''$, где $x' \in X'$, $x'' \in X''$, оператор A проектирования пространства X на подпространство X' в направлении X'' задается равенством: $Ax = x'$. Это, очевидно, линейный оператор.

Пример 9.8. Приведем пример операторов A и B, для которых $AB \ne BA$. В линейном пространстве V_2 свободных векторов на плоскости, выходящих из некоторой фиксированной точки O, рассмотрим ОНБ $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

В качестве оператора A рассмотрим оператор проектирования V_2 на подпространство $L(\vec{e}_1)$ в направлении подпространства $L(\vec{e}_2)$, где $L(\vec{e}_1)$ и $L(\vec{e}_2)$ – линейные оболочки векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ соответственно. В качестве оператора B возьмем оператор поворота плоскости V_2 на угол $\frac{\pi}{2}$ в направлении кратчайшего поворота от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$. Тогда, очевидно,

$$(AB)\vec{e}_1 = A(B\vec{e}_1) = A(\vec{e}_2) = \theta;$$
$$(BA)\vec{e}_1 = B(A\vec{e}_1) = B(\vec{e}_1) = \vec{e}_2.$$

Следовательно, $(AB)\vec{e}_1 \neq (BA)\vec{e}_1$. Таким образом, из формулы (9.2) следует $AB \neq BA$.

§ 2. Образ и ядро линейного оператора

Множество всех векторов $y \in Y$, таких, что $y = Ax$, $x \in X$ называется областью значений или образом оператора A и обозначается $\operatorname{Im} A$. Множество всех векторов $x \in X$, для которых $Ax = \theta$, называется ядром оператора A и обозначается $Ker\,A$.

Очевидно, что образ $\operatorname{Im} A$ и ядро $Ker\,A$ линейного оператора A являются линейными под пространствами пространств Y и X соответственно.

Размерность подпространства $\operatorname{Im} A$ называется рангом оператора A (кратко $Rang\,A = \dim(\operatorname{Im} A)$), размерность подпространства $Ker\,A$ называется дефектом оператора A.

Для некоторых операторов предыдущего пункта опишем их образ и ядро.

Пример 9.9. Для оператора поворота на угол φ, очевидно $\operatorname{Im} A = V_2$, $Ker\,A = \theta$.

Пример 9.10. Для оператора $A : A\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}]$ $(\vec{a} \neq 0)$, действующего в V_3, из свойств векторного произведения получаем, что $Ker\,A = L(\vec{a})$, $\operatorname{Im} A = L^{\perp}(\vec{a})$, где $L(\vec{a})$ – линейная оболочка вектора $\vec{a}$, а $L^{\perp}(\vec{a})$ – ортогональное дополнение к $L(\vec{a})$, т.е. плоскость ортогональная вектору $\vec{a}$, если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\operatorname{Im} A = \theta$, $Ker\,A = V_3$.

Пример 9.11. Для оператора дифференцирования в пространстве M_n, очевидно, $\operatorname{Im} A = M_{n-1}$, $Ker\,A = M_0$.

Пример 9.12. Для оператора проектирования пространства X $(X = X' \oplus X'')$, на подпространство X' в направлении пространства X'', очевидно, $\operatorname{Im} A = X'$, $Ker\,A = X''$.

Нетрудно заметить, что во всех приведенных примерах сумма размерностей образа и ядра равна размерности всего пространства. Оказывается, это не случайность, а имеет место общая

Теорема 9.1. Пусть A – произвольный линейный оператор, действующий в n-мерном пространстве V_n, т.е. $A \in L(V_n)$. Тогда сумма размерностей образа и ядра оператора A равна размерности всего пространства, т.е. $\dim(\operatorname{Im} A) + \dim(Ker\,A) = n$.

Доказательство. Пусть $\dim(Ker\,A) = K$. Выберем в подпространстве $Ker\,A$ базис $e_1, e_2, \dots, e_k$ и дополним его до базиса $e_1, e_2, \dots, e_k$, $e_{k+1}, \dots, e_n$ во всем пространстве V_n. Рассмотрим элементы Ae_{k+1}, $Ae_{k+2}, \dots, Ae_n$. Покажем, что они образуют базис подпространства $\operatorname{Im} A$. Действительно, пусть y – произвольный элемент из $\operatorname{Im} A$. Тогда, по определению, существует $x \in V_n$, такой, что $y = Ax$. Так как $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис в V_n, то $x = \lambda_1 e_1 + {}+ \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$. Но так как $e_1, e_2, \dots, e_k \in Ker\,A$, т.е. $Ae_1 = \dots = \dots = Ae_k = 0$, то

$$y = Ax = \lambda_{k+1} Ae_{k+1} + \dots + \lambda_n Ae_n. \tag{9.6}$$

Покажем, что элементы $Ae_{k+1}, \dots, Ae_n$ линейно независимы. Действительно, пусть существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}$ не равные одновременно нулю, и такие, что

$$\alpha_1 Ae_{k+1} + \dots + \alpha_{n-k} Ae_n = \theta.$$

Рассмотрим вектор

$$x = \alpha_1 e_{k+1} + \dots + \alpha_{n-k} e_n. \tag{9.7}$$

Тогда $Ax = A(\alpha_1 e_{k+1} + \dots + \alpha_{n-k} e_n) = \alpha_1 Ae_{k+1} + \dots + \alpha_{n-k} Ae_n = \theta$, т.е. $x \in Ker\,A$, и следовательно, существуют числа $\beta_1, \dots, \beta_k$, такие, что

$$x = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k. \tag{9.8}$$

Таким образом, для вектора x мы получили два представления (9.7) и (9.8), что противоречит единственности разложения вектора x по базису $e_1, \dots, e_n$. Полученное противоречие доказывает линейную независимость элементов $Ae_{k+1}, \dots, Ae_n$.

Итак, мы показали, что $n-k$ элементов $Ae_{k+1}, \dots, Ae_n$ подпространства $\operatorname{Im} A$ линейно независимы и для любого элемента $y \in \operatorname{Im} A$ существует представление (9.6), т.е. $Ae_{k+1}, \dots, Ae_n$ есть базис подпространства $\operatorname{Im} A$. Следовательно, $\dim(\operatorname{Im} A) = n - k$. Отсюда уже следует утверждение теоремы. #

Справедлива, в некотором смысле, обратная теорема.

Теорема 9.2. Для любых двух подпространств X' и X'' n-мерного пространства X, таких, что $\dim X' + \dim X'' = n$, существует оператор $A \in L(X)$, для которого $Ker\, A = X'$, $\operatorname{Im} A = X''$.

Доказательство. Пусть $\dim X' = k$, $\dim X'' = n-k$. Выберем в пространстве X' базис $e_1, e_2,..., e_k$. Дополним его (согласно теореме о неполном базисе) элементами $e_{k+1},..., e_n$ до базиса во всем пространстве X. В подпространстве X'' выберем некоторый базис $\hat{e}_1, \hat{e}_2,..., \hat{e}_{n-k}$. Для того чтобы задать линейный оператор, как отмечалось уже выше, достаточно задать его на базисных векторах. Определим значения линейного оператора A на базисных векторах $e_1, e_2,..., e_n$ пространства X следующим образом:

$$Ae_1 = \theta,\ Ae_2 = \theta,\ Ae_k = \theta;$$
$$Ae_{k+1} = \hat{e}_1,\ Ae_{k+2} = \hat{e}_2,..., Ae_n = \hat{e}_{n-k}.$$

Так определенный оператор, очевидно, обладает требуемыми свойствами. #

§ 3. Обратный оператор

Определение 9.3. Если для оператора $A \in L(X)$ существует такой оператор B, что $AB = BA = I$, то B называется обратным по отношению к A, а оператор A называется обратимым.

Обратный оператор для оператора A принято обозначать символом A^{-1}.

Утверждение 9.4. Если для оператора $A \in L(X)$ существует A^{-1}, то

1) $A^{-1} \in L(X)$, т.е. A^{-1} – тоже линейный;

2) A^{-1} определен однозначно.

Доказательство. 1) следует из линейности оператора A и очевидной цепочки равенств, справедливых для любых $x, y \in X$ и любых чисел λ, μ:

$$A^{-1}(\lambda x + \mu y) = A^{-1}(\lambda (AA^{-1})x + \mu (AA^{-1})y) = A^{-1}(\lambda A(A^{-1}x) +$$
$$+ \mu A(A^{-1}y)) = A^{-1}A(\lambda A^{-1}x + \mu A^{-1}y) = \lambda A^{-1}x + \mu A^{-1}y$$

2) пусть для A существует два обратных оператора B_1 и B_2, т.е. $AB_1 = B_1A = I$ и $AB_2 = B_2A = I$. Тогда

$$B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2. \#$$

Определение 9.4. Оператор $A \in L(X)$ действует взаимно однозначно в X, если различные элементы из X оператор A переводит снова в различные элементы.

Утверждение 9.5. Пусть оператор $A \in L(X)$ действует взаимно однозначно в X, тогда оператор A отображает X на себя, т.е. любой элемент из X имеет в X прообраз.

Доказательство. Покажем, что оператор A любой базис e_1, $e_2,..., e_n$ пространства X снова переводит в базис $Ae_1, Ae_2,..., Ae_n$ этого же пространства. Для этого достаточно показать, что любые n линейно-независимых элементов $e_1,..., e_n$ пространства X оператором A отображаются в n линейно-независимых элементов $Ae_1, Ae_2,..., Ae_n$.

Итак, пусть $e_1, e_2,..., e_n$ линейно независимы. Если линейная комбинация $\lambda_1Ae_1, \lambda_2Ae_2,..., \lambda_nAe_n$ представляет собой нулевой элемент пространства X, т.е.

$$\lambda_1Ae_1 + \lambda_2Ae_2 + ... + \lambda_nAe_n = \theta,$$

то в силу линейности оператора A имеем:

$$A(\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + ... + \lambda_ne_n) = \theta.$$

Так как оператор A действует взаимно однозначно в X, то $\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + ... + \lambda_ne_n = \theta$. Но элементы $e_1, e_2,..., e_n$ линейно независимы, поэтому $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. Следовательно, элементы $Ae_1, Ae_2,..., Ae_n$ линейно независимы и поэтому образуют базис пространства X.

Далее пусть y – произвольный элемент пространства X. Тогда существуют числа $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$, такие, что:

$$y = \alpha_1Ae_1 + \alpha_2Ae_2 + ... + \alpha_nAe_n = A(\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + ... + \alpha_ne_n).$$

Из последнего равенства следует, что элемент

$$x = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + ... + \alpha_ne_n$$

является прообразом элемента y. #

Имеет место следующий критерий обратимости оператора $A \in L(V_n)$.

Теорема 9.3. Оператор $A \in L(V_n)$ обратим тогда и только тогда, когда A действует взаимно однозначно в V_n.

Доказательство. Необходимость. Пусть оператор A имеет обратный, но оператор A не действует взаимно однозначно, в V_n, т.е. существуют элементы x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$, такие, что $Ax_1 = Ax_2$. Но тогда $x_1 - x_2 = I(x_1 - x_2) = A^{-1}A(x_1 - x_2) = A^{-1}(Ax_1 - Ax_2) = A^{-1}(\theta) = \theta$. Следовательно, $x_1 = x_2$, что противоречит нашему предположению. Полученное противоречие и доказывает, что оператор A действует взаимно однозначно в V_n.

Достаточность. Пусть оператор A действует взаимно однозначно в V_n. Тогда согласно предыдущему утверждению для каждого $y \in V_n$ существует элемент $x \in V_n$, такой, что

$$y = Ax. \tag{9.7a}$$

Таким образом, каждому элементу $y \in V_n$ ставится в соответствие элемент $x \in V_n$, т.е. определен оператор B:

$$x = By, \tag{9.8a}$$

причем $y = Ax$. Подставляя в (9.7a) представление (9.8a), получаем

$$y = Ax = A(By) = (AB)y \text{ для любого } y \in V_n.$$

Отсюда согласно определению равенства операторов получим

$$AB = I. \tag{9.9}$$

Аналогично, подставляя в (9.8a) выражение (9.7a), получаем

$$x = By = B(Ax) = (BA)x \text{ для любого } x \in V_n.$$

Следовательно,

$$BA = I. \tag{9.10}$$

Из (9.9) и (9.10) следует, что оператор A обратим. #

§ 4. Матрица линейного оператора

Пусть A – оператор из $L(V_n)$ (V_n – n-мерное линейное пространство) и пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис пространства V_n (этот базис обозначим $[e] = [e_1, e_2, \dots, e_n]$). Оператор A переводит элементы e_k в Ae_k, $k = 1, 2, \dots, n$. Разложим векторы $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n$ по базису $[e]$:

$$\begin{aligned} Ae_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n, \\ Ae_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Ae_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{aligned} \tag{9.11}$$

или кратко

$$\begin{bmatrix} Ae_1 \\ Ae_2 \\ \vdots \\ Ae_n \end{bmatrix} = (A_e)' \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}, \text{ где } A_e = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

и $(A_e)'$ – матрица транспонированная к A_e.

<u>Определение 9.5.</u> Матрица A_e называется матрицей линейного оператора A в базисе $[e]$.

Отметим, что в k-ом столбце матрицы A_e стоят координаты вектора Ae_k ($k = 1, 2, \dots, n$) в базисе $[e]$.

<u>Замечание 9.1.</u> Равенство (9.11) можно кратко записать следующим образом:

$$Ae_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{9.12}$$

Очевидно, матрицей нулевого и единичного оператора в любом базисе $[e]$ являются соответственно нулевая и единичная матрицы.

Утверждение 9.6. 1. Любому оператору $A \in L(V_n)$ можно поставить в соответствие матрицу A_e в базисе $[e]$, причем матрица A_e определена единственным образом.

2. Пусть в линейном пространстве V_n задан базис $[e]$ и пусть задана квадратная матрица $A = [a_{ik}]$ n-го порядка. Тогда существует единственный оператор $A \in L(V_n)$, матрицей которого в заданном базисе $[e]$ является матрица A.

Доказательство. 1. Существование для каждого оператора A матрицы A_e этого оператора в базисе $[e]$ следует из ее определения, а единственность следует из единственности разложения любого вектора по базису.

2. Как уже отмечалось выше, для того чтобы задать линейный оператор A достаточно определить его на базисных векторах. Поставим в соответствие каждому вектору e_k, $k = 1, 2, \dots, n$, вектор Ae_k, определенный равенством (9.12), полагая в этом соотношении a_{ik} равными соответствующим элементам заданной матрицы A. Очевидно, что так определенный оператор линеен и, кроме того, из (9.12) следует его единственность. Наконец, из определения матри-

цы линейного оператора в базисе $[e]$ следует, что матрица этого линейного оператора совпадает с A. #

Замечание 9.2. Таким образом, между линейными операторами $A \in L(V_n)$ и квадратными матрицами порядка n устанавливается взаимно однозначное соответствие в любом фиксированном базисе $[e]$.

Фиксируем в линейном пространстве V_n базис $[e]=[e_1, e_2, \dots, e_n]$. Пусть x – произвольный элемент V_n, $x=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ и пусть A – линейный оператор из $L(V_n)$. Предположим, что $y = Ax$ и $y=\sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$. Тогда в силу линейности оператора A и равенств (9.12) можно записать следующую цепочку равенств:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i e_i = y = Ax = A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k A e_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k a_{ik}\right) e_i, \text{ т.е. } \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k a_{ik}\right) e_i .$$

Отсюда в силу единственности разложения по базису получим

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{9.13}$$

Сопоставим каждому вектору $x \in V_n$ n-мерный вектор-столбец $\underset{\downarrow}{x}$, составленный из координат этого вектора в базисе $[e]$. Аналогично, каждому вектору $y = Ax \in V_n$ сопоставим n-мерный вектор столбец $\underset{\downarrow}{y}$, составленный из координат этого вектора в том же базисе $[e]$. Тогда связь между координатами вектора x и вектора $y = Ax$ можно записать в силу (9.13) матричным соотношением:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = A_e \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ или } [\underset{\downarrow}{y}] = A_e [\underset{\downarrow}{x}]. \tag{9.14}$$

Утверждение 9.7. Если два оператора A и B равны, то равны и их матрицы в любом базисе и обратно, если матрицы A_e и B_e линей-

ных операторов A и B равны в каком-нибудь базисе $[e]$, то и соответствующие им операторы A и B также равны.

Доказательство. Из определения равенства двух операторов имеем для любого базиса $[e]: Ae_k = Be_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда из единственности разложения по базису и определения матрицы линейного оператора получим $A_e = B_e$. Обратное утверждение следует из утверждение 9.6. #

В дальнейшем потребуется следующая важная

Лемма 9.1. Если для любого $[\underset{\downarrow}{x}] \in \mathbf{R}_n$ имеет место равенство

$$A[\underset{\downarrow}{x}] = B[\underset{\downarrow}{x}], \tag{9.15}$$

где A и B – квадратные матрицы порядка n, то

$$A = B.$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно в равенстве (9.15) взять $[\underset{\downarrow}{x}] = [e_k]' = [0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0]'$ (единица стоит на k-ом месте), $k = 1, 2, \dots, n$, и воспользоваться определением равенства матриц. #

Утверждение 9.8. Если $A \in L(V_n)$, $B \in L(V_n)$, а A_e и B_e – соответственно их матрицы в базисе $[e]$, то

1) $(A + B)_e = A_e + B_e$;

2) $(\lambda B)_e = \lambda B_e$ для любого $\lambda \in \mathbf{R}\,(\mathbf{C})$;

3) $(AB)_e = A_e B_e$;

4) если A – обратим, то $(A^{-1})_e = (A_e)^{-1}$.

Доказательство. 1) Согласно определению суммы операторов имеем $(A + B)x = Ax + Bx$ для любого $x \in V_n$. Записывая это равенство в матричном виде, получаем

$$(A+B)_e[\underset{\downarrow}{x}] = A_e[\underset{\downarrow}{x}] + B_e[\underset{\downarrow}{x}]$$

или

$$(A + B)_e[\underset{\downarrow}{x}] = (A_e + B_e)[\underset{\downarrow}{x}].$$

Воспользовавшись предыдущей леммой, получим

$$(A + B)_e = A_e + B_e;$$

2) из определения умножения оператора на число следует, что $(\lambda A)x = \lambda(Ax)$ для любого $x \in V_n$ или в матричной форме $(\lambda A)_e[\underset{\downarrow}{x}] = \lambda(A_e[\underset{\downarrow}{x}]) = \lambda A_e[\underset{\downarrow}{x}]$. Отсюда согласно лемме 9.1 имеем $(\lambda A)_e = \lambda A_e$;

3) из определения произведения двух операторов имеем:

$$(AB)\,x = A\,(Bx) \text{ для любого } x\in V_n.$$

Записывая это равенство в базисе $[e]$ в матричном виде, получаем: $(AB)_e[\underset{\downarrow}{x}] = A_e(B_e[\underset{\downarrow}{x}])$, или согласно ассоциативности умножения матриц $(AB)_e[\underset{\downarrow}{x}] = (A_eB_e)[\underset{\downarrow}{x}]$. Отсюда, воспользовавшись леммой 9.1, получим: $(AB)_e = (A_eB_e)$;

4) пусть оператор A обратим, т.е. существует оператор A^{-1} такой, что $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Отсюда, согласно утверждению 9.7 и п. 3 имеем

$$A_e(A^{-1})_e = (A^{-1})_e A_e = (I)_e = E.$$

Из этого равенства и определения обратной матрицы следует, что $(A_e)^{-1} = (A^{-1})_e$. #

<u>Следствие 9.2.</u> $\dim L(V_n) = n^2$.

Доказательство. Согласно утверждениям 9.6 и 9.8 пространство $L(V_n)$ изоморфно пространству квадратных матриц порядка n, размерность которого равна n^2. #

<u>Пример 9.13.</u> Пусть A – оператор поворота плоскости на угол φ, а $\vec e_1, \vec e_2$ – ОНБ на плоскости. Очевидно,

$$A\vec e_1 = \cos\varphi\,\vec e_1 + \sin\varphi\,\vec e_2,\quad A\vec e_2 = -\sin\varphi\,\vec e_1 + \cos\varphi\,\vec e_2.$$

Следовательно,

$$A_e = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

<u>Пример 9.14.</u> Пусть в трехмерном евклидовом пространстве V_3 геометрических векторов выбран ОНБ $\vec e_1$, $\vec e_2$, $\vec e_3$ и задан оператор A равенством: $A\vec x = [\vec x, \vec a]$, где $\vec a = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ – фиксированный вектор (координаты его заданы в базисе $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$). Тогда, очевидно,

$$A\vec e_1 = [\vec e_1, \alpha\vec e_1 + \beta\vec e_2 + \gamma\vec e_3] = \beta[\vec e_1, \vec e_2] + \gamma[\vec e_1, \vec e_3] = -\gamma\vec e_2 + \beta\vec e_3;$$

$$A\vec e_2 = [\vec e_2, \alpha\vec e_1 + \beta\vec e_2 + \gamma\vec e_3] = \alpha[\vec e_2, \vec e_1] + \gamma[\vec e_2, \vec e_3] = \gamma\vec e_1 - \alpha\vec e_3;$$

$$A\vec e_3 = [\vec e_3, \alpha\vec e_1 + \beta\vec e_2 + \gamma\vec e_3] = \alpha[\vec e_3, \vec e_1] + \beta[\vec e_3, \vec e_2] = -\beta\vec e_1 + \alpha\vec e_2.$$

Следовательно,

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

<u>Пример 9.15.</u> Пусть M_n – пространство многочленов степени $\le n-1$. Рассмотрим в нем оператор дифференцирования A:

$$AP(t) = \frac{d}{dt}[P(t)].$$

Выберем в пространстве M_n базис: $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2, \ldots$, $e_n = t^{n-1}$. Тогда $Ae_1 = 0$, $Ae_2 = 1 = e_1$, $Ae_3 = 2t = 2e_2, \ldots$, $Ae_n = (n-1)t^{n-2} = (n-1)e_{n-1}$. Следовательно, матрица оператора A в этом базисе имеет вид:

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

<u>Пример 9.16.</u> В пространстве $V = V' \oplus V''$ ($\dim V' = k$, $\dim V'' = n-k$) рассмотрим оператор проектирования пространства V на подпространство V' в направлении подпространства V''. Пусть e_1, $e_2, \ldots$, e_k, $e_{k+1}, \ldots$, e_n – произвольный базис пространства V, такой, что e_1, $e_2, \ldots$, e_k принадлежат подпространству V', т.е. e_1, $e_2, \ldots$, e_k – базис V', тогда, очевидно,

$$Ae_1 = e_1,\quad Ae_2 = e_2, \ldots,\quad Ae_k = e_k;$$

$$Ae_{k+1} = \theta,\quad Ae_{k+2} = \theta, \ldots,\quad Ae_n = \theta.$$

Следовательно,

$$A_e = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} k \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n-k \end{array}$$

§ 5. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат вектора при изменении базиса

Пусть в пространстве V_n фиксированы два базиса

$$[e]=[e_1, e_2,\dots, e_n] \text{ и } [\hat{e}]=[\hat{e}_1, \hat{e}_2,\dots, \hat{e}_n].$$

Разложим векторы $\hat{e}_1, \hat{e}_2,\dots, \hat{e}_n$ по базису $[e]$:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \dots + t_{n1}e_n; \\ \hat{e}_2 &= t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{n2}e_n; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \hat{e}_n &= t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \dots + t_{nn}e_n. \end{aligned} \tag{9.16}$$

Из коэффициентов этих разложений составим матрицу

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

Определение 9.6. Матрица T называется матрицей перехода от базиса $[e]$ к базису $[\hat{e}]$.

Равенство (9.16) с помощью матрицы T можно кратко записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \vdots \\ \hat{e}_n \end{bmatrix} = T' \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}, \tag{9.17}$$

где T' – матрица транспонированная к T.

Для построения матрицы T перехода от базиса $[e]$ к базису $[\hat{e}]$ необходимо векторы $\hat{e}_1, \hat{e}_2,\dots, \hat{e}_n$ разложить по базису $e_1, e_2,\dots, e_n$, тогда столбцами матрицы T являются координаты векторов $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2,\dots, \hat{e}_n$ в базисе $[e]$.

Замечание 9.3. Отметим, что $\det T$ всегда отличен от нуля (в противном случае столбцы матрицы T, а следовательно, и векторы $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2,\dots, \hat{e}_n$ линейно зависимы).

Далее возьмем произвольный элемент $x \in V_n$ и разложим его по векторам обоих базисов $[e]$ и $[\hat{e}]$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum \hat{x}\hat{e}.$$

Эти равенства можно записать в виде:

$$x = [x,\dots, x]\begin{bmatrix} e \\ \vdots \\ e \end{bmatrix} = [\hat{x},\dots, \hat{x}]\begin{bmatrix} \hat{e} \\ \vdots \\ \hat{e} \end{bmatrix}.$$

Отсюда согласно (9.17) имеем:

$$[x,\dots, x]\begin{bmatrix} e \\ \vdots \\ e \end{bmatrix} = [\hat{x},\dots, \hat{x}]\begin{bmatrix} \hat{e} \\ \vdots \\ \hat{e} \end{bmatrix} = [\hat{x},\dots, \hat{x}]\,T'\begin{bmatrix} e \\ \vdots \\ e \end{bmatrix}.$$

Транспонируя это равенство, получаем

$$[e,\dots, e]\begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{bmatrix} = [e,\dots, e]\,T\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \vdots \\ \hat{x} \end{bmatrix}.$$

Отсюда согласно единственности разложения по базису следует, что

$$\begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \vdots \\ \hat{x} \end{bmatrix} \text{ или } [\underset{\downarrow}{x}] = T\,[\underset{\downarrow}{\hat{x}}]. \tag{9.18}$$

Вывод 9.1. Если в V_n заданы два базиса $[e]$ и $[\hat{e}]$ с матрицей перехода T от «старого» базиса $[e]$ к «новому» базису $[\hat{e}]$, то

$$[\underset{\downarrow}{\hat{e}}] = T'[\underset{\downarrow}{e}] \text{ и } [\underset{\downarrow}{x}] = T[\underset{\downarrow}{\hat{x}}].$$

§ 5. Изменение матрицы оператора при изменении базиса

Пусть в линейном пространстве V_n задан линейный оператор A и два базиса $[e]=[e_1, e_2,\dots, e_n]$ и $[\hat{e}]=[\hat{e}_1, \hat{e}_2,\dots, \hat{e}_n]$. Обозначим через T матрицу перехода от базиса $[e]$ к базису $[\hat{e}]$, а через A_e и $A_{\hat{e}}$ – матрицы оператора A в базисах $[e]$ и $[\hat{e}]$ соответственно. Тогда, записывая равенство $y = Ax$ для произвольного x в матричном виде в базисах $[e]$ и $[\hat{e}]$ соответственно, получаем

$$[\underset{\downarrow}{y}] = A_e[\underset{\downarrow}{x}],\ [\underset{\downarrow}{\hat{y}}] = A_{\hat{e}}[\underset{\downarrow}{\hat{x}}],$$

где $[\underset{\downarrow}{x}]$ и $[\underset{\downarrow}{\hat{x}}]$ – координатные столбцы одного и того же вектора x соответственно в базисах $[e]$ и $[\hat{e}]$, а $[\underset{\downarrow}{y}]$ и $[\underset{\downarrow}{\hat{y}}]$ – координатные столбцы вектора y соответственно в базисах $[e]$ и $[\hat{e}]$. Из последних равенств согласно (9.18) получим

$$T[\underset{\downarrow}{\hat{y}}] = [\underset{\downarrow}{y}] = A_e[\underset{\downarrow}{x}] = A_e T[\underset{\downarrow}{\hat{x}}].$$

Отсюда

$$[\underset{\downarrow}{\hat{y}}] = T^{-1}A_e T[\underset{\downarrow}{\hat{x}}].$$

Так как $[\underset{\downarrow}{\hat{y}}] = A_{\hat{e}}[\underset{\downarrow}{\hat{x}}]$, то

$$A_{\hat{e}}[\underset{\downarrow}{\hat{x}}] = T^{-1}A_e T[\underset{\downarrow}{\hat{x}}].$$

Из этого равенства согласно лемме 9.1, так как x – произвольный, имеем

$$A_{\hat{e}} = T^{-1}A_e T. \qquad (9.19)$$

Вывод 9.2. Итак, при переходе от базиса $[e]$ к базису $[\hat{e}]$ с матрицей перехода T матрица линейного оператора изменяется по формуле (9.19).

Следствие 9.3. $\det A_{\hat{e}} = \det A_e$.

Так как определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса, то можно ввести понятие определителя оператора, положив $\det A = \det A_e$, где A_e – матрица линейного оператора в каком-нибудь базисе $[e]$.

§ 6. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Пусть A – оператор из $L(V_n)$. Число $\lambda \in \mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ – поле комплексных чисел) называется собственным значением оператора A, если существует ненулевой вектор $x \in V_n$, такой, что

$$Ax = \lambda x. \qquad (9.20)$$

Всякий вектор $x \neq \theta$, удовлетворяющий условию (9.20), называется собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ.

Утверждение 9.9. Если A_e – матрица линейного оператора A в произвольном базисе $[e] = [e_1, e_2, ..., e_n]$ пространства V_n, то многочлен $\det(A_e - \lambda E)$ не зависит от выбора базиса $[e]$.

Доказательство. Пусть $[e]$ и $[\hat{e}]$ – два произвольных базиса пространства V_n и T – матрица перехода от базиса $[e]$ к базису $[\hat{e}]$. Тогда согласно (9.19) имеем

$$A_{\hat{e}} - \lambda E = T^{-1}A_e T - \lambda T^{-1}T = T^{-1}(A_e - \lambda E)T$$

и следовательно,

$$\det(A_{\hat{e}} - \lambda E) = \det T^{-1}\det(A_e - \lambda E)\det T = \det(A_e - \lambda E), \text{ т.е.}$$

$$\det(A_{\hat{e}} - \lambda E) = \det(A_e - \lambda E).$$

Определение 9.7. Многочлен $P_n = \det(A_e - \lambda E)$ называется характеристическим многочленом оператора A. Уравнение $\det(A_e - \lambda E) = 0$ называется характеристическим уравнением.

Имеет место следующая важная

теорема 9.4. Для того чтобы число λ_0 было собственным значением оператора $A \in L(V_n)$, необходимо и достаточно, чтобы это число было корнем характеристического уравнения $\det(A_e - \lambda E) = 0$ оператора A, причем этому собственному числу соответствует $n - r$ линейно-независимых собственных векторов оператора A, где r равно рангу матрицы $A_e - \lambda_0 E$.

Доказательство. Условие, что вектор $x \in V_n$ – собственный, т.е. равенство (9.20) в матричной форме в базисе $[e]$ может быть записано в виде (9.14)

$$A_e[\underset{\downarrow}{x}] = \lambda[\underset{\downarrow}{x}]$$

или

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \qquad (9.21)$$

Необходимым и достаточным условием существования ненулевого решения однородной системы (9.21) является равенство нулю ее определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = \det(A_e - \lambda E) = 0. \qquad (9.22)$$

Поэтому корни уравнения (9.22) и только они являются собственными значениями оператора A (в действительном пространстве они действительны, в комплексном, вообще говоря, комплексные). Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Далее пусть λ_0 – собственное значение оператора A, т.е. корень характеристического уравнения (9.22). Подставляя λ_0 в систему (9.21), получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений с матрицей $A_e - \lambda_0 E$. Если ранг этой матрицы равен r, то соответствующая система имеет $n-r$ линейно независимых собственных векторов, отвечающих значению λ_0.

Итак, получено следующее правило для нахождения собственных векторов и собственных значений оператора A.

1. Составив характеристическое уравнение $\det(A_e - \lambda_0 E) = 0$, найдем все корни этого уравнения. Согласно предыдущей теореме они и будут собственными значениями оператора A.

2. Возьмем произвольное найденное собственное значение λ_0 оператора A. Подставив λ_0 в систему (9.21), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений для нахождения координат в базисе $[e]$ собственных векторов оператора A. Очевидно, что $n-r$ векторов $\underset{\downarrow}{x_1}, \underset{\downarrow}{x_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{x_{n-r}}$ $(r = Rang(A_e - \lambda_0 E))$, входящих в фундаментальную систему решений, указанной однородной системы и образуют линейно-независимые собственные векторы оператора A. Их линейная оболочка с исключением из нее нулевого вектора дает все собственные векторы, отвечающие собственному значению λ_0.

Перебрав таким способом все корни характеристического уравнения, найдем все собственные векторы оператора A.

Согласно основной теореме алгебры любой многочлен степени n $(n \geq 1)$ с комплексными коэффициентами имеет в поле комплексных чисел ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность. Напомним, что число λ_0 называется корнем многочлена

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

кратности s, если этот многочлен можно представить в виде $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^s P^*(\lambda)$, причем $P^*(\lambda_0) \neq 0$.

Если алгебраической кратностью собственного значения назвать его кратность как корня характеристического многочлена, то в комплексном линейном пространстве V_n размерности n любой оператор $A \in L(V_n)$ имеет n собственных значений (с учетом их алгебраической кратности). При этом существует хотя бы один собственный вектор.

Если собственному числу λ_0 соответствует p $(p \geq 1)$ линейно-независимых собственных векторов, то p называется геометрической кратностью собственного значения λ_0 оператора A. Если $p = 1$, то λ_0 называется простым собственным значением; если $p > 1$, то – кратным собственным значением.

На вопрос о том, как соотносятся между собой алгебраическая и геометрическая кратности собственного числа λ_0, дает ответ следующее

<u>утверждение 9.10.</u> Для любого оператора $A \in L(V_n)$ геометрическая кратность любого собственного значения λ_0 не превосходит его алгебраической кратности.

Доказательство. Пусть λ_0 – собственное значение оператора A алгебраической кратности s. Тогда характеристический многочлен $P_n(\lambda) = \det(A_e - \lambda E)$ оператора A можно представить в виде

$$P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^s P_{n-s}(\lambda), \qquad (9.23)$$

где $P_{n-s}(\lambda)$ – многочлен степени $n-s$ и $P_{n-s}(\lambda_0) \neq 0$. Далее пусть λ_0 имеет геометрическую кратность k. Согласно определению это означает, что имеется k линейно-независимых собственных векторов оператора A, отвечающих собственному значению λ_0. Обозначим их $e_1, e_2, \ldots, e_k$ и дополним их векторами $e_{k+1}, \ldots, e_n$ до базиса во всем пространстве V_n. В этом базисе матрица A_e оператора A, очевидно, имеет вид:

$$A_e = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & & \vdots & \\ & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & \lambda_0 & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & C \\ & 0 & & \vdots & \end{bmatrix},$$

где C – некоторая матрица порядка $n \times (n-k)$.

Тогда, как нетрудно заметить, $P_n(\lambda) = \det(A_e - \lambda E) = (\lambda - \lambda_0)^k \times \times P_{n-k}(\lambda)$, где $P_{n-k}(\lambda)$ – некоторый многочлен степени $n-k$. Следовательно, из (9.23) получаем $k \le s$. #

Замечание 9.4. Геометрическая кратность может быть и меньше алгебраической. Например, оператор $A \in L(V_2)$, задаваемый в базисе $[e] = [e_1, e_2]$ матрицей $A_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, имеет собственное значение $\lambda_0 = 1$, алгебраическая кратность которого равна 2, а геометрическая кратность равна 1.

§ 7. Инвариантное подпространство. Свойства собственных векторов линейного оператора

Пусть V – произвольное линейное пространство, A – линейный оператор, действующий в пространстве V.

Определение 9.8. Линейное подпространство $\tilde{V} \subseteq V$ называется инвариантным относительно оператора $A \in L(V)$, если для каждого вектора $x \in \tilde{V}$ вектор Ax также принадлежит $\tilde{V}$.

Тривиальными инвариантными подпространствами являются подпространство, состоящее только из нуля, и все пространство.

Утверждение 9.11. Образ $\operatorname{Im} A$ и ядро $Ker\,A$ оператора $A \in L(V)$ являются инвариантными подпространствами.

Доказательство. В самом деле, если $x \in \operatorname{Im} A$, то в силу определения $\operatorname{Im} A$ и $Ax \in \operatorname{Im} A$. Далее, если $x \in Ker\,A$, то и $Ax = \theta \in Ker\,A$. #

§ 8. Геометрическая интерпретация собственных векторов и собственных значений оператора A

Пусть A – линейный оператор, действующий в действительном линейном пространстве V_n и пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ $(k \le n)$ – линейно-независимые собственные векторы оператора A, отвечающие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ соответственно. Как уже отмечалось выше, $L(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ есть инвариантное подпространство относительно оператора A. Очевидно, для любого

$$x \in L(e_1, e_2, \ldots, e_k) \quad (x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_k e_k)$$

имеем
$$Ax = (\lambda_1 \xi_1) e_1 + (\lambda_2 \xi_2) e_2 + \ldots + (\lambda_k \xi_k) e_k$$

Таким образом, преобразование A в подпространстве

$$L(e_1, e_2, \ldots, e_k)$$

есть «растяжение» (понимаемое в широком смысле) по направлениям векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k$ с коэффициентами растяжения λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ соответственно. Отметим, что если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \lambda_0$, а $e_1, e_2, \ldots, e_k$ – базис из собственных векторов, то преобразование A в $L(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ есть преобразование подобия, т.е. каждый вектор $x \in L(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ растягивается в λ_0 раз.

Пример 9.17. Для нулевого и единичного операторов любой ненулевой вектор пространства V_n является собственным, отвечающим соответственно собственному числу $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$.

Пример 9.18. Пусть A – оператор поворота евклидовой плоскости на угол φ. Тогда согласно примеру 9.3 характеристический многочлен этого оператора имеет вид:

$$\det(A_e - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1,$$

где A_e – матрица оператора в ОНБ $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

Его $\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ корни комплексны, если φ не кратно π.

Следовательно, этот оператор, если φ не кратно π, не имеет вещественных собственных векторов. Отметим, что если $\varphi = 2\pi k$, то оператор тождественен и любой ненулевой вектор – собственный с $\lambda = 1$, если же $\varphi = (2k+1)\pi$, то каждый ненулевой вектор – собственный с $\lambda = -1$.

Пример 9.19. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве V_3 оператор A задан равенством: $A\vec{x}=[\vec{x},\vec{a}]$, где $\vec{a}$ – фиксированный вектор. Тогда согласно определению вектор $\vec{x}\neq\vec{0}$ является собственным, если существует такое число λ, что

$$[\vec{x},\vec{a}]=\lambda\vec{x}. \qquad (9.24)$$

Так как вектор $[\vec{x},\vec{a}]$ ортогонален вектору $\vec{x}$, то умножая скалярно последнее равенство, получаем $\lambda|\vec{x}|^2=0$. Следовательно, единственным вещественным собственным значением нашего оператора является $\lambda=0$. Из (9.24) получаем, что собственными векторами нашего оператора, отвечающими собственному значению $\lambda=0$, являются векторы, коллинеарные вектору $\vec{a}$.

Пример 9.20. Рассмотрим в пространстве $C^1[a,b]$ (множество функций, имеющих непрерывные на $[a,b]$ производные) оператор дифференцирования $A=\frac{d}{dt}$. Собственные векторы этого оператора находятся из равенства:

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x.$$

Решая это дифференциальное уравнение, находим, что $x=e^{\lambda t}$. Следовательно, любое вещественное число λ является собственным числом оператора $\frac{d}{dt}$. Каждому λ отвечает один собственный вектор $e^{\lambda t}$.

1. Свойства собственных векторов линейного оператора

Свойство 9.5. Если e – собственный вектор оператора $A\in L(V)$, отвечающий собственному значению λ, то для любого числа $\alpha\neq0$, αe – также собственный вектор оператора A, отвечающий тому же собственному значению λ.

Свойство 9.6. Если $e_1, e_2,\ldots, e_m$ – собственные векторы оператора $A\in L(V)$, то $L(e_1, e_2,\ldots, e_m)$ – линейная оболочка элементов $e_1, e_2,\ldots, e_m$ – есть инвариантное подпространство оператора A.

Свойство 9.7. Если некоторому собственному значению λ_0 отвечает k линейно-независимых собственных векторов $e_1, e_2,\ldots, e_k$, то любой ненулевой вектор x из линейной оболочки $L(e_1, e_2,\ldots, e_k)$ также является собственным вектором оператора A, отвечающим тому же собственному значению λ_0.

Свойство 9.8. (теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям). Если $e_1, e_2,\ldots, e_m$ – собственные векторы оператора $A\in L(V)$ и соответствующие им собственные значения $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_m$ попарно различны, т.е. $\lambda_i\neq\lambda_j$ при $i\neq j$, то $e_1, e_2,\ldots, e_m$ линейно независимы.

Доказательство. Свойство 9.5 следует из определения собственного вектора и линейности оператора A.

Свойство 9.6. Пусть $e_1, e_2,\ldots, e_m$ – собственные векторы оператора A, отвечающие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_m$, т.е. $Ae_k=\lambda_k e_k$, $k=1,2,\ldots,m$. Рассмотрим произвольный элемент $x\in L(e_1, e_2,\ldots, e_m)$. Из определения линейной оболочки $L(e_1, e_2,\ldots, e_m)$ следует, что элемент x можно представить в виде $x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_me_m$ ($(\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ – некоторые числа). Тогда, очевидно,

$$Ax=A\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_ke_k\right)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_kAe_k=\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k\lambda_k)e_k\in L(e_1, e_2,\ldots, e_m)$$

Свойство 9.7. Если $x\in L(e_1, e_2,\ldots, e_k)$, то согласно определению линейной оболочки существуют числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, такие, что $x=\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_ke_k$. Тогда указанное свойство следует из определения собственного вектора и цепочки равенств:

$$Ax=A(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ke_k)=\alpha_1Ae_1+\alpha_2Ae_2+\ldots+\alpha_kAe_k=$$
$$=\alpha_1\lambda_0e_1+\alpha_2\lambda_0e_2+\ldots+\alpha_k\lambda_0e_k=\lambda_0(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ke_k)=\lambda_0x.$$

Свойство 9.8. Доказательство этого свойства проведем методом математической индукции. Для $m=1$ утверждение очевидно. Пусть это свойство верно для $m-1$ векторов. Докажем его для m векторов. Предположим, что имеет место равенство:

$$\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_me_m=\theta. \qquad (9.25)$$

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор A, получаем

$$\alpha_1\lambda_1 e_1 + \alpha_2\lambda_2 e_2 + \ldots + \alpha_m\lambda_m e_m = \theta .$$

Вычитая из последнего равенства равенство (9.25), умноженное на λ_m, получаем

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_m)e_1 + \alpha_2(\lambda_2-\lambda_m)e_2 + \ldots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1}-\lambda_m)e_{m-1} = \theta .$$

В силу индуктивного предположения о линейной независимости $m-1$ векторов $e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}$ имеем

$$\alpha_i(\lambda_i-\lambda_m)=0, \quad i=1, 2, \ldots, m-1.$$

Так как $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то $\alpha_i = 0$, $i=1, 2, \ldots, m-1$. Отсюда и из (9.25) следует, что $\alpha_m = 0$, так как $e_m \neq \theta$. Итак, из равенства (9.25) получили $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Это означает, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ линейно независимы. Индукция проведена. #

Следствие 9.4. Если оператор $A \in L(V_n)$ имеет n попарно различных собственных значений, то соответствующие им собственные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют базис в пространстве V_n.

Доказательство. Из свойства 9.7 следует, что $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимы, а тогда они образуют базис в V_n, так как $n = \dim V_n$.#

§ 9. Приведение матрицы оператора к диагональному виду

Определение 9.9. Квадратная матрица $A=[a_{ij}]$ n-го порядка называется диагональной, если все ее элементы a_{ij} при $i \neq j$ равны нулю.

Утверждение 9.12. Если $e_1, e_2, \ldots, e_k$ – линейно-независимые собственные векторы оператора A ($Ae_j = \lambda_j e_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$), то матрица A_e оператора A в базисе $[e]=[e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n]$ имеет вид:

$$A_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 & \vdots & \\ & \ddots & & \vdots & A_{12} \\ 0 & & \lambda_k & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & & \vdots & A_{22} \end{bmatrix},$$

где A_{12} и A_{22} – некоторые матрицы порядков $k \times (n-k)$ и $(n-k)\times(n-k)$ соответственно.

Доказательство. Непосредственно следует из определения матрицы оператора A. #

Теорема 9.5. Матрица A_e оператора $A \in L(V_n)$ в базисе $[e]=[e_1, e_2, \ldots, e_n]$ имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда базисные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ являются собственными векторами оператора A. При этом матрица A_e в базисе из собственных векторов имеет вид:

$$A_e = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda n \end{bmatrix}, \tag{9.26}$$

где λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, – собственные значения оператора A:

$$Ae_j = \lambda_j e_j .$$

Доказательство. Достаточность. Если базис $[e]=[e_1, e_2, \ldots, e_n]$ состоит из собственных векторов оператора A, т.е. $Ae_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то согласно определению матрицы линейного оператора имеем

$$A_e = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda n \end{bmatrix},$$

т.е. A_e является диагональной.

Необходимость. Пусть матрица A_e линейного оператора A в данном базисе $[e]$ имеет вид (9.26). Тогда, очевидно, для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ $Ae_i = \lambda_i e_i$, т.е. $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – собственные векторы, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения оператора A. #

Теорема 9.6. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – различные собственные значения оператора $A \in L(V_n)$, то существует базис $[e]$, в котором матрица A_e оператора A имеет диагональный вид (9.26).

Доказательство. Действительно, согласно следствию 9.4 собственные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$, отвечающие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, образуют базис в пространстве V_n. Но тогда в этом базисе, в силу теоремы 9.5, матрица A_e оператора A имеет диагональный вид (9.26). #

Замечание 9.5. Обратное утверждение неверно. Например, для тождественного оператора I матрица A_e имеет вид:

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Она – диагональная, а собственные значения оператора $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 1$ – кратные. Можно дать еще один критерий, когда матрица линейного оператора может быть приведена к диагональному виду.

Теорема 9.7. Для того чтобы существовал базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, в котором матрица A_e линейного оператора A, действующего в комплексном пространстве V_n, имела бы диагональный вид необходимо и достаточно, чтобы для каждого собственного значения оператора A его алгебраическая кратность совпадала с геометрической.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, в котором матрица линейного оператора имеет диагональный вид (9.26). Очевидно, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – собственные векторы оператора A, отвечающие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогда характеристическая матрица оператора A имеет вид

$$A_e - \lambda E = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix}, \qquad (9.27)$$

а характеристический многочлен

$$P_n(\lambda) = \det(A_e - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda).$$

Если, например, λ_1 имеет алгебраическую кратность k_1, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{k_1}$; $\lambda_{k_1+1} \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq \lambda_1$, то на диагонали матрицы

(9.27) при $\lambda = \lambda_1$ первые k_1 элементов равны нулю, а остальные отличны от нуля, поэтому $Rang(A_e - \lambda E) = n - k_1$, а тогда согласно теореме 9.4 собственному значению λ_1 отвечает k_1 линейно независимых собственных векторов оператора A. Следовательно, алгебраическая и геометрическая кратность λ_1 совпадают.

Достаточность. Пусть для каждого собственного значения λ_i, $i = 1, 2, \ldots, s$ его алгебраическая кратность k_i совпадает с геометрической, т.е. каждому собственному значению λ_i соответствует k_i линейно-независимых собственных векторов. Эти векторы, очевидно, образуют базис в своей линейной оболочке L_i. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$L_i \cap L_j = \theta \text{ для любых } i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, s. \qquad (9.28)$$

Действительно, тогда, как легко видеть, объединение базисов подпространств L_i для всех $i = 1, 2, \ldots, s$ дает базис всего пространства V_n, так как $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$, причем полученный базис состоит из собственных векторов оператора A. В таком базисе, как известно (см. теорема 9.5), матрица оператора имеет диагональный вид (9.26).

Итак, перейдем к доказательству равенства (9.28). Предположим противное, т.е. что существует ненулевой вектор $a \in L_i \cap L_j$, $i \neq j$. Тогда согласно свойству 9.7 собственных векторов вектор a является собственным вектором оператора, отвечающим как собственному числу λ_i, так и λ_j, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$, что противоречит свойству 9.8 собственных векторов. Полученное противоречие доказывает равенство (9.28), а следовательно, и теорему в целом. #

§ 10. Практический способ приведения матрицы к диагональному виду

Пусть S – матрица перехода от «старого» базиса $[e] = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ к «новому» базису $[\hat{e}] = [\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n]$, состоящему из собственных векторов оператора $A \in L(V_n)$, т.е.

$$S = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n]$$
$$\quad\ \downarrow \quad \downarrow \qquad\ \downarrow$$

Теорема 9.8. Имеет место следующее равенство:

$$S^{-1}A_e S = \Lambda, \qquad (9.29)$$

где A_e – матрица оператора A в «старом» базисе $[e]$, а

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda n \end{bmatrix}$$

есть диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные значения оператора A.

Доказательство. Утверждение теоремы немедленно следует из теоремы 9.5 и формулы(9.19). #

Замечание 9.6. Матрицу S в (9.29) будем называть трансформирующей матрицу A_e к диагональному виду.

Пример 9.21. Для матрицы

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

как нетрудно проверить, собственными значениями являются $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$, а отвечающими им собственными векторами являются соответственно

$$\underset{\downarrow}{\vec{e}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{\vec{e}_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{\vec{e}_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица A_e приводится к диагональному виду и имеет в базисе из собственных векторов $\underset{\downarrow}{\vec{e}_1}, \underset{\downarrow}{\vec{e}_2}, \underset{\downarrow}{\vec{e}_3}$ следующий вид:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

а матрица S, трансформирующая исходную матрицу A_e к диагональному виду Λ, имеет вид:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задачи к главе 9

1) Доказать, что образ и ядро линейного оператора являются линейными подпространствами.

2) Найти образ и ядро линейного оператора в трехмерном евклидовом пространстве, заданного формулой: $A\vec{x} = [\vec{a}, [\vec{x}, \vec{b}]]$, где a и b заданные векторы в трехмерном пространстве ($[\vec{A}, \vec{B}]$ – векторное произведение векторов A и B).

3) Доказать, что существует единственный линейный оператор, переводящий векторы $\vec{a}_1 = (2, 0, 3)$, $\vec{a}_2 = (4, 1, 5)$, $\vec{a}_3 = (3, 1, 2)$ соответственно в $\vec{b}_1 = (1, 2, -1)$, $\vec{b}_2 = (4, 5, -2)$, $\vec{b}_3 = (1, -1, 1)$ и найти матрицу этого оператора в том же базисе, в котором заданы координаты всех векторов.

4) Даны две системы векторов в некотором базисе

$$\vec{x}_1 = (1, 3, 2), \ \vec{x}_2 = (-1, 2, 1), \ \vec{x}_3 = (0, 1, -1);$$

$$\vec{y}_1 = (1, 2, -1), \ \vec{y}_2 = (1, 2, -3), \ \vec{y}_3 = (-1, 0, 1)$$

Доказать, что каждая система векторов является также базисом и найти связь между этими базисами.

5) Линейный оператор A в базисе $\vec{a}_1 = (2, 0, 3)$, $\vec{a}_2 = (4, 1, 5)$, $\vec{a}_3 = (3, 1, 2)$ имеет матрицу

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе $\vec{b}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{b}_2 = (-1, 0, 1)$, $\vec{b}_3 = (0, 1, -1)$.

6) Доказать, что для невырожденности оператора A необходимо и достаточно, чтобы он не имел нулевых собственных значений (оператор A называется невырожденным, если его матрица A_e в

каком-нибудь (а значит и в любом) базисе $[e]$ невырождена, т.е. если $\det A_e \neq 0$).

7) Доказать, что если оператор A невырожден, то A и A^{-1} имеют одни и те же собственные векторы. Найти связи между собственными значениями этих операторов.

8) Доказать, что если x – собственный вектор оператора A, относящийся к собственному значению λ_0, то x будет собственным вектором для оператора $P_n(A)$, где $P_n(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ – произвольный многочлен степени n. Найти соответствующее собственное значение этого оператора.

9) Доказать, что если матрицы A и B подобны, то всякое собственное значение матрицы A, является также собственным значением матрицы B, и наоборот. Найти связь между собственными векторами матриц A и B. (Матрица A называется подобной матрице B, если существует невырожденная матрица T такая, что $A = T^{-1}BT$).

10) Найти характеристический многочлен оператора A трехмерного евклидова пространства: $A\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}]$, где a – фиксированный вектор.

11) Найти собственные значения и собственные вектора оператора A трехмерного евклидова пространства:

$A\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}]$, где a – фиксированный вектор.

12) Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

а) показать, что она приводится к диагональному виду;

б) вычислить A^n для n – целого и положительного.

Глава 10
БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 1. Линейные формы (функционалы)

1. Определение линейной формы (функционала) Сопряженное пространство и его размерность

Определение 10.1. Пусть V – линейное пространство. Линейной формой (линейным функционалом) над V называется линейный оператор f, отображающий V в комплексную плоскость C.

Множество линейных форм $L(V, C)$ над V само является линейным пространством (см. утверждение 9.3), которое обозначается V^* и называется сопряженным пространством к пространству V, т.е. по определению $V^* = L(V, C)$.

Справедлива следующая

Теорема 10.1 Пространство V_n^* сопряженное n-мерному линейному пространству V_n само имеет размерность n.

Доказательство. Пусть $[e] = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ – произвольный базис пространства V_n. Для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ определим в пространстве V_n функционалы $g_k(x)$ (достаточно определить их на базисных векторах) равенствами:

$$g_k(e_i) = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases} \tag{10.1}$$

Отметим, что для любого $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n \in V_n$ имеем

$$g_k(x) = g_k\left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_k(e_i) = x_k \text{, т.е.}$$

$$g_k(x) = x_k \tag{10.2}$$

Покажем, что так определенные функционалы $g_1, g_2, \ldots, g_n$ образуют базис в пространстве V_n^*. Этот базис называется биортогональным базисом к базису $[e]$.

Во-первых, эти функционалы линейно независимы. Действительно, пусть

$$\alpha_1g_1 + \alpha_2g_2 + \ldots + \alpha_ng_n = \theta.$$

Отсюда согласно определению равенства двух операторов следует, что $(\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2+\ldots+\alpha_n g_n)x=0$ для любого $x\in V_n$. Полагая в этом равенстве $x=e_k$, $k=1, 2,\ldots, n$, получаем, воспользовавшись (10.1), что $\alpha_k=0$, $k=1,2,\ldots,n$. Следовательно, функционалы $g_1, g_2,\ldots, g_n$ линейно независимы.

Во-вторых, для любого функционала $g\in V_n^*$ существуют числа $\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n$, такие, что

$$g=\beta_1 g_1+\beta_2 g_2+\ldots+\beta_n g_n. \tag{10.3}$$

Действительно, для любого $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\in V_n$ имеем

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i g(e_i)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i, \quad \text{где} \quad \beta_i=g(e_i).$$

Далее в силу (10.2) получаем

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i g_i(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i g_i\right)(x) \text{ для любого } x\in V_n.$$

Отсюда согласно определению равенства двух операторов имеем

$$g=\sum_{i=1}^{n}\beta_i g_i.$$

Итак, функционалы $g_1, g_2,\ldots, g_n$ линейно независимы и для любого $g\in V_n^*$ имеет место разложение (10.3). Следовательно, n элементов $g_1, g_2,\ldots, g_n$ образуют базис пространства V_n^* и поэтому $\dim V_n^*=n$. #

2. Координаты линейной формы в пространстве V_n и их изменение при изменении базиса

Пусть V_n – произвольное линейное пространство и в нем задан некоторый базис $[e]=[e_1, e_2,\ldots, e_n]$. Тогда для любого $x\in V_n$ $x=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n$, и любого линейного функционала $f\in V_n^*$ имеем:

$$f(x)=f(x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n)=x_1 f(e_1)+\ldots+x_n f(e_n)$$

или

$$f(x)=f_1x_1+f_2x_2+\ldots+f_nx_n, \tag{10.4}$$

где $f_k=f(e_k)$, $k=1,2,\ldots,n$.

Итак, доказано

<u>утверждение 10.1</u> Если $[e]=[e_1, e_2,\ldots, e_n]$ – произвольный базис пространства V_n, то для любого $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ значение линейной формы $f(x)$ имеет вид:

$$f(x)=f_1x_1+f_2x_2+\ldots+f_nx_n, \quad \text{где} \quad f_k=f(e_k).$$

Из формулы (10.4), как легко видеть, следует обратное

<u>утверждение 10.2</u> В заданном базисе $[e]=[e_1, e_2,\ldots, e_n]$ всяким n числам $f_1, f_2,\ldots, f_n$ отвечает линейная форма и притом только одна. #

<u>Замечание 10.1</u> Числа $f_1, f_2,\ldots, f_n$ называются координатами линейной формы f в биортогональном базисе.

Предположим, что в пространстве V_n заданы два произвольных базиса $[e]=[e_1, e_2,\ldots, e_n]$ и $[\hat e]=[\hat e_1, \hat e_2,\ldots, \hat e_n]$ и T – матрица перехода от базиса $[e]$ к $[\hat e]$. Тогда, как известно (см. гл. 9 п. 5), для любого вектора $x\in V_n$ имеет место равенство:

$$\begin{bmatrix} x\\ \downarrow\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} \hat x\\ \downarrow\end{bmatrix}, \tag{10.5}$$

где $\begin{bmatrix} x\\ \downarrow\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \hat x\\ \downarrow\end{bmatrix}$ – координатные столбцы вектора x в базисах $[e]$ и $[\hat e]$ соответственно. Значение произвольной линейной формы $f\in V_n^*$ на элементе $x\in V_n$ можно в базисе $[e]$ (утверждение 10.1) записать в виде $f(x)=f_1x_1+f_2x_2+\ldots+f_nx_n=[f_1, f_2,\ldots, f_n]\begin{bmatrix} x\\ \downarrow\end{bmatrix}$, где $f_k=f(e_k)$, $k=1,2,\ldots,n$. Аналогично, в базисе $[\hat e]$: $f(x)=[\hat f_1, \hat f_2,\ldots, \hat f_n]\begin{bmatrix} \hat x\\ \downarrow\end{bmatrix}$, где $\hat f_k=f(\hat e_k)$, $k=1,2,\ldots,n$. Из полученных двух соотношений следует, что

$$[\hat f_1, \hat f_2, \dots, \hat f_n]\begin{bmatrix}\hat x\\ \downarrow\end{bmatrix} = [f_1, f_2, \dots, f_n]\begin{bmatrix}x\\ \downarrow\end{bmatrix}$$

или согласно (10.5)

$$[\hat f_1, \hat f_2, \dots, \hat f_n]\begin{bmatrix}\hat x\\ \downarrow\end{bmatrix} = [f_1, f_2, \dots, f_n]T\begin{bmatrix}\hat x\\ \downarrow\end{bmatrix}.$$

Так как в этом равенстве вектор $\begin{bmatrix}\hat x\\ \downarrow\end{bmatrix}$ произвольный, то согласно лемме 9.1 имеем

$$[\hat f_1, \hat f_2, \dots, \hat f_n] = [f_1, f_2, \dots, f_n]T$$

или

$$\begin{bmatrix}\hat f_1\\ \hat f_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \hat f_n\end{bmatrix} = T'\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ f_n\end{bmatrix}. \qquad (10.6)$$

Вывод 10.1 Таким образом, при переходе от базиса $[e]$ к $[\hat e]$ координаты линейной формы f изменяются по формуле (10.6).

Замечание 10.2.

Координаты линейной формы при изменении базиса преобразуются по такому же закону, как и элементы базиса (9.17)

§ 2. Билинейные формы в вещественном пространстве

1. Определение билинейной формы и ее представление в вещественном пространстве

Определение 10.2. Пусть V – вещественное линейное пространство. Билинейной формой над V называется числовая функция $A(x,y)$ двух переменных $x, y \in V$, линейная по первому и второму аргументам, т.е. для любых $x, y, z \in V$ и любых вещественных чисел λ и μ имеют место равенства:

$$A(\lambda x + \mu y, z) = \lambda A(x, z) + \mu A(y, z);$$
$$A(x, \lambda y + \mu z) = \lambda A(x, y) + \mu A(x, z).$$

Пример 10.1 Если $f(x)$ и $g(y)$ – линейные формы в пространстве V, то их произведение $f(x)\,g(y)$, очевидно, есть билинейная форма.

Пример 10.2 В пространстве A^n функция $A(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}x_i y_j$, где x есть вектор $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а y – вектор $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, очевидно, является билинейной формой.

Пример 10.3 В пространстве $C[a,b]$, векторами которого являются непрерывные на $[a,b]$ функции, положим

$$A(f, g) = \int_a^b\int_a^b K(s,t)f(s)g(t)\,ds\,dt,$$

где $K(s,t)$ – некоторая фиксированная функция, непрерывная в квадрате $[a,b]\times[a,b]$. Нетрудно убедиться в том, что $A(f,g)$ линейна по первому и второму аргументу, т.е. $A(f,g)$ – билинейная форма.

Среди всех билинейных форм можно выделить следующие два подмножества.

Определение 10.3. Билинейная форма называется симметричной (кососимметричной), если для любых векторов $x, y \in V$:

$$A(x,y) = A(y,x) \quad (A(x,y) = -A(y,x)) \qquad (10.7)$$

Справедливо следующее

утверждение 10.3. Любую билинейную форму можно единственным образом представить в виде суммы симметричной и кососимметричной билинейных форм.

Доказательство Очевидно,

$$A(x,y) = \frac{1}{2}(A(x,y) + A(y,x)) + \frac{1}{2}((A(x,y) - A(y,x) = \qquad (10.8)$$
$$= A_1(x,y) + A_2(x,y)$$

Нетрудно убедиться, что $A_1(x,y) = \frac{1}{2}(A(x,y) + A(y,x))$ и $A_2(x,y) = \frac{1}{2}(A(x,y) - A(y,x))$ являются соответственно симметричной и кососимметричной билинейной формой. Осталось показать единственность представления (10.8). Предположим, что существует еще одно представление $A(x, y) = A_1'(x, y) + A_2'(x, y)$, где A_1' – симметричная, а A_2' – кососимметричная формы. Из последнего представления и (10.8) получим $A_1(x, y) - A_1'(x, y) = A_2'(x, y) - -A_2(x, y)$. Здесь слева стоит симметричная, а справа кососимметричная формы. Единственность представления (10.8) следует тогда из следующего очевидного утверждения: билинейная форма, являющаяся одновременно симметричной и кососимметричной, есть нулевая форма. #

Пусть в вещественном линейном пространстве V_n заданы базис $[e] = [e_1, e_2, ..., e_n]$ и билинейная форма $A(x, y)$. Найдем представление этой билинейной формы в данном базисе. Если

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i,$$

то $A(x, y) = A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right)$ или, в силу линейности по каждому аргументу,

$$A(x, y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_k y_i A(e_k, e_i) = \sum_{k,\, i=1}^{n} \alpha_{ki} x_k y_i, \qquad (10.9)$$

где $\alpha_{ki} = A(e_k, e_i)$. Обозначим

$$A_e = \begin{bmatrix} a11 & a12 & . & . & a1n \\ a21 & a22 & . & . & a2n \\ . & . & . & . & . \\ an1 & an2 & . & . & ann \end{bmatrix}$$

матрицу с элементами $\alpha_{ij} = A(e_i, e_j)$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

Определение 10.4. Матрица $A_e = [\alpha_{ij}]$ с элементами $\alpha_{ij} = = A(e_i, e_j)$, $i, j = 1, 2, ..., n$ называется матрицей билинейной формы в базисе $[e]$.

Равенство (10.9), как легко видеть, можно записать в следующем матричном виде:

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ \downarrow \end{bmatrix}' A_e \begin{bmatrix} y \\ \downarrow \end{bmatrix}, \qquad (10.10)$$

где $\begin{bmatrix} x \\ \downarrow \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} y \\ \downarrow \end{bmatrix}$ – координатные столбцы векторов x и y соответственно в базисе $[e]$, а $\begin{bmatrix} x \\ \downarrow \end{bmatrix}'$ – транспонированный столбец вектора x, т.е. координатная строка $\begin{bmatrix} x \\ \downarrow \end{bmatrix}' = [x_1, x_2, ..., x_n]$.

Итак, получили

Утверждение 10.4 Пусть в вещественном линейном пространстве V_n задан базис $[e]$. Тогда любая билинейная форма $A(x,y)$ над V_n может быть однозначно представлена в базисе $[e]$ следующим образом:

$$A(x,y) = \sum_{i,\, j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i y_j$$

или

$$A(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ \downarrow \end{bmatrix}' A_e \begin{bmatrix} y \\ \downarrow \end{bmatrix}. \#$$

Следствие 10.1 В фиксированном базисе $[e]$ между билинейными формами и матрицами A_e билинейных форм в этом базисе существует взаимно-однозначное соответствие, которое устанавливается равенством (10.9).

Доказательство 1. Согласно определению матрицы билинейной формы каждой билинейной форме в базисе $[e]$ ставится в соответствие единственная матрица.

2. Обратно, любой матрице $A = [\alpha_{ij}]$ $i, j = 1, 2, ..., n$, по формуле (10.9) ставится в соответствие единственная билинейная форма $A(x,y)$, матрицей которой в базисе $[e]$, очевидно, является заданная матрица A. #

Следствие 10.2. Билинейная форма $A(x,y)$ симметрична (кососимметрична) тогда и только тогда, когда ее матрица в произвольном базисе симметрична (кососимметрична).

Доказательство_1. Если $A(x,y)$ – симметрична (кососимметрична), то, полагая в (10.7) $x=e_i$, $y=e_j$, получаем $a_{ij}=a_{ji}$ $(a_{ij}=-a_{ji})$, т.е. матрица A_e – симметрична (кососимметрична)

2. Обратно, пусть матрица A_e билинейной формы $A(x,y)$ симметрична (кососимметрична), т.е. ее элементы a_{ij} удовлетворяют условиям: для любых $i,j=1,2,\dots,n$ $a_{ij}=a_{ji}$ $(a_{ij}=-a_{ji})$. Тогда из соотношения (10.9) и равенства $A(y,x) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ji}y_jx_i$ следует, что

$$A(x,y)=A(y,x) \quad (A(x,y)=-A(y,x)),$$

т.е. форма $A(x,y)$ – симметрична (кососимметрична). #

2. Преобразование матрицы билинейной формы при изменении базиса

Теорема 10.2. Пусть $[e]=[e_1,e_2,\dots,e_n]$ и $[\hat{e}]=[\hat{e}_1,\hat{e}_2,\dots,\hat{e}_n]$ два базиса пространства V_n и T – матрица перехода от базиса $[e]$ к базису $[\hat{e}]$. Тогда матрицы A_e и $A_{\hat{e}}$ билинейной формы $A(x,y)$ в базисах $[e]$ и $[\hat{e}]$ соответственно связаны между собой соотношением:

$$A_{\hat{e}}=T'A_eT, \tag{10.11}$$

где T' – транспонированная по отношению к T матрица.

Доказательство. Согласно (10.10) имеем, что билинейная форма $A(x,y)$ записывается в матричном виде в базисах $[e]$ и $[\hat{e}]$ соответственно следующим образом:

$$A(x,y)=\begin{bmatrix}x\\ \downarrow\end{bmatrix}' A_e \begin{bmatrix}y\\ \downarrow\end{bmatrix}, \quad A(x,y)=\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \downarrow\end{bmatrix}' A_{\hat{e}} \begin{bmatrix}\hat{y}\\ \downarrow\end{bmatrix},$$

где $\begin{bmatrix}x\\ \downarrow\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \downarrow\end{bmatrix}$ – координатные столбцы вектора x в базисах [e] и $[\hat{e}]$ соответственно, а $\begin{bmatrix}y\\ \downarrow\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}\hat{y}\\ \downarrow\end{bmatrix}$ – координатные столбцы вектора y соответственно в базисах $[e]$ и $[\hat{e}]$. Из двух последних равенств имеем:

$$\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \downarrow\end{bmatrix}' A_{\hat{e}} \begin{bmatrix}\hat{y}\\ \downarrow\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ \downarrow\end{bmatrix}' A_e \begin{bmatrix}y\\ \downarrow\end{bmatrix}.$$

Согласно (9.18) имеем $\begin{bmatrix}x\\ \downarrow\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \downarrow\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}y\\ \downarrow\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}\hat{y}\\ \downarrow\end{bmatrix}$:

Подставляя эти равенства в предыдущее соотношение, получаем:

$$\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \downarrow\end{bmatrix}' A_{\hat{e}} \begin{bmatrix}\hat{y}\\ \downarrow\end{bmatrix}=\left(T\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \downarrow\end{bmatrix}\right)' A_e\left(T\begin{bmatrix}\hat{y}\\ \downarrow\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \downarrow\end{bmatrix}' T'A_eT \begin{bmatrix}\hat{y}\\ \downarrow\end{bmatrix}.$$

Отсюда, воспользовавшись дважды леммой 9.1, получаем утверждение теоремы. #

§ 3. Квадратичные формы в вещественном пространстве

1 Основные понятия

Определение 10.5. Пусть $A(x,y)$ – симметричная билинейная форма. Функция $A(x,x)$, которая получается из $A(x,y)$, если положить $y=x$, называется квадратичной формой.

$A(x,y)$ называется билинейной формой, полярной к квадратичной форме $A(x,x)$.

Утверждение 10.5. Полярная форма $A(x,y)$ однозначно определяется своей квадратичной формой $A(x,x)$.

Доказательство. Из определения билинейной формы, очевидно, имеем

$$A(x+y,\,x+y)= A(x,\,x) +A\,(x,\,y) +A(y,\,x)+ A(y,\,y).$$

Отсюда в силу симметрии $A(x,y)$ получаем равенство:

$$A(x,y)=\frac{1}{2}\,[A(x+y,\,x+y)-A(x,x)-A(y,y)],$$

которое и доказывает наше утверждение. #

Следствие 10.3. Между квадратичными формами и симметричными билинейными формами существует взаимно однозначное соответствие.

Замечание 10.3. Квадратичная форма $A(x,x)$, полученная из произвольной, (не обязательно симметричной) билинейной формы

$A(x,y)$, может быть выведена и из симметричной билинейной формы. В самом деле, если $A(x,y)$ – произвольная билинейная форма, то, как легко видеть, билинейная форма

$$A_1(x,y)=\frac{1}{2}\,(A(x,y)+A(y,x)$$

симметрична и приводит при $x=y$ к той же квадратичной форме, что и $A(x,y)$.

Определение 10.6. Матрица A_e симметричной билинейной формы $A(x,y)$ называется матрицей соответствующей квадратичной форме $A(x,y)$ в базисе $[e]$.

Пусть $[e]=[e_1,e_2,...,e_n]$ – базис пространства V_n, тогда согласно утверждению 10.4 квадратичная форма в этом базисе может быть представлена следующим образом:

$$A(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j=\begin{bmatrix}x\\ \downarrow\end{bmatrix}' A_e\begin{bmatrix}x\\ \downarrow\end{bmatrix},$$

причем матрица A_e квадратичной формы в базисе $[e]$, в силу следствия 10.2 всегда симметрична.

Очевидно, что матрица квадратичной формы при переходе к новому базису преобразуется по такому же закону, что и матрица соответствующей полярной билинейной формы, т.е. по формуле (10.11). Следовательно, ранг матрицы квадратичной формы не меняется при переходе к новому базису, т.е. ранг матрицы квадратичной формы есть инвариант относительно преобразования базиса.

Определение 10.7. Число r, равное рангу матрицы A_e квадратичной формы A в некотором базисе $[e]$, называется рангом квадратичной формы.

Определение 10.8. Квадратичная форма $A(x,x)$, определенная в пространстве V_n, называется невырожденной если ранг квадратичной формы равен n – размерности пространства V_n; вырожденной, если ранг квадратичной формы меньше n.

2. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа

Теорема 10.3 (Лагранжа). Всякая квадратичная форма $A(x,x)$ в вещественном линейном пространстве V_n при помощи невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к диагональному (каноническому) виду

$$A(x,x)=\lambda_1\eta_1^2+\lambda_2\eta_2^2+...+\lambda_n\eta_n^2, \tag{10.12}$$

где $\lambda_1,...,\lambda_2,...,\lambda_n$ - вещественные числа, а $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$ – координаты вектора x в некотором новом базисе.

Доказательство. Проведем методом математической индукции. При $n=1$ утверждение теоремы очевидно: $A(x,x)$ при $n=1$ имеет вид: $A(x,x)=\alpha_{11}x_1^2=\lambda_1x_1^2$.

Предположим теперь, что $n\geq 2$ и для квадратичных форм от $n-1$ переменных теорема уже доказана.

Пусть $A(x,x)$ – квадратичная форма от n переменных, т.е. в первоначальном базисе $[e]$ имеет вид

$$A(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j\,. \tag{10.13}$$

Пользуясь предположением индукции, покажем, что ее можно привести к каноническому виду невырожденным линейным преобразованием n переменных.

Естественно предположить, что квадратичная форма $A(x,x)\neq 0$, так как в противном случае, она уже имеет канонический вид с каноническими коэффициентами $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$.

Покажем, что с помощью невырожденного преобразования переменных квадратичную форму можно преобразовать так, что коэффициент при квадрате первой координаты вектора x, т.е. α_{11}, будет отличен от нуля. Действительно, если в данном базисе $[e]$ коэффициент $\alpha_{11}\neq 0$, то искомое преобразование есть тождественное (очевидно, невырожденное). Если же $\alpha_{11}=0$, но при некотором $i\geq 2$ отличен от нуля коэффициент при x_i^2, т.е. $\alpha_{ii}\neq 0$, то в этом случае достаточно изменить нумерацию переменных, т.е. сделать преобразование вида

$$x_1 = y_i, \quad x_i = y_1, \quad x_k = y_k, \text{ при } k \neq 1, \quad k \neq i.$$

Это преобразование, очевидно, невырожденное. Остается рассмотреть случай, когда $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \ldots = \alpha_{nn} = 0$. Так как $A(x,x) \neq 0$, то квадратичная форма имеет хотя бы один ненулевой коэффициент. Пусть $\alpha_{ij} \neq 0 \ (i \neq j)$. Для сведения рассматриваемого случая к предыдущему достаточно сделать какое-нибудь невырожденное преобразование, в результате которого появился бы квадрат одной из переменных с ненулевым коэффициентом. Сделаем, например, преобразование

$$\begin{cases} x_k = y_k, & \text{при } k \neq i, \ k \neq j \\ x_i = y_i - y_j, & \\ x_j = y_i + y_j, & \end{cases}$$

детерминант которого, очевидно, равен 2 при $j > i$ и (-2) при $j < i$. Следовательно, это преобразование невырожденное. После выполнения преобразования получим

$$A = 2\alpha_{ij}(y_i - y_j)(y_i + y_j) +$$
$$+ \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} \sum_{\substack{s \neq i \\ s \neq j}} \alpha_{ks} y_k y_s = 2\alpha_{ij} y_i^2 - 2\alpha_{ij} y_j^2 + \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} \sum_{\substack{s \neq i \\ s \neq j}} \alpha_{ks} y_k y_s .$$

Таким образом, полученная квадратичная форма A содержит y_i^2 с коэффициентом $2\alpha_{ij}$ отличным от нуля; значит, как уже показано выше, существует невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму к виду, в котором коэффициент при квадрате первой координаты вектора x отличен от нуля.

Итак, будем считать, что в соотношении (10.13) коэффициент $\alpha_{11} \neq 0$. Выделим в выражении (10.13) ту группу слагаемых, которые содержат x_1:

$$A(x,x) = \alpha_{11} x_1^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + \ldots + 2\alpha_{1n} x_1 x_n + \sum_{i,j=2}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j .$$

Преобразуем правую часть этого равенства следующим образом:

$$A(x,x) = \alpha_{11}\left[x_1^2 + 2x_1\left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} x_2 + \ldots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} x_n \right)\right] + \sum_{i,j=2}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j =$$
$$= \alpha_{11}\left(x_1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} x_2 + \ldots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} x_n \right)^2 - \alpha_{11}\left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} x_2 + \ldots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} x_n \right)^2 +$$
$$+ \sum_{i,j=2}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j .$$

Обозначим

$$B(x,x) = \sum_{i,j=2}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j - \alpha_{11}\left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} x_2 + \ldots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} x_n \right)^2 .$$

Очевидно, $B(x,x)$ является квадратичной формой от $n-1$ переменной. Сделаем преобразование переменных

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 + \dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} x_2 + \ldots + \dfrac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} x_n, \\ \xi_k = x_k, \quad k = 2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

В нем новые переменные выражены через старые. Запишем это преобразование в привычном для нас виде, выражающем старые переменные через новые (см. гл. 9 п.5)

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 - \dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \xi_2 - \ldots - \dfrac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} \xi_n, \\ x_k = \xi_k, \quad k = 2, 3, \ldots, n. \end{cases} \tag{10.14}$$

Очевидно, что это преобразование невырожденное. После его выполнения квадратичная форма $A(x,x)$ примет вид:

$$A(x,x) = \alpha_{11}\xi_1^2 + B(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n).$$

По индуктивному предположению существует невырожденное преобразование:

$$\xi_2 = \alpha_{22}\eta_2 + \ldots + \alpha_{2n}\eta_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\xi_n = \alpha_{n2}\eta_2 + \ldots + \alpha_{nn}\eta_n,$$

приводящее квадратичную форму B к диагональному виду

$$B = \lambda_2\eta_2^2 + \ldots + \lambda_n\eta_n^2 .$$

Для нашей исходной квадратичной формы $A(x,x)$ за преобразованием (10.14) выполним следующее преобразование переменных:

$$\begin{cases} \xi_1 = \eta_1, \\ \xi_2 = \alpha_{22}\eta_2 + \ldots + \alpha_{2n}\eta_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n = \alpha_{n2}\eta_2 + \ldots + \alpha_{nn}\eta_n. \end{cases} \tag{10.15}$$

Определитель этого преобразования

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & . & . & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \alpha_{n2} & . & . & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \alpha_{22} & . & . & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n2} & . & . & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Следовательно, преобразование (10.15) невырожденное После выполнения этого преобразования квадратичная форма $A(x,x)$ примет канонический вид:

$$A(x,x) = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \ldots + \lambda_n\eta_n^2.$$

Таким образом, после выполнения конечного числа невырожденных линейных преобразований, которое можно заменить одним невырожденным преобразованием – их произведением (следует из определения произведения операторов и свойств 3 утверждения 9.8), первоначальную квадратичную форму (10.13) приведем к каноническому виду. #

Замечание 10.4. Метод доказательства теоремы дает также конструктивный метод приведения квадратичной формы к каноническому виду. В доказательстве выделили только один квадрат линейного выражения и сослались затем на предположение индукции. В конкретном примере для приведения квадратичной формы к каноническому виду необходимо процесс выделения квадратов продолжать до тех пор, пока не придем к форме с нулевыми коэффициентами, или к форме от одной переменной.

Замечание 10.5. Согласно теореме Лагранжа можно найти невырожденное линейное преобразование координат $\begin{bmatrix} x \\ \downarrow \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} \eta \\ \downarrow \end{bmatrix}$ с матрицей преобразования C ($\begin{bmatrix} x \\ \downarrow \end{bmatrix}$ – старые, а $\begin{bmatrix} \eta \\ \downarrow \end{bmatrix}$ – новые координаты

вектора x), приводящее квадратичную форму к каноническому виду (10.12). Тогда согласно (9.18) матрица C является матрицей перехода от старого (заданного) базиса $[e]$ к новому базису $[e']$, в котором квадратичная форма имеет канонический вид (10.12). Этот базис находится по формулам (9.17).

Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называется каноническим. Нетрудно заметить, что канонический базис определен неоднозначно и в общем случае не является ортонормированным.

Согласно этому замечанию, теорему Лагранжа можно сформулировать иначе: для каждой квадратичной формы, определенной в пространстве V_n, существует канонический базис.

3. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Якоби

Пусть в пространстве V_n задана квадратичная форма $A(x,x)$. Рассмотрим матрицу

$$A_e = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

квадратичной формы в базисе $[e] = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$. Введем так называемые главные миноры матрицы A_e

$$d_0 = 1,\ d_1 = \alpha_{11},\ d_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \ldots, d_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{10.16}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 10.4 (Якоби). Пусть в базисе $[e] = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ линейного пространства V_n квадратичная форма $A(x,x)$ имеет вид:

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k.$$

Пусть далее все главные миноры (10.16) матрицы A_e квадратичной формы A отличны от нуля. Тогда существует базис $[\hat{e}]=[\hat{e}_1, \hat{e}_2,..., \hat{e}_n]$, в котором квадратичная форма $A(x,x)$ приводится к каноническому виду:

$$A(x,x)=\frac{1}{d_1}\xi_1^2+\frac{d_1}{d_2}\xi_2^2+...+\frac{d_{n-1}}{d_n}\xi_n^2,$$

где $\xi_1, \xi_2,..., \xi_n$ – координаты вектора x в базисе $[\hat{e}]$.

Доказательство. Будем искать базисные векторы $\hat{e}_1, \hat{e}_2,..., \hat{e}_n$ в следующем виде:

$$\begin{cases}\hat{e}_1=a_{11}e_1,\\ \hat{e}_2=a_{12}e_1+a_{22}e_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \hat{e}_n=a_{1n}e_1+a_{2n}e_2+...+a_{nn}e_n.\end{cases} \tag{10.17}$$

Неизвестные коэффициенты a_{ik} будем искать из условий:

$$A(e_j,\hat{e}_k)=\begin{cases}0, & j<k\\ 1, & j=k\end{cases} \text{ для любого } k=1, 2,..., n. \tag{10.18}$$

Прежде чем находить коэффициенты треугольного преобразования (10.17), покажем, что в базисе $[\hat{e}]$, определяемом формулами (10.17) и удовлетворяющем условиям (10.18), квадратичная форма $A(x,x)$ действительно имеет диагональный вид. В самом деле, согласно определению матрицы квадратичной формы в базисе $[\hat{e}]$ имеем, воспользовавшись (10.18) для любого $j=1, 2,..., k$

$$\hat{\alpha}_{jk}=A(\hat{e}_j,\hat{e}_k)=A(a_{1j}e_1+a_{2j}e_2+...+a_{jj}e_j,\hat{e}_k)=$$

$$=a_{1j}A(e_1,\hat{e}_k)+a_{2j}A(e_2,\hat{e}_k)+...+a_{jj}A(e_j,\hat{e}_k)=\begin{cases}0, & j<k\\ a_{kk}, & j=k\end{cases}.$$

Отметим, что в силу симметрии матрицы квадратичной формы коэффициенты $\hat{\alpha}_{jk}$ при $j>k$ также равны нулю. Таким образом, в базисе (10.17) матрица квадратичной формы действительно имеет диагональный вид, при этом диагональные элементы $\hat{\alpha}_{kk}=a_{kk}$, $k=1, 2,..., n$.

Для доказательства теоремы необходимо показать, что из условий (10.18) коэффициенты a_{jk} треугольного преобразования (10.17) однозначно определяются и что $a_{kk}=\frac{d_{k-1}}{d_k}$, $k=1, 2,..., n$, где $d_0=1$. Для этого, используя (10.17), на основании условий (10.18) запишем для определения искомых коэффициентов $a_{1k}, a_{2k},..., a_{kk}$ для любого $k=1, 2,..., n$ систему уравнений:

$$\begin{cases}\alpha_{11}a_{1k}+\alpha_{12}a_{2k}+...+\alpha_{1k}a_{kk}=0,\\ \alpha_{21}a_{1k}+\alpha_{22}a_{2k}+...+\alpha_{2k}a_{kk}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_{k1}a_{1k}+\alpha_{k2}a_{2k}+...+\alpha_{kk}a_{kk}=1.\end{cases}$$

Определитель этой системы совпадает с d_k и в силу предположения теоремы отличен от нуля. Поэтому решение нашей системы $a_{1k}, a_{2k},..., a_{kk}$ для любого $k=1, 2,..., n$ существует, и при этом, согласно теореме Крамера

$$a_{kk}=\frac{d_{k-1}}{d_k},\quad k=1, 2,..., n.$$

Для доказательства теоремы необходимо показать, что векторы $\hat{e}_1, \hat{e}_2,..., \hat{e}_n$ из (10.17) с коэффициентами a_{jk}, найденными по схеме, которая приведена выше, образуют базис пространства V_n. Но это следует из того, что определитель D матрицы преобразования (10.17), как легко видеть, отличен от нуля. Действительно,

$$D=a_{11}a_{22},..., a_{nn}=\frac{1}{d_1}\frac{d_1}{d_2},...,\frac{d_{n-1}}{d_n}=\frac{1}{d_n}\neq 0. \ \#$$

§ 4. Закон инерции квадратичных форм

Пусть в действительном линейном пространстве V_n дана квадратичная форма $A(x,x)$ ранга k. Из теоремы Лагранжа следует, что эту квадратичную форму можно привести к виду:

$$A(x,x)=\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+...+\lambda_n\xi_n^2, \text{ где } \lambda_1\lambda_2...\lambda_k\neq 0.$$

Тогда с помощью следующего невырожденного линейного преобразования координат

$$\eta_1=\sqrt{|\lambda_1|}\,\xi_1,\ \eta_2=\sqrt{|\lambda_2|}\,\xi_2,...,\ \eta_k=\sqrt{|\lambda_k|}\,\xi_k,\ \ \eta_{k+1}=\xi_{k+1},..., \eta_n=\xi_n$$

квадратичную форму $A(x,x)$ приводим к виду:

$$A(x,x) = \varepsilon_1\eta_1^2 + \varepsilon_2\eta_2^2 + \ldots + \varepsilon_n\eta_n^2, \qquad (10.19)$$

где ε_i принимают значения 1, 0, –1, который называется нормальным видом квадратичной формы.

Квадратичная форма может быть приведена к нормальному виду многими различными преобразованиями, однако, с точностью до нумерации неизвестных она приводится только к одному нормальному виду. Это показывает следующая

Теорема 10.5 (закон инерции действительных квадратичных форм). Число положительных коэффициентов в представлении (10.19), называемых положительным индексом инерции, число отрицательных коэффициентов, называемых отрицательным индексом инерции, и число нулевых коэффициентов, называемых дефектом квадратичной формы, являются инвариантом квадратичной формы, т.е. не зависят от базиса, в котором данная квадратичная форма принимает нормальный вид.

Доказательство. Предположим, что существуют два базиса, в которых квадратичная форма $A(x,x)$ имеет канонический вид, т.е.

$$A(x,x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_p^2 - (\xi_{p+1}^2 + \ldots + \xi_{p+q}^2) \qquad (10.20)$$

в базисе $[e] = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ и

$$A(x,x) = \hat{\xi}_1^2 + \hat{\xi}_2^2 + \ldots + \hat{\xi}_{\hat{p}}^2 - (\hat{\xi}_{\hat{p}+1}^2 + \ldots + \hat{\xi}_{\hat{p}+\hat{q}}^2) \qquad (10.21)$$

в базисе $[\hat{e}] = [\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n]$.

Очевидно, для доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости равенств $p = \hat{p}$ и $q = \hat{q}$.

Предположим, что $p \neq \hat{p}$, например, $p > \hat{p}$. Рассмотрим пространство $L_1 = L(e_1, \ldots, e_p)$ – линейную оболочку векторов $e_1, e_2, \ldots, e_p$ и пространство $L_2 = L(\hat{e}_{\hat{p}+1}, \ldots, \hat{e}_n)$ – линейную оболочку векторов $\hat{e}_{\hat{p}+1}, \ldots, \hat{e}_n$. Очевидно, $\dim L_1 = p$, а $\dim L_2 = n - \hat{p}$. Так как $p + n - \hat{p} > n$, то согласно теореме 7.7 $\dim(L_1 \cap L_2) > 0$, и, следовательно, существует ненулевой вектор $x_0 \in L_1 \cap L_2$. Так как $x_0 \in L_1$, то

$$x_0 = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_p e_p. \qquad (10.22)$$

Точно так же $x_0 \in L_2$ и

$$x_0 = \hat{\xi}_{\hat{p}+1}\hat{e}_{\hat{p}+1} + \ldots + \hat{\xi}_n\hat{e}_n. \qquad (10.23)$$

Так как вектор $x_0 \neq 0$, то из (10.20) и (10.22) имеем

$$A(x_0, x_0) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_p^2 > 0,$$

а с другой стороны, из (10.21) и (10.23) имеем

$$A(x_0, x_0) = -(\hat{\xi}_{\hat{p}+1}^2 + \ldots + \hat{\xi}_n^2) < 0.$$

Приходим к противоречию, следовательно, неравенство $p > \hat{p}$ невозможно. Точно так же доказывают невозможность неравенств

$$p < \hat{p}, \quad q > \hat{q}, \quad q < \hat{q}. \#$$

§ 5. Знакоопределенные, знакопеременные и квазиопределенные квадратичные формы

Определение 10.9. Вещественная квадратичная форма $A(x,x)$, определенная в вещественном линейном пространстве V_n, называется

1) положительно определенной, если для любого $x \neq 0$,
$$A(x,x) > 0;$$

2) отрицательно определенной, если для любого $x \neq 0$,
$$A(x,x) < 0;$$

3) знакопеременной, если существуют такие элементы $x' \neq 0$ и $x'' \neq 0$, что
$$A(x',x') > 0, \text{ а } A(x'', x'') < 0;$$

4) квазиположительно определенной, если для всех $x \in V_n$ $A(x,x) \geq 0$, но существует элемент $x' \neq 0$ такой, что $A(x',x') = 0$;

5) квазиотрицательно определенной, если для всех $x \in V_n$ $A(x,x) \leq 0$, но существует элемент $x' \neq 0$ такой, что $A(x',x') = 0$;

Положительно (отрицательно) определенные квадратичные формы называются также определенными, а квазиположительно (квазиотрицательно) определенные квадратичные формы называются также квазизнакоопределенными.

Обозначим p – число положительных (положительный индекс инерции), а q – число отрицательных слагаемых (отрицательный индекс инерции) в представлении (10.19) квадратичной формы $A(x,x)$. Тогда имеет место следующая

Теорема 10.6. Вещественная квадратичная форма $A(x,x)$ является

1) положительно определенной $\Leftrightarrow$ $p=n$, $q=0$;

2) отрицательно определенной $\Leftrightarrow$ $p=0$, $q=n$;

3) знакопеременной $\Leftrightarrow$ $p\neq 0$ и $q\neq 0$;

4) квазиположительно определенной $\Leftrightarrow$ $p<n$, $q=0$;

5) квазиотрицательно определенной $\Leftrightarrow$ $p=0$, $q<n$.

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть квадратичная форма $A(x,x)$ положительно определена. Тогда она может быть приведена к нормальному виду

$$A(x,x)=\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_p^2-\xi_{p+1}^2-\ldots-\xi_{p+q}^2. \qquad (10.24)$$

Если при этом $p<n$, то из последнего выражения следует, что для ненулевого вектора x с координатами $\xi_1=\xi_2=\ldots=\xi_p=0$, $\xi_{p+1}\neq 0,\ldots,\xi_{p+q}\neq 0$

$$A(x,x)=\begin{cases}0, & -\text{ при } q=0\\ <0, & -\text{ при } q\neq 0\end{cases}$$

а это противоречит определению положительно определенной квадратичной формы.

Достаточность. Пусть $p=n$. Тогда соотношение (10.24) примет вид $A(x,x)=\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2$. Ясно, что $A(x,x)>0$ для любого $x\neq 0$. Следовательно, $A(x,x)$ – положительно определенная квадратичная форма.

Доказательство пп. 2)–5) теоремы проводят аналогичным образом. #

§ 6. Критерий Сильвестра (знакоопределенности квадратичной формы)

Пусть $A(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\begin{bmatrix}x\\ \downarrow\end{bmatrix}' A_e\begin{bmatrix}x\\ \downarrow\end{bmatrix}$ есть квадратичная форма с матрицей A_e, заданная в евклидовом пространстве V_n. Обозначим $d_1,d_2,\ldots,d_n$ – главные миноры (10.16) матрицы A_e. Тогда имеет место следующая

Теорема 10.7. 1. Квадратичная форма $A(x,x)$, положительно определенная тогда и только тогда, когда все главные миноры ее матрицы положительны, т.е. когда для любого $k=1,2,\ldots,n$ $d_k>0$;

2. Квадратичная форма $A(x,x)$, отрицательно определенная тогда и только тогда, когда знаки главных миноров ее матрицы чередуются, причем $d_1<0$, т.е. когда для любого $k=1,2,\ldots,n$ $(-1)^k d_k>0$.

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть форма $A(x,x)$ положительно определена. Покажем, прежде всего, что для любого $k=1,2,\ldots,n$ $d_k\neq 0$. Предположим, что это не так, т.е. что для некоторого m $(1\le m\le n)$ $d_m=0$. Рассмотрим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mm}x_m=0.\end{cases}$$

Она имеет нетривиальное решение $x_1^\circ, x_2^\circ,\ldots,x_m^\circ$, так как $d_m=0$, т.е. для всех $k=1,2,\ldots,m$;

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ik}x_i^\circ=0. \qquad (10.26)$$

Умножая каждое равенство (10.26) на x_k° и складывая все полученные соотношения, получаем

$$\sum_{i,k=1}^{m}a_{ik}x_i^\circ x_k^\circ=0.$$

Левая часть этого равенства, очевидно, представляет собой значение квадратичной формы $A(x,x)$ для ненулевого вектора $x^\circ=(x_1^\circ,\ldots,x_m^\circ,0,\ldots,0)$. Это значение $A(x^\circ,x^\circ)$ равно нулю, что противоречит положительной определенности квадратичной формы $A(x,x)$. Следовательно, для любого $k=1,2,\ldots,n$ $d_k\neq 0$. Далее, приводя квадратичную форму к каноническому виду методом Якоби, получаем

$$A(x,x)=\frac{d_0}{d_1}\xi_1^2+\frac{d_1}{d_2}\xi_2^2+\ldots+\frac{d_{n-1}}{d_n}\xi_n^2,\quad (d_0=1) \tag{10.27}$$

для любого $x\in V_n$. Возьмем $x_0=e_k=(0,0,\ldots,1,0,\ldots,0)$, $k=1,2,\ldots,n$. Тогда получим $A(x_0,x_0)=\dfrac{d_{k-1}}{d_k}>0$. Далее, заставляя k пробегать все значения от 1 до n, получаем, что $d_k>0$ для любого $k=1,2,\ldots,n$.

Достаточность. Так как $d_k>0$ для любого $k=1,2,\ldots,n$, то, приводя квадратичную форму к каноническому виду (10.27) методом Якоби, получаем, что $A(x,x)>0$ для любого $x\neq 0$.

2. Утверждение этого пункта теоремы непосредственно следует из п.1 настоящей теоремы. Действительно, квадратичная форма $A(x,x)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда $(-1)\,A(x,x)$ положительно определена. Очевидно, матрицей квадратичной формы $(-1)\,A(x,x)$ в базисе $[e]$ является матрица $(-A_e)$, где A_e – матрица формы $A(x,x)$ в том же базисе. Из п.1 настоящей теоремы имеем $(-A(x,x))$ положительно определена тогда и только тогда, когда $(-1)^k\,d_k>0$. #

§ 7. Полуторалинейная (билинейная) форма в унитарном (евклидовом) пространстве

Пусть V есть унитарное пространство.

Определение 10.10. Комплекснозначная функция $B(x,y)$ называется полуторалинейной формой в комплексном линейном пространстве V, если для любых элементов $x,y,z\in V$ и любых комплексных чисел α и β справедливы равенства:

1) $B(\alpha x+\beta y,z)=\alpha B(x,z)+\beta B(y,z)$ – линейность по первому аргументу;

2) $B(x,\alpha y+\beta z)=\bar\alpha B(x,y)+\bar\beta B(x,z)$ – антилинейность по второму аргументу.

Пусть V – n-мерное пространство и $[e]=[e_1,e_2,\ldots,e_n]$ – базис этого пространства, тогда для любых $x=\sum_{j=1}^{n}x_je_j$ и $y=\sum_{k=1}^{n}y_ke_k$ полуторалинейная форма $B(x,y)$ может быть записана в виде:

$$B(x,y)=B\left(\sum_{j=1}^{n}x_je_j,\sum_{k=1}^{n}y_ke_k\right)=\sum_{j,\,k=1}^{n}x_j\bar y_kB(e_j,e_k)=$$
$$=\sum_{j,\,k=1}^{n}b_{jk}x_j\bar y_k=\begin{bmatrix}\hat x\\ \downarrow\end{bmatrix}^t B_e\begin{bmatrix}\bar y\\ \downarrow\end{bmatrix}. \tag{10.28}$$

Определение 10.11. Полуторалинейная форма $B(x,y)$ называется эрмитовой, если $B(x,y)=\overline{B(y,x)}$ для любых $x,y\in V$.

Определение 10.12 Матрица $A=[a_{ij}]$ $i,j=1,2,\ldots,n$, с комплексными элементами называется эрмитовой, если $a_{ij}=\bar a_{ji}$ для всех $i,j=1,2,\ldots,n$ (иначе $A=\bar A'$). Справедливо следующее

утверждение 10.6 Полуторалинейная форма $B(x,y)$ эрмитова тогда и только тогда, когда матрица ее B_e в каком-нибудь базисе $[e]$ эрмитова.

Доказательство. Необходимость. Пусть $B(x,y)$ – эрмитова полуторалинейная форма, т.е. $B(x,y)=\overline{B(y,x)}$ для любых $x,y\in V$. Тогда для любых $i,j=1,2,\ldots,n$

$$b_{ij}=B(e_i,e_j)=\overline{B(e_j,e_i)}=\bar b_{ji}.$$

Следовательно, согласно определению матрица $B_e=[b_{ij}]$ эрмитовой формы $B(x,y)$ эрмитова.

Достаточность. Пусть $B_e=\bar B_e'$, иначе для любых $i,j=1,2,\ldots,n$ $b_{ij}=\bar b_{ji}$. Тогда согласно (10.28) для любых $x,y\in V$ имеем

$$B(x,y)=\sum_{j,k=1}^{n}b_{jk}x_j\bar y_k=\sum_{j,k=1}^{n}\bar b_{kj}\bar y_kx_j=\sum_{j,k=1}^{n}\overline{b_{kj}y_k\bar x_j}=\overline{B(y,x)},$$

т.е. $B(x,y)$ – эрмитова форма. #

Определение 10.13 Квадратичная форма $B(x,x)$ в унитарном пространстве V называется эрмитовой, если соответствующая ей полуторалинейная форма $B(x,y)$ эрмитова.

Эрмитова квадратичная форма $B(x,x)$ называется положительно определенной, если для любого $x\neq 0$ $B(x,x)>0$. Заметим, что $B(x,x)$ – вещественное число, так как $B(x,x)=\overline{B(x,x)}$.

§ 8. Введение скалярного произведения с помощью полуторалинейной формы

Пусть в унитарном пространстве V задана эрмитова полуторалинейная форма $B(x,y)$, причем соответствующая ей квадратичная форма $B(x,x)$ положительно определенная. Тогда в этом пространстве можно ввести скалярное произведение любых двух элементов x и y, полагая $(x,y)=B(x,y)$. Все свойства скалярного произведения, введенного по этой формуле, как нетрудно проверить, легко следуют из свойств формы $B(x,y)$ (эрмитовости, билинейности и положительной определенности соответствующей квадратичной формы).

Верно и обратное предложение, т.е. если V – унитарное линейное пространство, то скалярное произведение (x,y) есть эрмитова полуторалинейная форма, причем (x,x) – эрмитова положительно определенная квадратичная форма.

§ 9. Представление линейной и полуторалинейной формы в унитарном пространстве

9.1. Общий вид линейного функционала в конечномерном унитарном пространстве

Утверждение 10.7 Для любой линейной формы $f(x)$, определенной в унитарном пространстве V_n, существует единственный элемент $h \in V_n$, такой, что

$$f(x)=(x,\, h).$$

Доказательство. Выберем в пространстве V_n некоторый ОНБ $[e]=[e_1, e_2,..., e_n]$. Пусть $x=\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ – любой элемент из V_n. Тогда, очевидно,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} x_k\, f(e_k).$$

Возьмем за k-тую координату $(k=1, 2,..., n)$ вектора h число $h_k=\overline{f(e_k)}$. Тогда $f(x)=\sum_{k=1}^{n} x_k\, f(e_k)=\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{h}_k=(x,h)$. Здесь было

использовано выражение скалярного произведения в ОНБ через координаты перемножаемых векторов (см. гл. 9, п.4).

Покажем единственность вектора h, удовлетворяющего условию утверждения. Пусть $\hat{h}$ – другой такой вектор, т.е. для любого $x \in V_n$

$$f(x)=(x,\, h)=(x,\, \hat{h}).$$

Отсюда следует равенство $(x,\, h-\hat{h})=0$ для любого $x \in V_n$. Если в этом равенстве взять $x=h-\hat{h}$, то получим $(h-\hat{h},\, h-\hat{h})=0$. Откуда согласно аксиомам скалярного произведения $((y,\, y)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y=\theta)$ имеем $h-\hat{h}=\theta$ или $h=\hat{h}$. #

2. Представление полуторалинейной (билинейной) формы в унитарном (евклидовом) пространстве с помощью линейного оператора

Утверждение 10.8 Для любой полуторалинейной (билинейной) формы $B(x,y)$, определенной в унитарном (евклидовом) пространстве V_n, существует единственный линейный оператор $A \in L(V_n)$, такой, что

$$B(x,y)=(x,\, Ay),$$

причем матрица B_e билинейной формы $B(x,y)$ и матрица A_e оператора A в произвольном ОНБ $[e]=[e_1, e_2,..., e_n]$ связаны между собой равенством $B_e = \overline{A}_e$, т.е. $b_{ij}=\overline{a}_{ij}$ для любых $i, j=1, 2,..., n$.

Доказательство. Очевидно, что для любого фиксированного элемента $y \in V_n$ $B(x,y)$ представляет собой линейную форму аргумента x. Поэтому согласно общему виду линейного функционала существует единственный элемент $h \in V_n$, такой, что $B(x,y)=(x,\, h)$.

Таким образом, любому $y \in V_n$, в силу этого равенства, соответствует единственный элемент $h \in V_n$, т.е. задан оператор $A: h=Ay$, где A есть линейный оператор, что следует из соответствующих свойств полуторалинейной формы и скалярного произведения.

Покажем, что такой оператор имеется только один. Пусть A_1 и A_2 – два оператора, таких, что для любых $x, y \in V_n$:

$$B(x,y)=(x,\ A_1 y)=(x,\ A_2 y).$$

Тогда $(x,\ A_1 y - A_2 y)=0$ для любых $x,y\in V_n$. Далее, так же как в утверждении 10.7, получим, что для любого $y\in V_n$ $A_1 y = A_2 y$. Отсюда согласно определению равенства двух операторов следует, что $A_1 = A_2$.

Итак, получаем, что $B(x,y)=(x,Ay)$, причем оператор A определен единственным образом. Остается показать, что матрица B_e полуторалинейной формы $B(x,y)$ и матрица A_e оператора A в произвольном ОНБ связаны равенством $B_e=\overline{A}_e$.

Действительно, воспользовавшись общим видом скалярного произведения в ОНБ и только что доказанным равенством, получим для любых $x,y\in V_n$.

$$B(x,y)=(x,Ay)=\begin{bmatrix} x \\ \downarrow \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \overline{Ay} \\ \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \downarrow \end{bmatrix}' \overline{A}_e \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \downarrow \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, согласно формуле (10.28) в том же ОНБ [e] имеем

$$B(x,y)=\begin{bmatrix} x \\ \downarrow \end{bmatrix}' B_e \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \downarrow \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для любых $x,y\in V_n$:

$$\begin{bmatrix} x \\ \downarrow \end{bmatrix}' \overline{A}_e \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \downarrow \end{bmatrix}' B_e \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \downarrow \end{bmatrix}.$$

Значит согласно лемме 9.1 имеем $B_e=\overline{A}_e$. #

Задачи к главе № 10

1) Квадратичную форму $A(x,x)=x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4+x_2^2+2x_2x_3-4x_2x_4+x_3^2-2x_4^2$ привести к каноническому виду посредством невырожденного преобразования и найти это преобразование (методом Лагранжа).

2) Доказать, что две квадратичные формы $A(x,x)$ и $B(x,x)$ в n-мерном линейном пространстве, у которых положительные и отрицательные индексы инерции совпадают, эквивалентны между собой. (Две квадратичные формы называются эквивалентными, если одна из них переводится в другую посредством невырожденного линейного преобразования.)

3) Доказать, что в положительно определенной квадратичной форме все коэффициенты при квадратах неизвестных положительны и что это условие не является достаточным для положительной определенности формы.

4) Найти все значения λ, при которых положительно определены квадратичные формы

$$5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

$$x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3.$$

5) Выяснить, эквивалентны ли следующие пары квадратичных форм

$$f=2x_1^2+3x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$$

$$g=3x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_3.$$

6) Восстановить Симметричную билинейную форму в трехмерном линейном пространстве по данной квадратичной форме и составить ее матрицу

$$x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+12x_2x_3+7x_3^2.$$

Глава 11
СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ. НОРМАЛЬНЫЕ, УНИТАРНЫЕ, САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Понятие сопряженного оператора и его свойства

1. Определение сопряженного оператора и его свойства

Определение 11.1. Оператор A^*, действующий в унитарном пространстве V, называется сопряженным к линейному оператору A ($A \in L(V)$), если для любых элементов $x, y \in V$, выполняется соотношение:

$$(Ax, y) = (x, A^* y)$$

Утверждение 11.1. Для любого оператора $A \in L(V_n)$ существует единственный сопряженный оператор A^*, при этом он также линеен, т.е. $A^* \in L(V_n)$.

Доказательство. Обозначим $B(x,y) = (Ax, y)$. Очевидно, что $B(x,y)$ является полуторалинейной формой в унитарном пространстве V_n. Тогда согласно утверждению 9.20 о представлении полуторалинейной формы в унитарном пространстве существует единственный линейный оператор (обозначим его через A^*), такой, что

$$B(x,y) = (x, A^* y) \text{ или } (Ax, y) = (x, A^* y).\#$$

Свойства сопряженных операторов в пространстве V_n

Свойство 11.1. $I^* = I$.

Свойство 11.2. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$.

Свойство 11.3. $(A+B)^* = A^* + B^*$.

Свойство 11.4. $(A^*)^* = A$.

Свойство 11.5. $(AB)^* = B^* A^*$.

Свойство 11.6. Если оператор $A \in L(V_n)$ обратим, то

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Доказательство. Свойства 11.1–11.3. очевидны. Докажем свойства 11.4–11.6.

Свойство 11.4. Из определения сопряженного оператора для любых $x, y \in V_n$, имеем

$$(Ax, y) = (x, A^* y) = \overline{(A^* y, x)} = \overline{(y, (A^*)^* x)} = ((A^*)^* x, y)$$

т.е. $(Ax, y) = ((A^*)^* x, y)$. Так как это равенство справедливо для любого $y \in V_n$, то $Ax = (A^*)^* x$ для любого $x \in V_n$. Отсюда согласно определению равенства операторов, имеем

$$(A^*)^* = A.$$

Свойство 11.5. Так же, как и в свойстве 11.4, для любых $x, y \in V_n$ имеем

$$(x, (AB)^* y) = ((AB)x, y) = (Bx, A^* y) = (x, B^* A^* y)$$

или $(x, (AB)^* y) = (x, B^* A^* y)$. Отсюда получаем (по аналогии со свойством 11.4.), что $(AB)^* = B^* A^*$.

Свойство 11.6. Согласно определению обратного оператора имеем

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Отсюда следует, что

$$(AA^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^*$$

Воспользовавшись уже доказанными свойствами 11.1 и 11.5, получим

$$(A^{-1})^* A^* = A^* (A^{-1})^* = I$$

Из этого равенства согласно определению обратного оператора имеем

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.\#$$

2. Матрица сопряженного оператора

Утверждение 11.2. Пусть $[e] = [e_1, e_2, ..., e_n]$ – ОНБ в унитарном пространстве V_n, а $A_e = [a_{jk}]$ и $A_e^* = [a_{jk}^*]$ $(j, k = 1, 2, ..., n)$ – матрицы линейных операторов A и A^* соответственно в базисе $[e]$. Тогда матрицы A_e и A_e^* связаны между собой соотношением:

$$A_e^* = \overline{A_e'}, \text{ т.е. } a_{jk}^* = \overline{a_{kj}} \text{ для всех } k, j = 1, 2, ..., n. \quad (11.1)$$

Доказательство. Пусть $[e]=[e_1, e_2,..., e_n]$ – ОНБ пространства V_n. Согласно определению матрицы линейного оператора имеем

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, \quad A^* e_k = \sum_{p=1}^{n} a^*_{pk} e_p.$$

Из определения сопряженного оператора следует, что для

$$\forall j, k = 1, 2,..., n \quad (Ae_j, e_k) = (e_j, A^* e_k) \qquad (11.2)$$

Вычисляя правую и левую часть этого равенства, получаем

$$(Ae_j, e_k) = (\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, e_k) = a_{kj},$$

$$(e_j, A^* e_k) = (e_j, \sum_{p=1}^{n} a^*_{pk} e_p) = \overline{a}^*_{jk}.$$

Здесь мы воспользовались свойствами скалярного произведения и тем, что [e] – ОНБ.

Из последних двух равенств и (11.2) следует, что

$a^*_{jk} = \overline{a_{kj}}$ для $\forall j, k = 1, 2,..., n$, т.е. $A^*_e = \overline{A'_e}$.#

Замечание 11.1. Матрица $A^* = [a^*_{ij}]$ $(i, j = 1, 2,..., n)$, удовлетворяющая соотношению (11.1), называется сопряженной по отношению к матрице $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2,..., n$.

§ 2. Нормальные, самосопряженные, унитарные, ортогональные операторы и их матрицы

1. Основные определения

С помощью понятия сопряженного оператора выделяется ряд важных классов операторов, действующих в унитарном (евклидовом) пространстве V.

Определение 11.2. Линейный оператор A $(A \in L(V))$, действующий в унитарном (евклидовом пространстве V), называется

1) нормальным, если $A^*A = AA^*$;
2) самосопряженным, если $A^* = A$;
3) унитарным (ортогональным), если $A^*A = AA^* = I$.

Определение 11.3. Квадратные матрицы с комплексными (вещественными) элементами, удовлетворяющие соотношениям

$$A^*A = AA^*, \quad A^* = A \quad \text{и} \quad AA^* = AA^* = E$$

называются соответственно нормальными, эрмитовыми (симметричными), унитарными (ортогональными).

Замечание 11.2. Из определения следует, что оператор является нормальным, самосопряженным, унитарным (ортогональным) тогда и только тогда, когда соответственно нормален, самосопряжен, унитарен (ортогонален) сопряженный оператор.

Аналогичное утверждение справедливо для матриц.

2. Свойства нормальных операторов

Теорема 11.1. Пусть $A \in L(V)$ – нормальный оператор в унитарном (евклидовом) пространстве V, тогда

Свойство 11.7. Для любых $x, y \in V: (Ax, Ay) = (A^*x, A^*y)$.

Свойство 11.8. Для любого $x \in V: \|Ax\| = \|A^*x\|$.

Свойство 11.9. Оператор A имеет собственный вектор e_0, отвечающий собственному значению λ_0 тогда и только тогда, когда сопряженный оператор A^* имеет тот же собственный вектор e_0, отвечающий собственному значению $\overline{\lambda_0}$ (λ_0);

Свойство 11.10. Собственные векторы оператора A, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны;

Свойство 11.11. Если $\dim V = n$ и e – собственный вектор оператора A, то $V = L(e) \oplus L_1$, где $L(e)$ – линейная оболочка вектора e, а $L_1 = L^{\perp}(e)$. Кроме того, $L(e)$ и L_1 – инвариантные подпространства операторов A и A^*.

Доказательство.

Свойство 11.7. Это свойство следует из определения нормального оператора и цепочки равенств:

$$(Ax, Ay) = (x, A^*Ay) = (x, AA^*y) = \overline{(AA^*y, x)} = \overline{(A^*y, A^*x)} = (A^*x, A^*y);$$

Свойство 11.8 непосредственно следует из свойства 11.7. при $y = x$.

Свойство 11.9. Так как $(\lambda I)^* = \bar{\lambda} I$, то, как нетрудно убедиться, оператор A нормален тогда и только тогда, когда нормален оператор $A - \lambda I$. Из свойства 11.8. получим тогда, что для нормального оператора A $\|(A - \lambda I)e\| = \|(A^* - \bar{\lambda} I)e\|$ для любого вектора e. Из этого равенства немедленно следует свойство 11.9.

Свойство 11.10. Пусть λ_1 и λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ – собственные значения оператора A, а e_1 и e_2 – отвечающие им собственные векторы. Запишем следующую цепочку равенств:

$$\lambda_1(e_1, e_2) = (\lambda_1 e_1, e_2) = (Ae_1, e_2) = (e_1, A^* e_2) = (e_1, \overline{\lambda_2} e_2) = \lambda_2(e_1, e_2)$$

(здесь использовано только что доказанное свойство 11.9.) Из последнего равенства имеем $(\lambda_1 - \lambda_2)(e_1, e_2) = 0$. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(e_1, e_2) = 0$ и, следовательно, собственные векторы e_1 и e_2 ортогональны.

Свойство 11.11. Пусть e – собственный вектор оператора A, отвечающий собственному значению λ. Рассмотрим линейную оболочку $L(e)$ этого вектора. Она является подпространством пространства V. Из теоремы о разложении унитарного пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения (гл. 8, п. 7) имеем

$$V = L(e) \oplus L^{\perp}(e) = L(e) \oplus L_1.$$

Далее из свойства 11.9. следует, что $L(e)$ – инвариантное подпространство операторов A и A^*. Покажем, что L_1 является инвариантным подпространством операторов A и A^*. Пусть $y \in L_1$. Очевидно, $y \in L_1$ тогда и только тогда, когда $(y, e) = 0$. Рассмотрим цепочку равенств $(Ay, e) = (y, A^* e) = (y, \bar{\lambda} e) = \lambda(y, e) = 0$. Отсюда следует, что $Ay \in L_1$, т.е. L_1 – инвариантное подпространство оператора A. Аналогично для оператора A^* имеем

$$(A^* y, e) = (y, (A^*)^* e) = (y, Ae) = (y, \lambda e) = \bar{\lambda}(y, e) = 0$$

Следовательно, $A^* y \in L_1$, т.е. L_1 – инвариантное подпространство оператора A^*.#

3. Свойства унитарных операторов

Так как унитарные операторы являются и нормальными, то все свойства нормальных операторов справедливы и для унитарных операторов. Однако унитарные операторы обладают специфическими свойствами, присущими только им.

Теорема 11.2. Пусть $U \in L(V_n)$ – унитарный (ортогональный) оператор, действующий в унитарном (евклидовом) пространстве V_n, тогда следующие свойства эквивалентны.

Свойство 11.12. $UU^* = U^*U = I$, т.е. $U^* = U^{-1}$.

Свойство 11.13. Для любых $x, y \in V_n : (Ux, Uy) = (x, y)$.

Свойство 11.14. Для любого $x \in V_n : \|Ux\| = \|x\|$.

Свойство 11.15. Оператор U ортонормированный базис переводит снова в ортонормированный базис.

Свойство 11.16. Строки (столбцы) матрицы U_e унитарного оператора U в ортонормированном базисе $[e]$ пространства V_n образуют ортонормированный базис пространства E^n.

Свойство 11.17. Если $[e]$ – произвольный ОНБ унитарного (евклидова) пространства V_n, то матрица U_e оператора U в базисе $[e]$ унитарна (ортогональна).

Доказательство. Из свойства 11.12 $\Rightarrow$ 11.13. Действительно, для любых $x, y \in V_n$

$$(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, Iy) = (x, y).$$

Из свойства 11.13 $\Rightarrow$ 11.12. В самом деле, пусть выполнено свойство 11.13. Тогда для любых $x, y \in V_n$ $(x, y) = (Ux, Uy) = (x, U^*Uy)$. Из последнего равенства следует, что $y = U^*Uy$ для любого $y \in V_n$. Это в свою очередь означает, что $U^*U = I$. Далее, воспользовавшись свойством 11.7. нормальных операторов, получим для любых $x, y \in V_n$ цепочку равенств $(x, y) = (Ux, Uy) = (U^*x, U^*y) = (x, (U^*)^*U^*y) = (x, UU^*y)$, из которой, очевидно, следует, что $UU^* = I$, т.е. из свойства 11.13 $\Rightarrow$ 11.12.

Из свойства 11.13 $\Rightarrow$ 11.14. Действительно,

$$\|Ux\|^2 = (Ux, Ux) = (x, x) = \|x\|^2.$$

Из свойства 11.14 $\Rightarrow$ 11.13. Воспользовавшись легко проверяемым соотношением,

$$(x,y)=\frac{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2}{4},$$

получим

$$(x,y)=\frac{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2}{4}=$$

$$=\frac{\|Ux+Uy\|^2-\|Ux-Uy\|^2+i\|Ux+iUy\|^2-i\|Ux-iUy\|^2}{4}=(Ux,Uy).$$

Из свойства 11.13 $\Rightarrow$ 11.15. Действительно, если $e_1, e_2,..., e_n$ – ОНБ пространства V_n, то $(Ue_i, Ue_k)=(e_i, e_k)=\delta_{ik}=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases}$ и, следовательно, $Ue_1, Ue_2,..., Ue_n$ – ОНБ пространства V_n.

Обратно из свойства 11.15 $\Rightarrow$ 11.13. В самом деле, пусть $[e]=[e_1, e_2,..., e_n]$ – ОНБ пространства V_n, тогда, согласно условию $\hat{e}_k=Ue_k$ $(k=1, 2,..., n)$ также есть ОНБ пространства V_n. Рассмотрим два произвольных элемента $x=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ie_i$ и $y=\sum\limits_{k=1}^{n}y_ke_k$ пространства V_n. Тогда

$$(Ux,Uy)=(\sum_{i=1}^{n}x_iUe_i,\sum_{k=1}^{n}y_kUe_k)=(\sum_{i=1}^{n}x_i\hat{e}_i,\sum_{k=1}^{n}y_k\hat{e}_k)=\sum_{k=1}^{n}x_k\bar{y}_k=(x,y)$$

Из свойства 11.12 $\Rightarrow$ 11.16. Пусть $[e]$ – есть произвольный ОНБ пространства V_n. Тогда из равенств $UU^*=U^*U=I$ следует

$$U_eU_e^*=U_e^*U_e=E \qquad (11.3)$$

где U_e и U_e^* – матрицы операторов U и U^* соответственно в ортонормированном базисе $[e]$. Матрицу U_e запишем в виде:

$$U_e=\left[\underset{\downarrow}{U_1},\underset{\downarrow}{U_2},...,\underset{\downarrow}{U_n}\right]=\begin{bmatrix}\overrightarrow{U_1}\\ \vdots\\ \overrightarrow{U_n}\end{bmatrix},$$

где $\underset{\downarrow}{U_k}=\begin{bmatrix}U_{1k}\\ \vdots\\ U_{nk}\end{bmatrix}$ – k-й столбец, а $\overrightarrow{U_k}=[U_{k1}, \ ..., \ U_{kn}]$ – k-я строка $(k=1, 2,..., n)$ матрицы U_e. Так как $U_e^*=\bar{U}_e'$ (см. 11.1), то равенства (11.3) можно переписать в виде:

$$U_e\bar{U}_e'=E, \ \bar{U}_e'U_e=E$$

или

$$\sum_{k=1}^{n}U_{ik}\bar{U}_{jk}=(\bar{U}_i,\bar{U}_j)=\delta_{ij}, \quad \sum_{k=1}^{n}\bar{U}_{ki}U_{kj}=(\underset{\downarrow}{U_j},\underset{\downarrow}{U_i})=\delta_{ji}.$$

Последние равенства означают, что как строки, так и столбцы матрицы U_e унитарного оператора U образуют ОНБ пространства E^n.

Из свойства 11.16 $\Rightarrow$ 11.12. Пусть столбцы (строки) матрицы U_e унитарного оператора U (в ОНБ $[e]$) образуют ортонормированный базис пространства E^n, т.е.

$$\left(\underset{\downarrow}{U_i},\underset{\downarrow}{U_k}\right)=\sum_{p=1}^{n}U_{pi}\bar{U}_{pk}=\delta_{ik},\left(\left(\bar{U}_k,\bar{U}_i\right)=\sum_{p=1}^{n}\bar{U}_{ip}U_{kp}=\delta_{ki}\right). \qquad (11.4)$$

Рассмотрим два произвольных элемента x и y унитарного пространства V_n с координатами $(x_1, x_2,..., x_n)$ и $(y_1, y_2,..., y_n)$ соответственно в заданном ОНБ $[e]=[e_1, e_2,..., e_n]$. Тогда

$$(Ux, Uy)=\left(U\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right), \ U\left(\sum_{k=1}^{n}y_ke_k\right)\right)=\sum_{i,k=1}^{n}x_i\bar{y}_k(Ue_i, Ue_k).$$

Согласно определению матрицы линейного оператора в базисе $[e]$ имеем

$$Ue_s=\sum_{j=1}^{n}u_{js}e_j .$$

Подставляя это в предыдущее равенство, получаем

$$(Ux, Uy)=\sum_{i,k=1}^{n}x_i\overline{y_k}\left(\sum_{p=1}^{n}u_{pi}e_p,\sum_{j=1}^{n}u_{jk}e_j\right)=\sum_{i,k=1}^{n}x_i\overline{y_k}\left(\sum_{p,j=1}^{n}u_{pi}\overline{u_{jk}}\left(e_p,e_j\right)\right)$$

или, так как $(e_p, e_j) = \delta_{pj}$, то

$$(Ux, Uy) = \sum_{i,k=1}^{n} x_i \overline{y}_k \left(\sum_{p=1}^{n} u_{pi} \overline{u_{pk}} \right). \tag{11.5}$$

Аналогично, воспользовавшись (11.1), можно показать, что

$$\left(U^* x, U^* y\right) = \sum_{i,k=1}^{n} x_i \overline{y_k} \left(\sum_{p=1}^{n} \overline{u_{ip}}\, u_{kp} \right). \tag{11.6}$$

Согласно (11.4) эти равенства в свою очередь можно переписать в виде:

$$(Ux, Uy) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} = (x, y), \quad \left(\left(U^* x, U^* y\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} = (x, y) \right).$$

Из доказанной выше эквивалентности утверждений свойств 11.12 и 11.13 настоящей теоремы и замечания 11.2 следует, что оператор U унитарен, если столбцы (строки) его матрицы U_e в ортонормированном базисе $[e]$ образуют ОНБ пространства E^n.

Из свойства 11.16 $\Rightarrow$ 11.17. Пусть столбцы (строки) матрицы U_e образуют ОНБ пространства E^n, т.е.

$$\left(\underset{\downarrow}{U_i}, \underset{\downarrow}{U_k} \right) = \sum_{p=1}^{n} u_{pi} \overline{u_{pk}} = \delta_{ik}, \quad \left(\left(\overline{\vec{U_k}}, \overline{\vec{U_i}} \right) = \sum_{p=1}^{n} u_{kp} \overline{u_{ip}} = \delta_{ki} \right).$$

Согласно (11.1) это равенства можно переписать в виде:

$$U_e^* U_e = E \quad \left(U_e U_e^* = E \right).$$

Следовательно, матрица U_e унитарна.

Обратно из свойства 11.17 $\Rightarrow$ 11.16. Действительно, равенства

$$U_e^* U_e = E \quad \left(U_e U_e^* = E \right).$$

согласно (11.1) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{p=1}^{n} u_{pi} \overline{u_{pk}} = \delta_{ik} \quad \left(\sum_{p=1}^{n} u_{kp} \overline{u_{ip}} = \delta_{ki} \right)$$

или

$$\left(\underset{\downarrow}{U_i}, \underset{\downarrow}{U_k} \right) = \delta_{ik} \quad \left(\left(\overline{U_k}, \overline{U_i} \right) = \delta_{ki} \right).\#$$

Замечание 11.3. Любое из свойств 11.12–11.17 можно было взять за определение унитарного оператора.

Замечание 11.4. Матрица U_e унитарного (ортогонального) оператора U в неортонормированном базисе $[e]$ может быть и не унитарна (не ортогональна).

Задача 11.1. Привести пример, показывающий, что в неортонормированном базисе матрица унитарного (ортогонального) оператора может быть и не унитарной.

Следствие 11.1. 1. Оператор U унитарен (ортогонален) тогда и только тогда, когда унитарен (ортогонален) оператор U^{-1}.

2. Если U_1 и U_2 Унитарные (ортогональные) операторы, то и произведение этих операторов $U_1 U_2$ также унитарный (ортогональный) оператор.

3. Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису в унитарном (евклидовом) пространстве унитарна (ортогональна).

Доказательство. 1. Пусть U унитарен (ортогонален), тогда

$$(x, y) = \left(UU^{-1}x, UU^{-1}y \right) = \left(U^{-1}x, U^{-1}y \right)$$

и на основании свойства 11.13 унитарных операторов оператор U^{-1} унитарен (ортогонален).

Обратно пусть U^{-1} унитарен (ортогонален), тогда

$$(x, y) = \left(U^{-1}Ux, U^{-1}Uy \right) = (Ux, Uy)$$

и, следовательно, U унитарен (ортогонален).

2. Это свойство следует из свойства 11.13 унитарных операторов и цепочки равенств,

$$(U_1 U_2 x, U_1 U_2 y) = (U_2 x, U_2 y) = (x, y).$$

3. Пусть $T = [t_{ik}]$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ – матрица перехода от ОНБ $[e]$ к ОНБ $[\hat{e}]$. Обозначим через $T^* = \overline{T}'$ сопряженную к T матрицу. Согласно определению матрицы перехода от одного базиса к другому имеем

$$\hat{e}_k = \sum_{i=1}^{n} t_{ik} e_i \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Так как по условию базисы $[e]$ и $[\hat{e}]$ – ортонормированные, то

$$\delta_{jk}=\left(\hat{e}_j,\hat{e}_k\right)=\left(\sum_{p=1}^{n}t_{pj}e_p,\sum_{i=1}^{n}t_{ik}e_i\right)=\sum_{p,i=1}^{n}t_{pj}\overline{t_{ik}}\left(e_p,e_i\right)=\sum_{p=1}^{n}t_{pj}\overline{t_{pk}}$$

$$j,k=1,2,\ldots,n.$$

Последние соотношения эквивалентны равенству:

$$T^{*}T=E.$$

В силу единственности обратной матрицы отсюда следует также, что

$$TT^{*}=E,$$

т.е. T – унитарная (ортогональная) матрица. #

Следствие 11.12. Унитарные (ортогональные) матрицы обладают следующими свойствами.

Свойство 11.18. Все столбцы (строки) унитарной (ортогональной) матрицы $A=[a_{ij}]$ нормированы и попарно ортогональны, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\overline{a_{kj}}=\delta_{ij}\quad\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\overline{a_{jk}}=\delta_{ij}\right).$$

Свойство 11.19. Определитель унитарной (ортогональной) матрицы по модулю равен единице.

Свойство 11.20. Произведение унитарных (ортогональных) матриц есть унитарная (ортогональная) матрица.

Свойство 11.21. Единичная матрица E унитарна (ортогональна).

Свойство 11.22. Для унитарной (ортогональной) матрицы A обратная матрица существует и равна $\overline{A'}$ (A').

Свойство 11.23. Для унитарной (ортогональной) матрицы A обратная матрица A^{-1} также унитарна (ортогональна).

Отметим следующее простое утверждение, которое потребуется ниже.

Утверждение 11.3. Для любой системы k $(k<n)$ нормированных попарно ортогональных столбцов $\underset{\downarrow}{t_1},\underset{\downarrow}{t_2},\ldots,\underset{\downarrow}{t_k}$ высоты n существует ортогональная матрица T, первые k столбцов которой совпадают с заданными столбцами $\underset{\downarrow}{t_1},\underset{\downarrow}{t_2},\ldots,\underset{\downarrow}{t_k}$.

Доказательство. Пусть

$$\underset{\downarrow}{t_1}=\begin{bmatrix}t_{11}\\t_{21}\\\vdots\\t_{n1}\end{bmatrix},\quad \underset{\downarrow}{t_2}=\begin{bmatrix}t_{12}\\t_{22}\\\vdots\\t_{n2}\end{bmatrix},\ \ldots,\ \underset{\downarrow}{t_k}=\begin{bmatrix}t_{1k}\\t_{2k}\\\vdots\\t_{nk}\end{bmatrix},\quad \underset{\downarrow}{t}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

Ортогональность столбца $\underset{\downarrow}{t}$ к столбцам $\underset{\downarrow}{t_1},\underset{\downarrow}{t_2},\ldots,\underset{\downarrow}{t_k}$ равносильна выполнению следующих равенств:

$$\begin{cases}t_{11}x_1+t_{21}x_2+\ldots+t_{n1}x_n=0\\t_{12}x_1+t_{22}x_2+\ldots+t_{n2}x_n=0\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\t_{1k}x_1+t_{2k}x_2+\ldots+t_{nk}x_n=0.\end{cases}$$

Таким образом, для определения координат столбца $\underset{\downarrow}{t}$, мы получили однородную систему k линейных уравнений с n неизвестными. Так как $k<n$, то система имеет ненулевые решения. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_n$ – какое-нибудь ненулевое решение системы. Положим

$$t_{i(k+1)}=\frac{a_i}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}\quad(i=1,2,\ldots,n).$$

Столбец с элементами $t_{1(k+1)},t_{2(k+1)},\ldots,t_{n(k+1)}$ будет, очевидно, нормированным и ортогональным ко всем столбцам $\underset{\downarrow}{t_1},\underset{\downarrow}{t_2},\ldots,\underset{\downarrow}{t_k}$.

Примененные выше рассуждения будем повторять до тех пор пока не получим систему из n нормированных, попарно ортогональных столбцов. #

Пример 11.1. Покажем, что всякая ортогональная матрица T 2-го порядка имеет вид:

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}\ \text{или}\ \begin{bmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi\\\sin\varphi&-\cos\varphi\end{bmatrix}.$$

Действительно, пусть первый столбец матрицы T имеет вид $\underset{\downarrow}{e_1}=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$, $\alpha^2+\beta^2=1$. Тогда можно считать, что $\alpha=\cos\varphi$, $\beta=\sin\varphi$.

Обозначим второй неизвестный столбец матрицы T через $\underset{\downarrow}{e_2}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$. Ортогональность столбцов $\underset{\downarrow}{e_1}$ и $\underset{\downarrow}{e_2}$ эквивалентна равенству $x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi=0$. Очевидно, нормированными решениями этого уравнения являются только $\begin{bmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}\sin\varphi\\-\cos\varphi\end{bmatrix}$. Следовательно, матрица T имеет вид:

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\text{ или }\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{bmatrix}.$$

Первая матрица имеет определитель равный +1 и соответствует ортогональному преобразованию поворота плоскости на угол φ, а вторая матрица имеет определитель равный (–1) и соответствует преобразованию поворота на угол φ с последующим отражением относительно одной из осей.

§ 3. Основная спектральная теорема нормальных операторов

Теорема 11.3. 1). Оператор A, действующий в унитарном пространстве V_n, тогда и только тогда нормальный, когда для него существует ортонормированный базис из собственных векторов.

2). Матрица $A=[a_{ij}]$ порядка $n\times n$ нормальна тогда и только тогда, когда существует унитарная матрица $T=\left[\underset{\downarrow}{e_1},\underset{\downarrow}{e_2},\dots,\underset{\downarrow}{e_n}\right]$, столбцами которой являются собственные векторы матрицы A: $A\underset{\downarrow}{e_k}=\lambda_k\underset{\downarrow}{e_k}$, $k=1,2,\dots,n$, приводящая матрицу A к диагональному виду Λ, т.е.

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}=T^*AT. \tag{11.7}$$

Доказательство. 1). Пусть A – нормальный оператор. Он имеет по крайней мере один собственный вектор e_1 *). Пусть $\|e_1\|=1$ и e_j отвечает собственному значению λ_1 оператора A. Согласно теореме 11.1 пространство V_n можно представить в виде

$$V_n=L(e_1)\oplus L_1, \tag{11.8}$$

где $L(e_1)$ – линейная оболочка вектора e_1, а $L_1=L^{\perp}(e_1)-(n-1)$ – мерное инвариантное подпространство оператора A. Рассматривая оператор A в подпространстве L_1, можно точно также представить L_1 в виде

$$L_1=L(e_2)\oplus L_2, \tag{11.9}$$

где $L(e_2)$ – линейная оболочка нормированного собственного вектора e_2 оператора A: $Ae_2=\lambda_2e_2$, а $L_2=L^{\perp}(e_2)-(n-2)$-мерное инвариантное подпространство оператора A. Из (11.8) и (11.9) имеем $V_n=L(e_1)\oplus L(e_2)\oplus L_2$, причем $(e_i,e_j)=\delta_{ij}$, $i,j=1,2$. Продолжая этот процесс, получаем, что

$$V_n=L(e_1)\oplus L(e_2)\oplus\dots\oplus L(e_n),$$

где $e_1,e_2,\dots,e_n$ – ортонормированная система собственных векторов оператора A, отвечающих собственным значениям λ_1, $\lambda_2,\dots,\lambda_n$, а $L(e_k)$ – линейная оболочка вектора e_k $(k=1,2,\dots,n)$. Векторы $e_1,e_2,\dots,e_n$, очевидно, образуют ортонормированный базис пространства V_n.

Обратно предположим, что оператор A имеет базисную систему ортонормированных собственных векторов. Тогда в базисе, составленном из этих векторов, матрица A_e оператора A будет диагональной. Но в этом же базисе оператору A^* соответствует сопряженная матрица A_e^*, которая, очевидно, тоже будет диагональной.

*) Характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$ имеет хотя бы один (в общем случае комплексный) корень.

Диагональные матрицы всегда перестановочны, т.е. $A_e A_e^* = A_e^* A_e$, поэтому перестановочны и операторы A и A^*, т.е. A – нормальный оператор.

2). Пусть A – нормальная матрица. Рассмотрим произвольный ОНБ $e_1, e_2, ..., e_n$ пространства V_n. Очевидно, существует нормальный оператор A, матрица которого в ОНБ $e_1, e_2, ..., e_n$ совпадает с заданной нормальной матрицей A. Из утверждения 1 настоящей теоремы следует, что существует ОНБ $[\hat{e}] = [\hat{e}_1, \hat{e}_2, ..., \hat{e}_n]$, состоящий из собственных векторов оператора A: $A\hat{e}_k = \lambda_k \hat{e}_k$. В базисе $[\hat{e}]$, как известно (см. утверждение 9.12), матрица оператора A имеет диагональный вид. Вспоминая закон изменения матрицы оператора при переходе от базиса $[e]$ к базису $[\hat{e}]$, получаем

$$T^{-1}AT = A_{\hat{e}} = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{11.10}$$

где $T = \begin{bmatrix} \hat{e}_1, & \hat{e}_2, & \ldots, & \hat{e}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ – матрица перехода от базиса $[e]$ к базису $[\hat{e}]$. Согласно следствию 11.1 матрица T унитарна, т.е. $T^{-1} = T^*$. Следовательно, 11.10 перепишется в виде (11.7).

Обратно пусть существует унитарная матрица T, такая, что

$$T^* AT = \Lambda.$$

Умножая это равенство слева на T, а справа на T^*, получаем

$$A = T\Lambda T^*.$$

Покажем, что матрица A нормальная. Из последнего равенства очевидно, имеем $A^* = T\Lambda^* T^*$. Вычислим выражения AA^* и A^*A:

$$AA^* = \left(T\Lambda T^*\right)\left(T\Lambda^* T^*\right) = T\Lambda\Lambda^* T^*,$$

$$A^*A = \left(T\Lambda^* T^*\right)\left(T\Lambda T^*\right) = T\Lambda^*\Lambda T^*.$$

Так как для диагональной матрицы Λ всегда справедливо равенство $\Lambda\Lambda^* = \Lambda^*\Lambda$, то из последних двух соотношений имеем $AA^* = \Lambda^* A$, т.е. A – нормальна. #

§ 4. Связь между нормальным, самосопряженным и унитарным операторами

Теорема 11.4. 1). Оператор A самосопряжен тогда и только тогда, когда A нормальный и все собственные числа этого оператора вещественные.

2). Оператор A является унитарным тогда и только тогда, когда A нормальный и все собственные числа по модулю равны единице.

Доказательство. 1).Пусть A самосопряжен. Тогда, очевидно, A нормален. Возьмем любое его собственное значение λ и отвечающий ему нормированный собственный вектор e. Имеем

$$\lambda = (\lambda e, e) = (Ae, e) = \left(e, A^* e\right) = (e, Ae) = (e, \lambda e) = \bar{\lambda},$$

т.е. λ – вещественное число.

Обратно, пусть нормальный оператор A имеет все вещественные собственные значения. Тогда по основной спектральной теореме нормальных операторов существует ОНБ из собственных векторов $e_1, e_2, ..., e_n$ оператора A: $Ae_k = \lambda_k e_k$. Рассмотрим два произвольных элемента x и y пространства V_n с координатами $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $(y_1, y_2, ..., y_n)$ соответственно в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$. Очевидно,

$$(Ax, y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \bar{y}_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{\lambda_k y_k} = (x, Ay).$$

Следовательно, $A^* = A$, т.е. A самосопряжен.

2). Пусть A – унитарный оператор. Тогда, очевидно, A нормален. Возьмем любое значение λ и соответствующий ему нормированный собственный вектор e. По свойству 11.14 унитарных операторов (см. теорему 11.2) имеем

$$1 = \|e\| = \|Ae\| = \|\lambda e\| = |\lambda|\|e\| = |\lambda|.$$

Обратно, пусть все собственные значения нормального оператора A по модулю равны единице. Выберем согласно спектральной теореме нормальных операторов ОНБ $e_1, e_2, ..., e_n$ из собственных векторов оператора A: $Ae_k = \lambda_k e_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда для любого $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ будем иметь

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \overline{\lambda_k x_k} = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 |x_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = \|x\|^2 .$$

Следовательно, согласно свойству 11.14 унитарных операторов (теорема 11.2) оператор A унитарен. #

§ 5. Основная спектральная теорема самосопряженных операторов

<u>Теорема 11.5.</u> 1).Линейный оператор A, действующий в унитарном пространстве V_n, самосопряжен тогда и только тогда, когда существует ОНБ из собственных векторов оператора A и все собственные значения оператора A вещественны.

2). Матрица A самосопряженная, иначе эрмитова (симметрична) тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A вещественны и существует унитарная (ортогональная) матрица $T = [\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{e_n}]$, столбцами которой являются собственные векторы $\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{e_n}$ матрицы A $(A\underset{\downarrow}{e_k} = \lambda_k \underset{\downarrow}{e_k})$, отвечающие собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, соответственно такая, что

$$T^* A T = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Следует из теоремы о связи самосопряженных и нормальных операторов и основной спектральной теоремы для нормальных операторов. #

<u>Замечание 11.5.</u> При построении столбцов унитарной матрицы T мы должны на ряду с условием нормированности столбцов $\underset{\downarrow}{e_k}$ соблюсти и условие их попарной ортогональности. Однако, когда строим матрицу T из собственных вектор-столбцов нормальной, а следовательно, и эрмитовой (симметричной) матрицы A, то за условием ортогональности надо следить только для собственных вектор-столбцов, отвечающих одному и тому же собственному значению λ, так как собственные вектор-столбцы нормальной эрмитовой (симметричной) матрицы, отвечающие различным собственным значениям, автоматически ортогональны.

§ 6. Основная спектральная теорема унитарных операторов

<u>Теорема 11.6.</u> 1).Линейный оператор A, действующий в унитарном пространстве V_n, унитарен тогда и только тогда, когда существует ОНБ из собственных векторов оператора A и все собственные значения оператора A по модулю равны единице.

2). Матрица A унитарна тогда и только тогда, когда все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A по модулю равны единице и существует унитарная матрица $T = [\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{e_n}]$, столбцами которой являются собственные векторы $\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{e_n}$ матрицы A $(A\underset{\downarrow}{e_k} = \lambda_k \underset{\downarrow}{e_k})$, отвечающие собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, такая, что

$$T^* A T = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Доказательство. Следует из теоремы о связи унитарных и нормальных операторов и основной спектральной теоремы для нормальных операторов. #

§ 7. Приведение эрмитовой квадратичной формы к каноническому виду

Пусть в унитарном (евклидовом) пространстве V_n задана эрмитова квадратичная форма $B(x,x)$. Справедлива следующая

<u>теорема 11.7</u> Любая эрмитова квадратичная форма $B(x,x)$ с матрицей B при помощи некоторого унитарного преобразования переменных $\underset{\downarrow}{x} = T\underset{\downarrow}{y}$, где T – унитарная матрица, может быть приведена к каноническому виду

$$B(x,x)=\lambda_1|y_1|^2+\lambda_2|y_2|^2+...+\lambda_n|y_n|^2. \qquad (11.11)$$

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n$ при квадратах новых переменных $y_1, y_2,..., y_n$ вещественны и с точностью до порядка следования определены формой $B(x,x)$ однозначно (они совпадают с собственными значениями матрицы B). Столбцы унитарной матрицы $T=[\underset{\downarrow}{e_1},\underset{\downarrow}{e_2},\dots,\underset{\downarrow}{e_n}]$ являются нормированными собственными векторами $\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2},\dots, \underset{\downarrow}{e_n}$ $(B\underset{\downarrow}{e_k}=\lambda_k \underset{\downarrow}{e_k})$ матрицы B, отвечающими собственным числам $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n$ соответственно.

Доказательство. Рассмотрим эрмитову полуторалинейную форму $B(x,y)$, отвечающую квадратичной форме $B(x,x)$. Согласно утверждению 10.8 существует оператор $A\in L(V_n)$, такой, что для любых элементов $x, y\in V_n$ имеет место соотношение: $B(x,y)=(x, Ay)$. Из цепочки равенств

$$(x,Ay)=B(x,y)=B\left(\overline{y,x}\right)=\left(\overline{y,Ax}\right)=(Ax,y)$$

следует, что оператор A самосопряжен. Поэтому согласно основной спектральной теореме самосопряженных операторов существует ОНБ $[e]=[e_1, e_2,..., e_n]$ из собственных векторов оператора A: $Ae_k=\lambda_k e_k$, $k=1, 2,\dots, n$, причем все собственные значения λ_k $k=1, 2,\dots, n$ оператора A вещественны.

Если x – произвольный элемент пространства V_n с координатами $(y_1, y_2,..., y_n)$ в ОНБ из собственных векторов $e_1, e_2,..., e_n$, то

$$Ax=y_1Ae_1+y_2Ae_2+...+y_nAe_n.$$

Тогда в базисе $[e]$ квадратичная форма, очевидно, имеет вид:

$$B(x,x)=(x,Ax)=\sum_{k=1}^{n}y_k\overline{\lambda_k y_k}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|y_k|^2.$$

Заметим, что матрицей перехода от исходного базиса $g=[g_1, g_2,..., g_n]$, в котором задана квадратичная форма $B(x,x)$, к ОНБ $[e]=[e_1, e_2,..., e_n]$ из собственных векторов оператора A является матрица $T=[\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2},..., \underset{\downarrow}{e_n}]$, где $\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2},..., \underset{\downarrow}{e_n}$ – координатные столбцы векторов $e_1, e_2,..., e_n$ соответственно в базисе $[g]$, причем матрица T в силу теоремы 11.2 унитарна. Следовательно, согласно (10.11) и (9.26) унитарное преобразование $\underset{\downarrow}{x}=T\underset{\downarrow}{y}$ приводит заданную эрмитову квадратичную форму к каноническому виду (11.11). #

<u>Пример 11.5</u> Вещественную квадратичную форму

$$A(x,x)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

ортогональным преобразованием $\underset{\downarrow}{x}=T\underset{\downarrow}{y}$ привести к каноническому виду.

Отметим, прежде всего, что матрица данной квадратичной формы в исходном базисе имеет вид

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

Следовательно, характеристическое уравнение данной матрицы

$$\det[A-\lambda E]=\det\begin{bmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{bmatrix}=(2-\lambda)(1+\lambda)^2=0$$

имеет корни $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=-1$.

Таким образом, согласно предыдущей теореме, квадратичная форма $A(x,x)$ некоторым ортогональным преобразованием может быть приведена к каноническому виду:

$$A(x,x)=2y_1^2-y_2^2-y_3^2. \qquad (11.12)$$

Остается найти само ортогональное преобразование $\underset{\downarrow}{x}=T\underset{\downarrow}{y}$, приводящее квадратичную форму к указанному каноническому виду. Матрица T этого преобразования согласно предыдущей теореме имеет вид $T=[\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2}, \underset{\downarrow}{e_3}]$, где $\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2}, \underset{\downarrow}{e_3}$ – ортонормированные вектор-столбцы матрицы A, отвечающие собственным значениям

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$ соответственно. Собственный вектор $\underset{\downarrow}{e_1}$ находим из уравнения:

$$(A - 2E)\underset{\downarrow}{e_1} = \underset{\downarrow}{0},$$

которое эквивалентно системе

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

где x_1, x_2, x_3 – искомые координаты вектора $\underset{\downarrow}{e_1}$.

Общим решением этой системы является вектор $\underset{\downarrow}{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, где α – произвольное вещественное число. Следовательно, в качестве $\underset{\downarrow}{e_1}$ можно взять вектор

$$\underset{\downarrow}{e_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично, координаты собственных векторов $\underset{\downarrow}{e_2}$ и $\underset{\downarrow}{e_3}$, отвечающих собственному значению $\lambda = -1$, находятся из системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Общим решением данной системы, как легко видеть, является вектор

$$\underset{\downarrow}{x} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (11.13)$$

где α и β – произвольные вещественные числа.

Согласно замечанию 11.5 к теореме 11.5 ортогональность столбцов, отвечающих различным собственным значениям, выполняется автоматически. Следовательно, достаточно проследить за ортогональностью собственных векторов $\underset{\downarrow}{e_2}$ и $\underset{\downarrow}{e_3}$, отвечающих кратному собственному значению $\lambda = -1$.

В качестве $\underset{\downarrow}{e_2}$ можно взять, например, вектор

$$\underset{\downarrow}{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из множества векторов (11.13) выберем вектор ортогональный $\underset{\downarrow}{e_2}$. Очевидно, вектор $\underset{\downarrow}{x}$ ортогонален $\underset{\downarrow}{e_2}$ тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta + \alpha = 0$. Выбирая $\alpha = 1$, $\beta = -2$, получаем, что вектор $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ортогонален вектору $\underset{\downarrow}{e_2}$. Следовательно, в качестве $\underset{\downarrow}{e_3}$ можно взять вектор

$$\underset{\downarrow}{e_3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Итак, ортогональное преобразование

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

приводит квадратичную форму $A(x,x)$ к каноническому виду (11.12).

§ 8. Положительно определенные операторы

Определение 11.4 Самосопряженный оператор A называется неотрицательно определенным, если для любого элемента $x \in V_n$

$$(Ax,x) \geq 0$$

и положительно определенным, если для любого $x \neq \theta$ из V_n

$$(Ax,x) > 0.$$

Рассмотрим вектор x с координатами $(x_1, x_2, ..., x_n)$ в произвольном ортонормированном базисе. Тогда, очевидно, (Ax,x) является эрмитовой квадратичной формой от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ (см. определения 10.12 и 10.13), причем неотрицательно (соответственно положительно) определенному оператору будет соответствовать неотрицательно (соответственно положительно) определенная эрмитова квадратичная форма.

Для неотрицательно (соответственно положительно) определенных операторов основным является следующее утверждение.

Теорема 11.8 Самосопряженный оператор является неотрицательно (соответственно положительно) определенным тогда и только тогда, когда все его собственные значения неотрицательны (соответственно положительны).

Доказательство. Согласно основной спектральной теореме самосопряженных операторов существует ОНБ $[e] = [e_1, e_2, ..., e_n]$, состоящий из собственных векторов оператора A: $Ae_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда утверждение теоремы следует из равенств

$$(Ax,x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\xi_k|^2 \quad \text{и} \quad (Ae_k, e_k) = \lambda_k, \; k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$ – произвольный элемент пространства V_n. #

Пусть A – неотрицательно определенный самосопряженный оператор. Тогда существует ОНБ $[e]$, состоящий из собственных векторов этого оператора, для которого $Ae_k = \lambda_k e_k$ с $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Положим $\mu_k = \sqrt{\lambda_k} \geq 0$, $k = 1,2,\ldots,n$ и определим линейный оператор B равенствами:

$$Be_k = \mu_k e_k, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{11.14}$$

Напомним, чтобы задать линейный оператор, достаточно определить его на базисных элементах. Оператор B в силу только что доказанной теоремы и основной спектральной теоремы самосопряженных операторов является, как и A, неотрицательно определенным самосопряженным оператором. При этом, очевидно,

$$B^2 = A. \tag{11.15}$$

Определение 11.5 Неотрицательно определенный самосопряженный оператор B, связанный с A равенством (11.15), будем называть арифметическим квадратным корнем из оператора A и будем обозначать символически так: $B = \sqrt{A}$.

Замечание 11.6 Очевидно, если A положительно определенный оператор, то и $\sqrt{A}$ будет положительно определенным оператором.

Определение 11.6 Эрмитову матрицу $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ назовем неотрицательно определенной (положительно определенной), если квадратичная форма $A(x,x)$ с матрицей $A = [a_{ij}]$ в некотором базисе неотрицательно определена (положительно определена).

Из теоремы 11.4 следует, что эрмитова матрица неотрицательно определена (соответственно положительно определена) тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы неотрицательны (соответственно положительны)

Пусть $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ – произвольная эрмитова неотрицательно (положительно) определенная матрица. Тогда согласно основной спектральной теореме нормальных операторов существует унитарная матрица T, такая, что

$$T^* A T = \Lambda.$$

Откуда $A = T \Lambda T^*$, где

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

причем все диагональные элементы $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ неотрицательны (положительны).

Матрицу

$$B = T\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} T^*$$

назовем корнем квадратным из неотрицательно (положительно) определенной матрицы $\mathcal{A}$ и будем обозначать так: $B = \sqrt{\mathcal{A}}$.

Замечание 11.7 Согласно основной спектральной теореме самосопряженных операторов матрица $\sqrt{\mathcal{A}}$ также эрмитова, и, кроме того, она, как и $\mathcal{A}$, неотрицательно (положительно) определена.

§ 9. Одновременное приведение двух эрмитовых квадратичных форм к каноническому виду

Пусть $B_1(x,x)$ и $B_2(x,x)$ – эрмитовы квадратичные формы в унитарном пространстве V_n. Поставим следующую задачу: найти невырожденное преобразование переменных, одновременно приводящее эрмитовы квадратичные формы $B_1(x,x)$ и $B_2(x,x)$ к каноническому виду. Отметим, что в такой общей постановке такая задача не всегда имеет решение.

Упражнение 11.1. Показать, что квадратичные формы $B_1(x,x) = x_1x_2$ и $B_2(x,x) = x_1^2$ определенные в пространстве V_2, не могут быть одним невырожденным преобразованием переменных приведены к каноническому виду.

Докажем следующее достаточное условие разрешимости поставленной задачи.

Теорема 11.9. Пусть $B_1(x,x)$ и $B_2(x,x)$ – эрмитовы квадратичные формы, заданные в комплексном линейном пространстве V_n, причем $B_2(x,x) > 0$, $x \neq \theta$.

Тогда в V_n существует базис $[e] = [e_1, e_2, \dots, e_n]$, в котором квадратичные формы $B_1(x,x)$ и $B_2(x,x)$ имеют канонический вид:

$$B_1(x,x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\xi_k|^2, \quad B_2(x,x) = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2, \tag{11.16}$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – координаты вектора x в базисе $[e] = [e_1, e_2, \dots, e_n]$, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – вещественные числа.

Доказательство. Рассмотрим эрмитову полуторалинейную форму $B_2(x,y)$, полярную к положительно определенной эрмитовой квадратичной форме $B_2(x,x)$. Согласно п. 8 гл. 10 в пространстве V_n можно ввести скалярное произведение с помощью эрмитовой формы $B_2(x,y)$ равенством:

$$(x,y)_2 = B_2(x,y) \tag{11.17}$$

Пространство V_n с так введенным в нем скалярным произведением будет унитарным. Тогда согласно теореме 11.6 существует базис $[e] = [e_1, e_2, \dots, e_n]$, ортономированный в смысле скалярного произведения (11.17), и вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, такие, что в этом базисе квадратичная форма $B_1(x,x)$ имеет вид

$$B_1(x,x) = \lambda_1|\xi_1|^2 + \lambda_2|\xi_2|^2 + \dots + \lambda_n|\xi_n|^2$$

Кроме того, так как базис $[e] = [e_1, e_2, \dots, e_n]$ – ортонормированный, то значение квадратичной формы $B_2(x,x)$ на любом векторе $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ согласно (11.17) равно

$$B_2(x,x) = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_n|^2. \ \#$$

Только что доказанная теорема дает положительный ответ на вопрос о существовании невырожденного преобразования, приводящего пару квадратичных форм к каноническому виду в случае, если одна из них положительно определена, но она не дает ответа на вопрос как найти это преобразование. Прежде чем ответить на этот вопрос введем несколько определений.

Определение 11.7. Пучком квадратичных форм, определяемых парой форм $B_1(x,x)$ и $B_2(x,x)$, называется совокупность форм

$$B_1(x,x) - \lambda B_2(x,x), \tag{11.18}$$

где λ – параметр.

Если форма $B_2(x,x)$ – положительно определенная, то пучок (11.18) называется регулярным.

<u>Определение 11.8.</u> Уравнение $\det[B_1 - \lambda B_2] = 0$ называется характеристическим уравнением пучка $B_1 - \lambda B_2$.

Обозначим λ_0 какой-нибудь корень этого уравнения. Так как $\det[B_1 - \lambda B_2] = 0$, то существует ненулевой вектор-столбец $\underset{\downarrow}{z}$ высотой n такой, что

$$B_1 \underset{\downarrow}{z} = \lambda_0 B_2 \underset{\downarrow}{z}. \qquad (11.19)$$

<u>Определение 11.9.</u> 1. Число λ_0, удовлетворяющее условию (11.19), будем называть собственным значением пучка $B_1 - \lambda B_2$, а $\underset{\downarrow}{z} \neq \underset{\downarrow}{\theta}$ – соответствующим главным вектором этого пучка.

Имеет место следующая

<u>теорема 11.10</u> Пусть $B_1(x,x)$ и $B_2(x,x)$ – эрмитовы квадратичные формы, заданные в комплексном линейном пространстве V_n, причем $B_2(x,x) > 0$, $x \neq \theta$. Тогда существует линейное невырожденное преобразование переменных

$$\underset{\downarrow}{x} = Z \underset{\downarrow}{\xi}$$

с матрицей $Z = [\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{e_n}]$, столбцами которой являются главные вектор-столбцы $\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{e_n}$ пучка $B_1(x,x) - \lambda B_2(x,x)$, ортонормированные в смысле скалярного произведения

$$(x,y)_2 = B_2(x,y)^{*)}, \text{ т.е. } B_2(\underset{\downarrow}{e_i}, \underset{\downarrow}{e_k}) = \delta_{ik}, \quad i,k = 1,2,\ldots,n,$$

приводящее квадратичные формы $B_1(x,x)$ и $B_2(x,x)$ к каноническому виду

$$B_1(x,x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\xi_k|^2, \qquad (11.20)$$

*) $B_2(x,y)$ – эрмитова полуторалинейная форма, полярная к квадратичной форме $B_2(x,x)$.

$$B_2(x,x) = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2, \qquad (11.21)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения пучка $B_1 - \lambda B_2$, соответствующие столбцам $\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{e_n}$ матрицы Z.

Доказательство. Покажем сначала, что у характеристического уравнения пучка $B_1 - \lambda B_2$ все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ вещественны и им соответствует n линейно-независимых главных векторов $\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{e_n}$:

$$B_1 \underset{\downarrow}{e_k} = \lambda_k B_2 \underset{\downarrow}{e_k}, \quad k = 1,2,\ldots,n, \qquad (11.22)$$

которые могут быть выбраны так, чтобы выполнялись соотношения

$$B_2(\underset{\downarrow}{e_i}, \underset{\downarrow}{e_k}) = \delta_{ik}. \qquad (11.23)$$

Действительно, равенства (11.22) можно переписать следующим образом:

$$B_2^{-1} B_1 \underset{\downarrow}{e_k} = \lambda_k \underset{\downarrow}{e_k}. \qquad (11.24)$$

Следовательно, для того, чтобы доказать только что сформулированное предложение достаточно показать, что матрица

$$A = B_2^{-1} B_1$$

имеет 1) вещественные собственные значения; 2) собственные векторы $\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{e_n}$, отвечающие этим собственным значениям, которые удовлетворяют условиям $B_2(\underset{\downarrow}{e_i}, \underset{\downarrow}{e_k}) = \delta_{ik}$, $i,k = 1,2,\ldots,n$.

Представим матицу $A = B_2^{-1} B_1$ в виде

$$A = C^{-1} S C,$$

где $C = \sqrt{B_2}$, а $S = C^{-1} B_1 C^{-1}$. Очевидно, S – эрмитова матрица и, следовательно, согласно основной спектральной теореме самосопряженных операторов у матрицы S все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ вещественны, а отвечающие им собственные векторы

$\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{e_n}$ могут быть выбраны так, чтобы выполнялись соотношения:

$$[\underset{\downarrow}{z_i}]'[\underset{\downarrow}{z_k}] = \delta_{ik} \quad i,k = 1,2,\ldots,\cdots n. \tag{11.25}$$

Справедливость 1) следует из того, что у матриц S и $C^{-1}SC$ системы собственных значений и собственных векторов, как нетрудно проверить, совпадают.

Введем обозначения $C^{-1}\underset{\downarrow}{z_k} = \underset{\downarrow}{e_k}$, $k = 1,2,\ldots,n$. тогда

$$A\underset{\downarrow}{e_k} = C^{-1}S\underset{\downarrow}{z_k} = \lambda_k C^{-1}\underset{\downarrow}{z_k} = \lambda_k \underset{\downarrow}{e_k}.$$

Кроме того, согласно представлению полуторалинейной формы в произвольном базисе (утверждение 10.4)

$$B_2(\underset{\downarrow}{e_i}, \underset{\downarrow}{e_k}) = [\underset{\downarrow}{e_i}]'B_2[\underset{\downarrow}{e_k}] = [\underset{\downarrow}{e_i}]'C'C[\underset{\downarrow}{e_k}] =$$

$$(C[\underset{\downarrow}{e_i}])'C[\underset{\downarrow}{e_k}] = [\underset{\downarrow}{z_i}]'[\underset{\downarrow}{z_k}] = \delta_{ik}{}^{*)} \tag{11.26}$$

$i,k = 1,2,\ldots,n$.

Линейная независимость столбцов $\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{e_n}$, очевидно, следует из последнего равенства. Следовательно, условие 2) также доказано.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что преобразование $\underset{\downarrow}{x} = Z\underset{\downarrow}{\xi}$, где $Z = [\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2}, \ldots, \underset{\downarrow}{e_n}]$ приводит квадратичные формы $B_1(x,x)$ и $B_2(x,x)$ к каноническому виду (11.20) и (11.21) соответственно. Для этого, очевидно, достаточно показать, что

$$Z'B_1Z = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{11.27}$$

*) В силу замечания 11.6 матрица C эрмитова.

и

$$Z'B_2Z = E. \tag{11.28}$$

Из (11.26) имеем $[\underset{\downarrow}{e_i}]'B_2[\underset{\downarrow}{e_k}] = \delta_{ik}$, $i,k = 1,2,\ldots,n$, что, как легко проверить, эквивалентно (11.28). Далее, помножив обе части равенства (11.22) слева на $[\underset{\downarrow}{e_i}]'$, получим

$$[\underset{\downarrow}{e_i}]'B_1[\underset{\downarrow}{e_k}] = \lambda_k[\underset{\downarrow}{e_i}]'B_2[\underset{\downarrow}{e_k}] = \lambda_k\delta_{ik}, \; i,k = 1,2,\ldots,n.$$

Последнее равенство, очевидно, эквивалентно (11.27)

Пример 11.6. Квадратичные формы

$$B_1(x,x) = 8x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 4x_2x_3;$$
$$B_2(x,x) = 11x_1^2 + 6x_2^2 + x_3^2 + 12x_1x_2 - 6x_1x_3 - 4x_2x_3$$

одним невырожденным преобразованием привести к каноническому виду.

Пользуясь критерием Сильвестра, нетрудно убедиться в том, что $B_2(x,x)$ – положительно определенная квадратичная форма.

Запишем характеристическое уравнение пучка квадратичной формы $B_1 - \lambda B_2$

$$\begin{vmatrix} 8-11\lambda & 3-6\lambda & -3+3\lambda \\ 3-6\lambda & 3-6\lambda & -2+2\lambda \\ -3+3\lambda & -2+2\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Решая это уравнение, получаем

$$(1-\lambda)[(1+2\lambda)^2 - 9] = 0, \; \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = 1, \; \lambda_3 = -2.$$

Координаты v_1, v_2, v_3 главного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda = 1$, удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} -3v_1 - 3v_2 + 0v_3 = 0, \\ -3v_1 - 3v_2 + 0v_3 = 0, \\ 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = 0, \end{cases}$$

что эквивалентно одному уравнению

$$v_1 + v_2 = 0. \tag{11.29}$$

Собственному значению $\lambda = 1$ должны соответствовать два ортонормированных в смысле скалярного произведения $(x,y)_2 =$

$= B_2(x,y)$ главных вектора $\underset{\downarrow}{e_1}$ и $\underset{\downarrow}{e_2}$, причем координаты этих векторов должны удовлетворять соотношению (11.29). Координаты $(v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)})$ первого вектора $\underset{\downarrow}{e_1}$ можно выбрать произвольно, только бы выполнялось условие (11.29). Выберем их так: $v_1^{(1)}$, $v_2^{(1)} = -v_1^{(1)}$, $v_3^{(1)} = 0$, где $v_1^{(1)}$ – пока произвольное число. Координаты $\left(v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, v_3^{(2)}\right)$ второго вектора $\underset{\downarrow}{e_2}$ будем искать в виде:

$$v_1^{(2)},\ v_2^{(2)} = -v_1^{(2)},\ v_3^{(2)},$$

где $v_1^{(2)}$ и $v_3^{(2)}$ – подлежащие определению числа. Числа $v_1^{(1)}$, $v_1^{(2)}$ и $v_3^{(2)}$ находим из условий $B_2(\underset{\downarrow}{e_i}, \underset{\downarrow}{e_k}) = \delta_{ik}$, $i, k = 1, 2$. Так как $B_2(\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_1}) = 11\left(v_1^{(1)}\right)^2 + 6\left(v_1^{(1)}\right)^2 + 0^2 + 12v_1^{(1)}\left(-v_1^{(1)}\right) - 6\cdot 0 - 4\cdot 0 = 1$, то $v_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Из условия $B_2(\underset{\downarrow}{e_1}, \underset{\downarrow}{e_2}) = 0$ *) имеем

$$11v_1^{(1)}v_1^{(2)} - 6v_1^{(1)}v_1^{(2)} - 3v_1^{(1)}v_3^{(2)} - 6v_1^{(2)}v_1^{(1)} + 6v_1^{(1)}v_1^{(2)} + 2v_1^{(1)}v_3^{(2)} = 0$$

или

$$v_1^{(1)}\left(5v_1^{(2)} - v_3^{(2)}\right) = 0.$$

Таким образом, $v_3^{(2)} = 5v_1^{(2)}$. И, наконец, из условия $B_2(\underset{\downarrow}{e_2}, \underset{\downarrow}{e_2}) = 1$ находим

$$11\left(v_1^{(2)}\right)^2 + 6\left(v_1^{(2)}\right)^2 + 25\left(v_1^{(2)}\right)^2 - 12\left(v_1^{(2)}\right)^2 - 6\cdot 5\left(v_1^{(2)}\right)^2 + 4\cdot 5\left(v_1^{(2)}\right)^2 = 1$$

или $$20\left(v_1^{(2)}\right)^2 = 1,\ \text{т.е. } v_1^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

*) Отметим, что $B_2(x,y) = 11x_1y_1 + 6x_1y_2 - 3x_1y_3 + 6y_1x_2 + 6y_2x_2 - 2x_2y_3 - 3y_1x_3 - 2y_2x_3 + x_3y_3$.

Следовательно, главные векторы $\underset{\downarrow}{e_1}$ и $\underset{\downarrow}{e_2}$ имеют вид

$$\underset{\downarrow}{e_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \underset{\downarrow}{e_2} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-1\\5\end{bmatrix}.$$

Аналогично для $\lambda_3 = -2$ находим

$$\underset{\downarrow}{e_3} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\5\end{bmatrix}.$$

Таким образом, согласно теореме (11.7) невырожденное преобразование переменных

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{5}{2\sqrt{5}} & \frac{5}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}$$

приводит квадратичные формы $B_1(x,x)$ и $B_2(x,x)$ к каноническому виду

$$B_1(x,x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_3^2,\ B_2(x,x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2.$$

§ 10. Приведение матрицы линейного оператора к треугольному виду

Рассмотрим произвольный линейный оператор $A(A \in L(V_n))$, действующий в унитарном пространстве V_n. Имеет место следующая

теорема 11.11 (Шура) 1. Для любого оператора $A \in L(V_n)$ найдется ортонормированный базис $[e] = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ унитарного пространства V_n, в котором матрица A_e этого оператора – треугольная. Матрица $A = [a_{ij}]$ называется треугольной, если $a_{ij} = 0$ для всех $i > j$.

2. Для любой матрицы $A=[a_{ij}]$, $(i,j=1,2,\ldots,n)$ существует унитарная матрица T такая, что,

$$T^*AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

где * обозначены элементы (в общем случае не все равные нулю), лежащие выше главной диагонали, а на главной диагонали стоят собственные значения матрицы A.

Доказательство.

1. Покажем, что для оператора A существуют инвариантные подпространства V_k, $k=1,2,\ldots,n-1$, такие, что

$$V_1\subset V_2\subset\ldots\subset V_{n-1}\subset V_n.$$

Для этого рассмотрим оператор A^*, сопряженный к A. Оператор A^* имеет по крайней мере один собственный вектор e_1^*. Пусть он соответствует собственному значению λ_1^* (вообще говоря, комплексному). Тогда все пространство V_n можно разложить в прямую сумму

$$V_n=L(e_1^*)\oplus L_1,$$

где $L(e_1^*)$ – линейная оболочка вектора e_1^*, а $L_1=L^{\perp}(e_1^*)$ и $\dim L_1=n-1$. Покажем, что L_1 – инвариантное подпространство оператора A. Действительно, произвольный элемент x принадлежит L_1 тогда и только тогда, когда $(x,e_1^*)=0$. Поэтому из равенства $(Ax,e_1^*)=(x,A^*e_1^*)=\overline{\lambda}_1^*(x,e_1^*)=0$ имеем, что $Ax\in L_1$ и, следовательно, L_1 – инвариантное подпространство оператора A. Обозначим $L_1=V_{n-1}$. Таким образом, существование инвариантного подпространства V_{n-1} доказано. Если рассмотреть оператор A на подпространстве V_{n-1}, то аналогично доказывается существование подпространства V_{n-2} и так далее.

Построим ОНБ $[e]=[e_1,e_2,\ldots,e_n]$ пространства V_n следующим образом. В качестве e_1 возьмем любой единичный вектор подпространства V_1, а в качестве e_2 возьмем любой нормированный вектор из V_2, ортогональный подпространству V_1, и вообще в качестве вектора e_k возьмем любой нормированный вектор из V_k, ортогональный подпространству V_{k-1}. Найдем матрицу A_e оператора A в этом базисе. Так как $e_k\in V_k$ и V_k инвариантно относительно оператора A, то

$$Ae_k=b_{1k}e_1+b_{2k}e_2+\ldots+b_{kk}e_k \tag{11.30}$$

для любого $k=1,2,\ldots,n$.

Следовательно, матрица A_e оператора A в базисе $[e]$ имеет вид

$$A_e=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}, \tag{11.31}$$

причем в силу инвариантности характеристического многочлена $\det(A_e-\lambda E)=\prod_{k=1}^{n}(b_{kk}-\lambda)$ имеем $b_{kk}=\lambda_k$, $k=1,2,\ldots,n$, где λ_k – собственные значения оператора A.

2. Пусть $A=[a_{ij}]$ – произвольная квадратная матрица порядка n. Построим оператор $A\in L(V_n)$, матрицей которого в некотором ОНБ $[\hat{e}]$ является заданная матрица A. Согласно п.1 настоящей теоремы существует такой ОНБ $[e]$, в котором матрица оператора A имеет вид (11.31), причем $b_{kk}=\lambda_k$, $k=1,2,\ldots,n$, λ_k – собственные значения матрицы A. Очевидно, что матрица перехода от базиса $[\hat{e}]$ к базису $[e]$ унитарна. Следовательно, согласно (9.19) справедливо утверждение теоремы. #

§ 11. Поверхности второго порядка в *n*-мерном пространстве

Пусть V_n – n-мерное евклидово пространство. Будем называть его элементы точками. Если $e_1,e_2,\ldots,e_n$ – некоторый ОНБ в V_n, то координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ произвольного элемента x из V_n в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ будем называть прямоугольными координатами точки x.

Определение 11.10. Общим уравнением поверхности второго порядка в n-мерном евклидовом пространстве V_n называется множество точек, прямоугольные координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ которых удовлетворяют уравнению вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0, \qquad (11.32)$$

где не все числа a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ равны нулю.

Если через $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ обозначить матрицу квадратичной формы $A(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, через $\underset{\downarrow}{X}$ – столбец из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и через B – столбец из коэффициентов $b_1, b_2, \ldots, b_n$, то, пользуясь матричной записью (11.32), можно записать в виде

$$\vec{X} A \underset{\downarrow}{X} + 2\vec{X} \underset{\downarrow}{B} + C = 0. \qquad (11.33)$$

Будем считать все коэффициенты в (11.32) вещественными.

Если $n = 2$, то уравнение (11.32) является уравнением линии 2-го порядка на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат. Если же $n = 3$, то уравнение (11.32) есть уравнение поверхности 2-го порядка в пространстве. #

Определение 11.11. Назовем преобразованием параллельного переноса в евклидовом пространстве V_n преобразование вида

$$\underset{\downarrow}{X} = \underset{\downarrow}{U} + \underset{\downarrow}{Y}, \qquad (11.34)$$

где $\underset{\downarrow}{U}$ – постоянный заданный вектор-столбец; $\underset{\downarrow}{X}$ – старые; $\underset{\downarrow}{Y}$ – новые прямоугольные координаты точки x.

Покажем, что уравнение (11.33) с помощью преобразования (11.34) и некоторого ортогонального преобразования $\underset{\downarrow}{X} = T\underset{\downarrow}{Y}$ можно привести к достаточно простому, так называемому каноническому виду. Так же как в аналитической геометрии на плоскости, постараемся избавиться от членов, содержащих переменные в первой степени. При помощи ортогонального преобразования $\underset{\downarrow}{X} = T\underset{\downarrow}{Y}$ этого сделать нельзя, так как для ненулевого столбца $\underset{\downarrow}{B}$ ввиду невырожденности матрицы T' столбец $T'\underset{\downarrow}{B}$ всегда ненулевой, а значит $\vec{X}\underset{\downarrow}{B} = (T\underset{\downarrow}{Y})'\underset{\downarrow}{B} = \vec{Y}T'\underset{\downarrow}{B} \neq 0$. Отметим, что квадратичная форма $\vec{X}A\underset{\downarrow}{X}$ при преобразовании $\underset{\downarrow}{X} = T\underset{\downarrow}{Y}$ снова переходит в квадратичную форму $\vec{Y}(T'AT)\underset{\downarrow}{Y}$.

Сделаем в равенстве (11.33) преобразование параллельного переноса (11.34) и посмотрим нельзя ли столбец $\underset{\downarrow}{U}$ подобрать так, чтобы исчезла линейная часть:

$$(\vec{U} + \vec{Y})A(\underset{\downarrow}{U} + \underset{\downarrow}{Y}) + 2(\vec{U} + \vec{Y})\underset{\downarrow}{B} + C = 0$$

или

$$\vec{Y}A\underset{\downarrow}{Y} + \vec{Y}A\underset{\downarrow}{U} + \vec{U}A\underset{\downarrow}{Y} + \vec{U}A\underset{\downarrow}{U} + 2\vec{U}\underset{\downarrow}{B} + 2\vec{Y}\underset{\downarrow}{B} + C = 0. \qquad (11.35)$$

Так как $\vec{U}A\underset{\downarrow}{Y} = (\vec{U}A\underset{\downarrow}{Y})' = \vec{Y}A\underset{\downarrow}{U}$, то (11.35) можно переписать в виде

$$\vec{Y}A\underset{\downarrow}{Y} + 2\vec{Y}\left(A\underset{\downarrow}{U} + \underset{\downarrow}{B}\right) + C_1 = 0, \qquad (11.36)$$

где

$$C_1 = \vec{U}A\underset{\downarrow}{U} + 2\vec{U}\underset{\downarrow}{B} + C.$$

Из (11.36) следует, что первые степени новых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ будут отсутствовать, если $\underset{\downarrow}{U}$ удовлетворяет уравнению:

$$A\underset{\downarrow}{U} + \underset{\downarrow}{B} = \underset{\downarrow}{0}. \qquad (11.37)$$

Система (11.37) n линейных уравнений с n неизвестными может оказаться как совместной, так и несовместной. Поэтому мы должны различать два случая.

1. Уравнение (11.37) разрешимо относительно $\underset{\downarrow}{U}$. Тогда после преобразования параллельного переноса $\underset{\downarrow}{X} = \underset{\downarrow}{U} + \underset{\downarrow}{Y}$ уравнение (11.36) примет вид

$$\vec{Y}A\underset{\downarrow}{Y}+C_1=0. \qquad (11.38)$$

Сделав ортогональное преобразование переменных $\underset{\downarrow}{Y}=T\underset{\downarrow}{Z}$, приводящее квадратичную форму $\vec{Y}A\underset{\downarrow}{Y}$ к каноническому виду, из (11.32) получим

$$\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\ldots+\lambda_n z_n^2+C_1=0, \qquad (11.39)$$

где $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ – собственные значения матрицы A. Отметим, что некоторые из коэффициентов $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, но не все, могут оказаться равными нулю.

Итак, доказали следующее

утверждение 11.4. Любое уравнение поверхности второго порядка вида (11.33), при условии если (11.37) разрешимо относительно столбца $\underset{\downarrow}{U}$ при помощи преобразования переменных

$$\underset{\downarrow}{X}=\underset{\downarrow}{U}+T\underset{\downarrow}{Z}$$

с ортогональной матрицей T приводится к каноническому виду (11.39). #

Замечание 11.8. Рассмотренный нами случай (разрешимость уравнения (11.37)) содержит в себе (при $\det A\neq 0$) случай, отвечающий в аналитической геометрии так называемым центральным линиям 2-го порядка.

2. Уравнение (11.37) неразрешимо относительно столбца $\underset{\downarrow}{U}$ (это может случиться только при вырожденной матрице A). Сделаем ортогональное преобразование $\underset{\downarrow}{X}=T\underset{\downarrow}{Y}$ переменных так, чтобы квадратичная форма $\vec{X}A\underset{\downarrow}{X}$ в (11.33) приняла канонический вид. Так как матрица A вырождена, то (11.32) в новых переменных примет вид

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\ldots+\lambda_r y_r^2+2\sum_{i=1}^{n}c_i y_i+c_1=0,$$

где $r<n$ и $\lambda_1\neq 0,\ldots,\lambda_r\neq 0$, а столбец из c_i совпадает соответственно со столбцом $T'\underset{\downarrow}{B}$. При помощи параллельного переноса

здесь можно избавиться от первых степеней переменных $y_1,y_2,\ldots,y_r$.

Действительно, после преобразования параллельного переноса

$$\begin{cases} y_i=-\dfrac{c_i}{\lambda_i}+z_i, i=1,2,\ldots,r,\\ y_j=z_j, j=r+1,\ldots,n\end{cases} \qquad (11.40)$$

последнее уравнение примет вид

$$\lambda_1 z_1^2+\ldots+\lambda_r z_r^2+2\sum_{j=1+r}^{n}c_j z_j+d=0, \qquad (11.41)$$

где $d=c-\sum_{i=1}^{r}\dfrac{c_i^2}{\lambda_i}$.

Отметим, что коэффициенты $c_{r+1},\ldots,c_n$, все одновременно в нуль не обращаются. Действительно, если бы $c_j=0$, $j=r+1,\ldots,n$, то по доказанному выше отсюда следует, что уравнение $T'AT\underset{\downarrow}{U}+T'\underset{\downarrow}{B}=\underset{\downarrow}{0}$ разрешимо относительно $\underset{\downarrow}{U}$, а это в свою очередь, как легко видеть, влекло бы разрешимость уравнения (11.37) вопреки нашему предположению.

Положим $\mu=\sqrt{c_{r+1}^2+\ldots+c_n^2}$. Так как сумма квадратов элементов $\dfrac{c_{r+1}}{\mu},\ldots,\dfrac{c_n}{\mu}$ равна 1, то согласно утверждению 11.3 существует ортогональная матрица T_0 порядка $n-r$, первый столбец которой состоит из чисел $\dfrac{c_{r+1}}{\mu},\ldots,\dfrac{c_n}{\mu}$. Рассмотрим блочную матрицу $T_1=\left[\begin{array}{c|c} E & 0\\ \hline 0 & T_0\end{array}\right]$, где E – единичная матрица порядка r. Очевидно, T_1 – ортогональная матрица. Сделаем в равенстве (11.41) ортогональное преобразование $\underset{\downarrow}{U}=T_1^{-1}\underset{\downarrow}{Z}=T_1'\underset{\downarrow}{Z}$ или в координатной записи

$$\begin{cases} U_1 = z_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_r = \cdots z_r \\ U_{r+1} = \dfrac{c_{r+1}}{\mu} z_{r+1} + \ldots + \dfrac{c_n}{\mu} z_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \qquad (11.42)$$

После этого преобразования (11.41) примет вид:

$$\lambda_1 u_1^2 + \ldots + \lambda_r u_r^2 + 2\mu u_{r+1} + d = 0$$

И, наконец, сделав параллельный перенос

$$\begin{cases} u_i = w_i, i = 1,2,\ldots,n, i \neq r+1 \\ u_{r+1} = -\dfrac{d}{2\mu} + w_{r+1}, \end{cases} \qquad (11.43)$$

получим

$$\lambda_1 w_1^2 + \ldots + \lambda_r w_r^2 + 2\mu w_{r+1} = 0\,. \qquad (11.44)$$

Отметим, что при переходе от (11.32) к (11.44) выполнено четыре линейных преобразования: два ортогональных преобразования $\underset{\downarrow}{X} = T\underset{\downarrow}{Y}$ и $\underset{\downarrow}{Z} = T_1\underset{\downarrow}{U}$ и два параллельных переноса (11.40) и (11.43), которые запишем в виде $\underset{\downarrow}{Y} = \underset{\downarrow}{V_1} + \underset{\downarrow}{Z}$ и $\underset{\downarrow}{U} = \underset{\downarrow}{V_2} + \underset{\downarrow}{W}$. Тогда результирующее преобразование, приводящее уравнение поверхности (11.32) к каноническому виду (11.44) может быть записано в виде

$$\underset{\downarrow}{X} = T\underset{\downarrow}{Y} = T(\underset{\downarrow}{V_1} + \underset{\downarrow}{Z}) = T\underset{\downarrow}{V_1} + TT_1\underset{\downarrow}{U} = (T\underset{\downarrow}{V_1} + TT_1\underset{\downarrow}{V_2}) + TT_1\underset{\downarrow}{W} = \underset{\downarrow}{U_0} + TT_1\underset{\downarrow}{W},$$

где $\underset{\downarrow}{U_0} = T\underset{\downarrow}{V_1} + TT_1\underset{\downarrow}{V_2}$.

Итак, доказано

<u>утверждение 11.5.</u> Любое уравнение поверхности второго порядка (11.32), при условии, если (11.37) не разрешимо относительно $\underset{\downarrow}{U}$, при помощи преобразования переменных вида

$$\underset{\downarrow}{X} = \underset{\downarrow}{U} + T_2\underset{\downarrow}{W}$$

с ортогональной матрицей T_2 может быть приведено к каноническому виду (11.44). #

<u>Замечание 11.9.</u> Рассмотренный нами случай (неразрешимость уравнения (11.37) соответствует в аналитической геометрии так называемым нецентральным линиям 2-го порядка.

§ 12. Классификация поверхностей второго порядка в *n*-мерном пространстве

Поверхности 2-го порядка в n-мерном пространстве, для которых $\det A \neq 0$ будем называть центральными, в противном случае – нецентральными.

Рассмотрим отдельно случай центральных и нецентральных поверхностей.

1. Случай центральных поверхностей

Очевидно, в этом случае согласно утверждению 11.4 уравнение поверхности может быть приведено к следующему виду:

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2 + c_1 = 0\,, \qquad (11.45)$$

где все коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ отличны от нуля. В случае, если $c_1 \neq 0$, введем обозначения $a_i^2 = \left|\dfrac{c_1}{\lambda_i}\right|$, $i = 1,2,\ldots,n$. Тогда, если числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ имеют одинаковые знаки, противоположные знаку числа c_1, то уравнение (11.45) может быть приведено к виду

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{z_n^2}{a_n^2} = 1\,. \qquad (11.46)$$

Поверхность, определяемая уравнением (11.46), называется эллипсоидом.

Если числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, c_1$ имеют одинаковые знаки, то уравнение (11.45) может быть приведено к виду

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{z_n^2}{a_n^2} = -1\,. \qquad (11.47)$$

Этому уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки вещественного евклидова пространства. Поверхность, определяемая этим уравнением, называется мнимым эллипсоидом.

И наконец, если коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \, (0 < k < n)$ имеют знаки противоположные знаку числа c_1, а коэффициенты $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$ имеют знаки, совпадающие со знаком числа c_1, то уравнение может быть приведено к виду

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{z_k^2}{a_k^2} - \frac{z_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \ldots - \frac{z_n^2}{a_n^2} = 1. \qquad (11.48)$$

Поверхность, определяемая этим уравнением, называется $(n-k)$ -полостным гиперболоидом.

В случае, если $c_1 = 0$, введем обозначения

$$a_i^2 = \left|\frac{1}{\lambda_i}\right|, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

Тогда в случае, если коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ одного знака, то уравнение поверхности (11.45) примет вид

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{z_n^2}{a_n^2} = 0. \qquad (11.49)$$

Поверхность, удовлетворяющая этому уравнению, называют мнимым конусом. Очевидно, уравнению (11.49) удовлетворяют координаты только одной точки $(0, 0, \ldots, 0)$.

Если же коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \, (0 < k < n)$ имеют один знак противоположный знаку коэффициентов $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$, то уравнение (11.45) может быть приведено к виду

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{z_k^2}{a_k^2} - \frac{z_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \ldots - \frac{z_n^2}{a_n^2} = 0$$

Поверхность, определяемая этим уравнением, называется конусом. Итогом наших рассмотрений в случае центральных поверхностей будет

<u>вывод 11.1.</u> Центральными поверхностями являются действительные и мнимые эллипсоиды, гиперболоиды, мнимые и действительные конусы.

2. Случай нецентральных поверхностей

Если поверхность нецентральная, то согласно утверждениям 11.4, 11.5 уравнение поверхности может быть приведено к одному из следующих видов:

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 + c_1 = 0 \qquad (11.50)$$

или

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 + 2\mu z_{r+1} = 0, \qquad (11.51)$$

где r в этих уравнениях удовлетворяет условиям $1 \le r \le n-1$, и ни один из коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, μ не обращается в нуль.

Если в уравнении (11.51) $r = n-1$, то поверхность определяемая уравнением

$$\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1} z_{n-1}^2 + 2\mu z_n = 0, \qquad (11.52)$$

называется параболоидом. В зависимости от соотношений знаков коэффициентов, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ уравнение (11.52) можно записать в одном из следующих видов:

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{z_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \pm 2 z_n \qquad (11.53)$$

или

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{z_k^2}{a_k^2} - \frac{z_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \ldots - \frac{z_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \pm 2 z_n, \qquad (11.54)$$

где введены обозначения $a_i^2 = \left|\frac{\mu}{\lambda_i}\right|, i = 1, 2, \ldots, n-1$. Уравнение (11.53) получается из (11.52) если коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ имеют один знак. Поверхность, определяемая этими уравнениями, называется эллиптическим параболоидом.

Уравнение (11.54) получается из (11.52) в случае, если коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ имеют один знак, противоположный знаку коэффициентов $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{n-1}$. Поверхность, определяемая этим уравнением, называется гиперболическим параболоидом.

Уравнение (11.50), а при $1 \le r \le n-2$ так же и уравнение (11.51), определяют поверхности, которые называются цилиндрами, более подробную классификацию которых мы проводить не будем, отметим только, что при их классификации повторяются все основные рассмотренные случаи, но только в пространстве меньшей размерности.

Остановимся более подробно на классификации линий второго порядка на плоскости и поверхностей второго порядка в пространстве.

Согласно утверждениям 11.4 и 11.5 каждое уравнение линии 2-го порядка на плоскости в надлежащей системе координат имеет один из следующих видов:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0(\lambda_1 \neq 0),\ \lambda x^2 = -2\mu y(\lambda \neq 0, \mu \neq 0).$$

Перебирая все возможные значения для λ_2 и c и учитывая знаки встречающихся коэффициентов, приходим к следующим геометрическим образам:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс;

2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гипербола;

3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся прямых;

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – одна точка;

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – пустое множество;

6) $x^2 = 2py$ – парабола;

7) $x^2 - a^2 = 0$ – две параллельные прямые;

8) $x^2 + a^2 = 0$ – пустое множество;

9) $x^2 = 0$ – одна прямая.

Аналогично общее уравнение поверхности 2-го порядка в пространстве определяет один из следующих геометрических образов:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ – эллипсоид;

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ – однополостный гиперболоид;

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ – двуполостный гиперболоид;

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ – мнимый эллипсоид (пустое множество);

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ – одна точка;

6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ – конус;

7) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ – эллиптический параболоид;

8) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ – гиперболический параболоид;

9) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллиптический цилиндр;

10) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гиперболический цилиндр;

11) $x^2 = 2py$ – параболический цилиндр;

12) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – пустое множество;

13) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – одна прямая;

14) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ – две пересекающиеся плоскости;

15) $x^2 - a^2 = 0$ – две параллельные плоскости;

16) $x^2 + a^2 = 0$ – пустое множество;

17) $x^2 = 0$ – одна плоскость.

Пример 11.4 Привести к каноническому виду уравнение поверхности 2-го порядка

$$5x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 - 30 = 0.$$

Для данной поверхности запишем уравнение (11.37) $\underset{\downarrow}{A}\underset{\downarrow}{V} + \underset{\downarrow}{B} = \underset{\downarrow}{0}$.

Оно, очевидно, имеет вид

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Эта система имеет решение $V_1=-\frac{2}{3}$, $V_2=-\frac{14}{3}$, $V_3=-\frac{16}{3}$. После параллельного переноса

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

уравнение поверхности примет вид

$$5y_1^2+3y_2^2+3y_3^2-2y_1y_2+2y_1y_3-2y_2y_3-30=0.$$

Собственными значениями матрицы A квадратичной формы являются числа $\lambda_1=2$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=3$. Ортонормированными собственными векторами, отвечающими этим собственным значениям, являются соответственно:

$$\underset{\downarrow}{e_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \underset{\downarrow}{e_2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \underset{\downarrow}{e_3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, преобразование

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

приводит уравнение нашей поверхности к виду

$$2z_1^2+6z_2^2+3z_3^2-30=0$$

или $$\frac{z_1^2}{15}+\frac{z_2^2}{5}+\frac{z_3^2}{10}=1 \text{ – эллипсоид.}$$

Пример 11.5. Привести к каноническому виду уравнение поверхности 2-го порядка

$$2x_1x_3+4x_1-6x_2+8x_3-2=0.$$

Заметим, что уравнение (11.37) данной поверхности имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и, как легко видеть, оно неразрешимо. Следовательно, поверхность нецентральная. Сделаем ортогональное преобразование $\underset{\downarrow}{x}=T\underset{\downarrow}{y}$, приводящее матрицу A квадратичной формы в диагональному виду. Собственными значениями матрицы A являются числа $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=0$. Ортонормированными собственными векторами, отвечающими этим собственным значениям, являются собственные векторы

$$\underset{\downarrow}{e_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \underset{\downarrow}{e_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ \underset{\downarrow}{e_3}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, ортогональное преобразование

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

приводит уравнение нашей поверхности к виду:

$$y_1^2-y_2^2+c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3-2=0,$$

где c_1,c_2,c_3 совпадает со столбцом $T'B$, т.е. $c_1=\frac{12}{\sqrt{2}}$, $c_2=-\frac{4}{\sqrt{2}}$, $c_3=-6$. Таким образом, уравнение поверхности примет вид

$$y_1^2-y_2^2+6\sqrt{2}y_1-2\sqrt{2}y_2-6y_3-2=0.$$

Его можно переписать в виде

$$\left(y_1+3\sqrt{2}\right)^2-\left(y_2+\sqrt{2}\right)^2-6\left(y_3+3\right)=0.$$

Сделав параллельный перенос

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

получим $z_1^2 - z_2^2 = 6z_3$. Это – гиперболический параболоид. Результирующее преобразование, приводящее уравнение нашей поверхности к каноническому виду, имеет вид:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Задачи к главе № 11

1) Пусть оператор A действует в одномерном унитарном (евклидовом) пространстве. В чем состоит преобразование A^*, сопряженное по отношению к A?

2) Найти сопряженный оператор для оператора трехмерного евклидова пространства $A\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}]$, где $\vec{a}$ – фиксированный вектор.

3) Найти сопряженный оператор для оператора поворота плоскости на угол α.

4) Показать, что если операторы A, B перестановочны, то перестановочны и сопряженные операторы A^* и B^*.

5) Показать, что если A – нормальный оператор, то нормальными будут также операторы: а) A^*; б) A^{-1}, если A – невырожден; в) $f(A)$ для любого многочлена $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$.

6) Показать, что: а) оператор A, определенный равенством $A\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}]$ в трехмерном пространстве V_3 (где a – фиксированный вектор) является нормальным; б) оператор поворота плоскости на угол α является нормальным оператором.

7) Привести пример, показывающий, что произведение AB нормальных операторов A и B в общем случае не будет нормальным оператором.

8) Описать все унитарные операторы, действующие в одномерном пространстве.

9) Показать, что оператор поворота плоскости на угол α является унитарным оператором.

10) Может ли оператор проектирования быть унитарным?

11) Будет ли ортогональным оператор A, определенный равенством $A\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}]$, действующий в трехмерном пространстве V_3 (где a – фиксированный вектор).

12) Привести пример, показывающий, что в неортонормированном базисе матрица ортогонального оператора может быть и не ортогональной.

13) Построить ортогональную матрицу, две первые строки которой совпадают со строками $\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ и $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

14) Квадратичную форму $A(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4$ привести к каноническому виду ортогональным преобразованием переменных и найти это ортогональное преобразование.

15) Можно ли пару квадратичных форм

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2,\ g = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$$

привести к каноническому виду одним вещественным невырожденным линейным преобразованием.

16) Найти вещественное невырожденное линейное преобразование, приводящее одну из форм к нормальному виду, а другую к каноническому виду

$$f = -4x_1x_2,\ g = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Прилепко А. И., Сандаков Е. Б.** Геометрические основы линейной алгебры.– М.: Изд. МИФИ, 1981.

2. **Прилепко А. И., Сандаков Е. Б.** Матрицы и линейные пространства.– М.: Изд. МИФИ, 1981.

3. **Прилепко А. И., Сандаков Е. Б.** Нормальные операторы и квадратичные формы.– М.: Изд. МИФИ, 1981.

4. **Прилепко А. И., Сандаков Е. Б.** Тензорная алгебра и самосопряженные операторы.– М.: Изд. МИФИ, 1982.

5. **Прилепко А. И., Евсин В. И., Сандаков Е. Б.** Методические рекомендации по решению задач по курсу «Линейная алгебра». Матрицы и квадратичные формы.– М.: Изд. МИФИ, 1980.

6. **Беклемишев Д. В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.– М.: Высшая школа, 1998.

7. **Воеводин В. В.** Линейная алгебра.– М.: Наука, 1980.

8. **Ильин В. А., Позняк Э. Г.** Линейная алгебра.– М.: Наука, 1999.

9. **Александров П. С.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.– М.: Наука, 1979.

10. **Бугров Я. С., Никольский С. М.** Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.– М.: Наука, 1988.

11. **Ильин В. А., Позняк Э. Г.** Аналитическая геометрия.– М.: Наука, 1999.

12. **П. Ланкастер.** Теория матриц.– М. Наука, 1978.

Подписано в печать 06.10.2004 Формат 60x84/16
Печ.л. 19,25 Тираж 500 экз. Заказ №681 Изд.№ 028

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)
Типография МИФИ. 115409, Москва, Каширское шоссе, 31