Вопросы к экзамену по курсу ЛА-К2 (весна 2014)

1. Теория систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

1.1. Матрицы, действия с матрицами, обратная матрица. Простые матричные уравнения и метод их решения. Лемма об алгебраических дополнениях и её следствие (алгоритм вычисления обратной матрицы).
1.2. Линейная зависимость и независимость столбцов (строк) матрицы. Критерий линейной зависимости, достаточные условия линейной зависимости столбцов (строк) матрицы.
1.3. Понятие ранга матрицы. Теорема о базисном миноре. Лемма о ранге произведения матриц.
1.4. Элементарные преобразования матриц. Матрицы элементарных преобразований (элементарные матрицы). Вычисление ранга матрицы методом окаймления и методом элементарных преобразований.
1.5. Определение системы линейных алгебраических уравнений, основные свойства СЛАУ. Однородность и неоднородность, совместность и несовместность, определённость СЛАУ, матричная форма записи СЛАУ и её решения.
1.6. Квадратные системы, теорема Крамера.
1.7. Элементарные преобразования СЛАУ. Метод Гаусса исследования СЛАУ.
1.8. Критерий совместности СЛАУ (теорема Кронекера-Капелли). Геометрическая интерпретация множества решений на примере 3-х уравнений с 3-мя неизвестными (полное исследование и геометрическая интерпретация).
1.9. Однородные СЛАУ. Свойство решений, фундаментальная система решений (ФСР), теорема об общем решении однородной системы. Фундаментальная матрица. Критерий существования нетривиального решения.
1.10. Неоднородные СЛАУ. Теорема о представлении решения неоднородной СЛАУ. Алгоритм решения.
1.11. Альтернатива Фредгольма.

2. Линейные пространства (ЛП)

2.1. Определение линейного (векторного) пространства. Примеры ЛП. Простейшие свойства ЛП.
2.2. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Критерий линейной зависимости системы векторов. Достаточные условия линейной зависимости и линейной независимости систем векторов ЛП. Примеры линейно независимых систем в пространствах строк, многочленов, матриц. Теорема о добавлении вектора.
2.3. Базис и размерность ЛП. Теорема о единственности координат (Единственность разложения по базису). Теорема о линейности координат. Примеры базисов в ЛП строк, многочленов, матриц. Основная лемма о линейной зависимости. Теорема о связи базиса и размерности линейного пространства.
2.4. Изоморфизм ЛП, свойства изоморфизма. Критерий изоморфизма ЛП.
2.5. Линейные подпространства и линейные оболочки, собственное подпространство, теорема о размерности. Теоремы о линейной оболочке, как линейном подпространстве и о его размерности. Теорема о неполном базисе.
2.6. Пересечение и сумма подпространств, прямая сумма подпространств. Теорема о разложении линейного пространства в прямую сумму подпространств. Теорема о размерности суммы подпространств.
2.7. Множество решений однородной СЛАУ, как линейное подпространство в арифметическом координатном пространстве, его размерность и базис. Выражение общего решения однородной СЛАУ через ФСР.
2.8. Матрица перехода от одного базиса ЛП к другому и её свойства. Преобразование координат вектора при переходе к другому базису. Ковариантный и контравариантный законы преобразования.

3. Линейные операторы (ЛО) в линейном пространстве.

3.1. Определение и примеры линейных операторов, линейные отображения и линейные преобразования. Действия с линейными операторами. Множество линейных операторов, как линейное пространство. Композиция линейных операторов, теорема о свойствах композиции ЛО.
3.2. Матрица линейного оператора. Теорема о задании ЛО. Теорема о нахождение координат образа вектора. Примеры нахождения матриц операторов: проектирования, дифференцирования, и поворота. Теорема об изоморфности пространства линейных преобразований множеству квадратных матриц. Размерность пространства ЛО.
3.3. Теорема о матрице композиции (произведении) ЛО. Определение и свойства обратного преобразования, его матрица. Критерий обратимости линейного оператора. Примеры обратимых и необратимых линейных преобразований.
3.4. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису. Лемма о «сокращении» на произвольный вектор. Определитель и характеристический многочлен линейного оператора, их инвариантность по отношению к преобразованиям базиса.
3.5. Ядро и образ линейного оператора как линейные подпространства. Теорема о сумме размерностей ядра и образа. Нахождение ядра и образа линейного оператора.
3.6. Инвариантные подпространства ЛО. Инвариантность ядра и образа оператора. Ранг и дефект линейного оператора. Лемма об инвариантности ядра и образа ЛО относительно перестановочного с ним ЛО.
3.7. Собственные значения (числа) и собственные векторы линейного оператора. Спектр ЛО. Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов. Характеристический многочлен ЛО, его инвариантность относительно преобразования базиса. Вычисление некоторых значений коэффициентов характеристического многочлена через определитель и след матрицы оператора, инвариантность определителя и следа матрицы линейного оператора.
3.8. Свойства собственных векторов линейного оператора. Алгебраическая и геометрическая кратности собственных значений и их взаимосвязь. Теорема о существовании в вещественном ЛП собственного вектора или двумерного инвариантного собственного подпространства ЛО.
3.9. Критерии диагонализируемости матрицы линейного оператора, достаточное условие диагонализируемости линейного оператора.
3.10. Теорема об инвариантности собственного подпространства ЛО относительно коммутирующего с ним ЛО. Теорема о сумме собственных подпространств.
3.12. Теорема о нулевом собственном значении. Теорема Гамильтона-Кэли.